



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Κλασματικοί Παραγοντικοί Σχεδιασμοί 2^k

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί 2^k

Ο κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός (**fractional factorial design**) είναι ο σχεδιασμός στον οποίο εκτελείται μόνο ένα επιλεγμένο υποσύνολο ή "κλάσμα" των συνδυασμών των επεμβάσεων από ένα πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό.

Τα κλασματικά παραγοντικά σχέδια είναι πολύ χρήσιμα όταν οι διαθέσιμοι πόροι είναι περιορισμένοι ή ο αριθμός των παραγόντων στο σχεδιασμό είναι αρκετά μεγάλος, επειδή απαιτούν λιγότερες εκτελέσεις σε σχέση με ένα πλήρες παραγοντικό.

Οι κλασματικοί σχεδιασμοί εφαρμόζονται κυρίως σε πειράματα επιλογής παραγόντων (**screening experiments**).

Οι ερευνητές προκειμένου να πάρουν πληροφορίες σχετικά με τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης, με λιγότερες εκτελέσεις, υποθέτουν ότι οι επιδράσεις υψηλότερης τάξης είναι αμελητέες.

Ο κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός επειδή χρησιμοποιεί ένα υποσύνολο συνδυασμών επεμβάσεων ενός πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού, μερικές από τις κύριες επιδράσεις και διπλές αλληλεπιδράσεις συγχέονται και δεν μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους και με τις αλληλεπιδράσεις ανώτερης τάξης.

Ένας πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός 2^k μπορεί με ανάμειξη να διαχωριστεί σε δύο ομάδες μεγέθους 2^{k-1} , σε τέσσερις ομάδες μεγέθους 2^{k-2} , και γενικά 2^q ομάδες μεγέθους 2^{k-q} . Στον κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό 2^{k-1} επιλέγουμε μια από τις δύο ομάδες και εκτελούμε τους συνδυασμούς. Ο κλασματικός σχεδιασμός είναι ουσιαστικά μία μη πλήρη ομάδα από έναν παραγοντικό σχεδιασμό 2^k με ανάμειξη.

Για τη δημιουργία της ομάδος – κλάσματος επιλέγουμε μία στήλη και ανάλογα τα πρόσημα της στήλης, εκτελούμε τους αντίστοιχους συνδυασμούς.

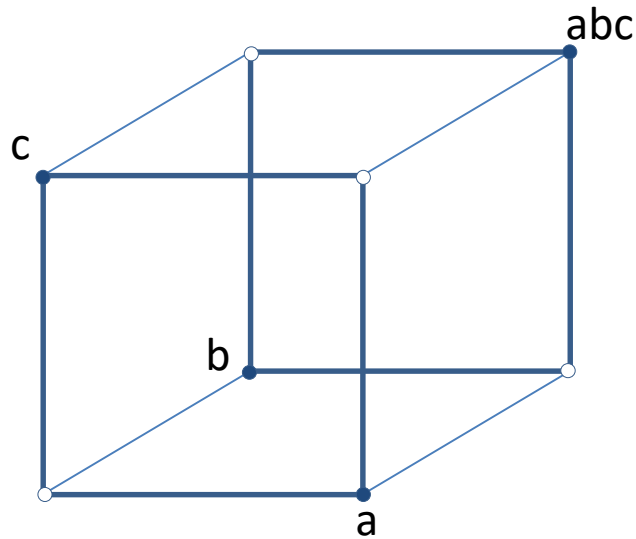
½ κλάσμα 2^3 σχεδιασμού

Επιλέγουμε την ομάδα με τους συνδυασμούς των επεμβάσεων οι οποίοι έχουν θετικό πρόσημο στη στήλη ABC. Η ορίζουσα σχέση (**defining relation**) είναι η $I = ABC$ και ο γεννήτορας (**generator**) του κλάσματος $C = AB$.

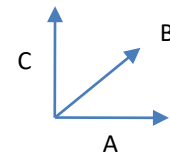
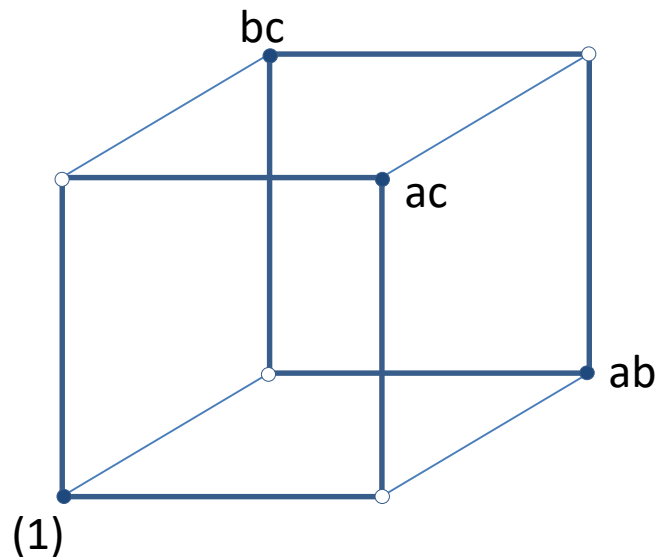
Συνδυασμοί επεμβάσεων		Παραγοντική επίδραση							
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+ - -	a	+	+	-	-	-	-	+	+
- + -	b	+	-	+	-	-	+	-	+
- - +	c	+	-	-	+	+	-	-	+
+ + +	abc	+	+	+	+	+	+	+	+
- - -	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
+ + -	ab	+	+	+	+	-	-	-	-
+ - +	ac	+	+	-	-	+	+	-	-
- + +	bc	+	-	+	-	+	-	+	-

Δύο κλάσματα σχεδιασμού 2^{3-1}

Κύριο κλάσμα
($I = ABC$)



Εναλλακτικό
ή συμπληρωματικό
κλάσμα ($I = -ABC$)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Οι γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων και αλληλοεπιδράσεων είναι:

$$[A] = \frac{1}{2}(a - b - c + abc)$$

$$[BC] = \frac{1}{2}(a - b - c + abc)$$

$$[B] = \frac{1}{2}(-a + b - c + abc)$$

$$[AC] = \frac{1}{2}(-a + b - c + abc)$$

$$[C] = \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)$$

$$[AB] = \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)$$

Είναι αδύνατο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ A και BC, B και AC, και C και AB. Όταν εκτιμάμε τα A, B και C στην πραγματικότητα εκτιμούμε τα A+BC, B+AC και C+AB. Δύο ή περισσότερα επιδράσεις που έχουν αυτή την ιδιότητα, ονομάζονται ταυτόσημες (**aliases**).

$$[A]: A + BC, [B]: B + AC \text{ και } [C]: C + AB.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε στήλη με την ορίζουσα σχέση παίρνουμε τις ταυτόσημες με την επίδραση αυτή.

$$\text{π.χ. } A \cdot I = A \cdot ABC = A^2BC = BC$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Υποθέτουμε ότι επιλέξαμε το άλλο μισό συμπληρωματικό κλάσμα με ορίζουσα σχέση $I = -ABC$, δηλαδή τους συνδυασμούς επεμβάσεων που σχετίζονται με το μείον στη στήλη ABC ((1), ab, ac και bc). Οι γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων και αλληλοεπιδράσεων είναι:

$$\begin{aligned} [A] &= \frac{1}{2}(ab + ac - bc - (1)) & [BC] &= -\frac{1}{2}(ab + ac - bc - (1)) \\ [B] &= \frac{1}{2}(ab - ac + bc - (1)) & [AC] &= -\frac{1}{2}(ab - ac + bc - (1)) \\ [C] &= \frac{1}{2}(-ab + ac + bc - (1)) & [AB] &= -\frac{1}{2}(-ab + ac + bc - (1)) \end{aligned}$$

$$[A] = -[BC], [B] = -[AC] \text{ και } [C] = -[AB]$$

$$[A]' = A - BC$$

$$[B]' = B - AC$$

$$[C]' = C - AB$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Αν εκτελέσουμε και τα δύο κλάσματα, θα έχουμε διαθέσιμους και τους οκτώ συνδυασμούς όπως ένα πλήρες παραγοντικό σχέδιο 2^3 , σε δύο ομάδες των τεσσάρων συνδυασμών. Μπορούσε να εκτιμήσουμε τις επιδράσεις του σχεδιασμού με τους οκτώ συνδυασμούς, προσθέτοντας και αφαιρώντας τους γραμμικούς συνδυασμούς από τα δύο κλάσματα.

$$\frac{1}{2}([A] + [A]') = \frac{1}{2}(A + BC + A - BC) \rightarrow A$$

$$\frac{1}{2}([A] - [A]') = \frac{1}{2}(A + BC - A + BC) \rightarrow BC$$

i	Από $\frac{1}{2}([i] + [i]')$	Από $\frac{1}{2}([i] - [i]')$
A	A	BC
B	B	AC
C	C	AB

Διαχωριστική ικανότητα σχεδιασμού (design resolution)

Η διαχωριστική ικανότητα είναι σημαντική ιδιότητα ενός κλασματικού σχεδιασμού και περιγράφει το βαθμό στον οποίο οι κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες μεταξύ τους.

Ένας κλασματικός σχεδιασμός είναι διαχωριστικής ικανότητας R , όταν καμία επίδραση p -παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από $R - p$ παράγοντες. Κάθε κλασματικός σχεδιασμός έχει διαχωριστική ικανότητα, η οποία συμβολίζεται με ένα δείκτη λατινικού αριθμού και το οποίο είναι το μήκος της μικρότερης επίδρασης της ορίζουσας σχέσης.

Οι σημαντικότερες τάξεις των κλασματικών σχεδιασμών είναι III, IV και V:

1. Διαχωριστική ικανότητα III. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με διπλές αλληλεπιδράσεις. Το μισό κλάσμα του σχεδιασμού 2^3 με τη ορίζουσα σχέση $I = ABC$, είναι ένα σχέδιο τάξης III (2_{III}^{3-1}).

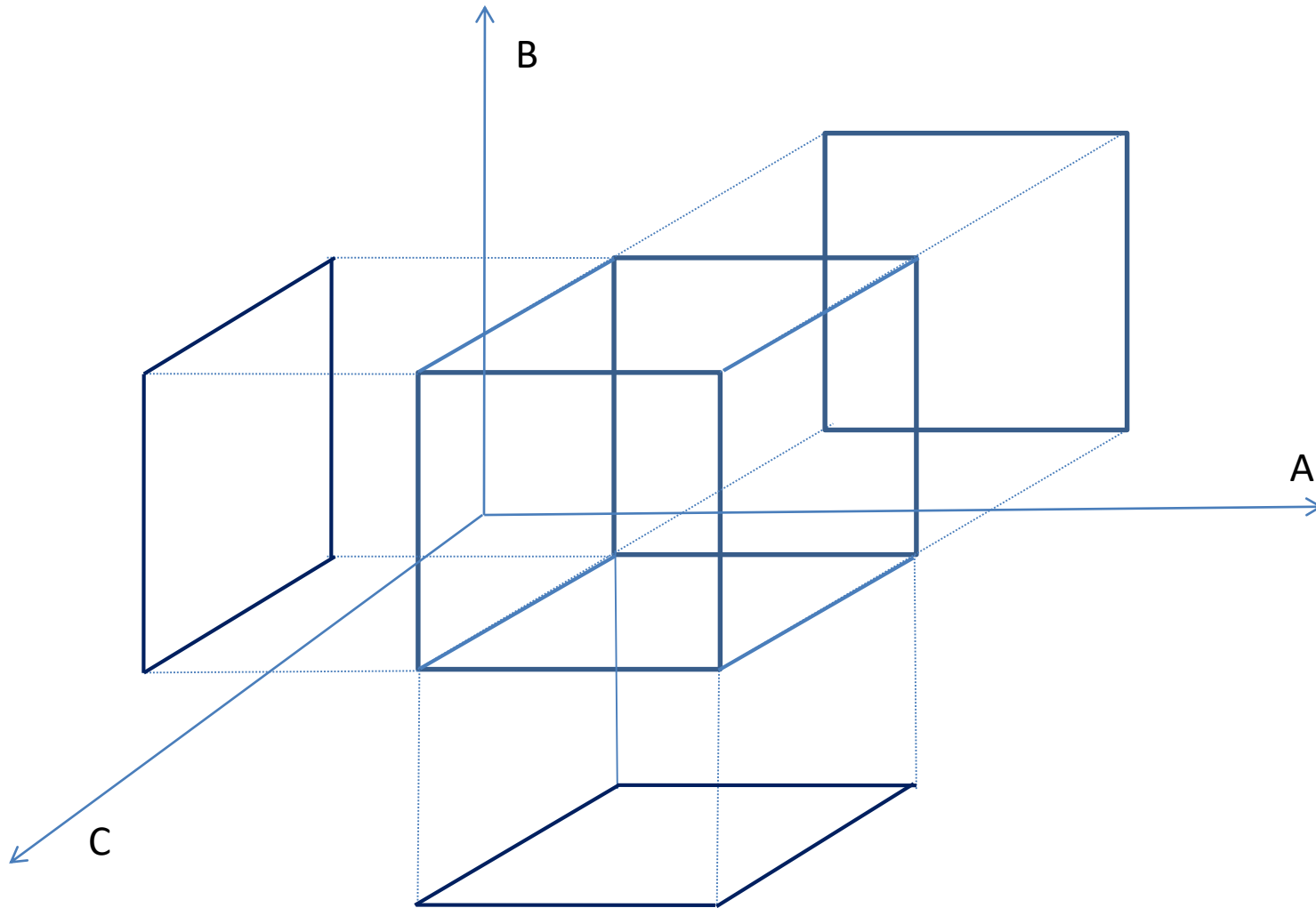
2. Διαχωριστική ικανότητα IV. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, ή με οποιαδήποτε διπλή αλληλεπίδραση, αλλά διπλές αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες με άλλες διπλές αλληλεπιδράσεις.

3. Διαχωριστική ικανότητα V. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση ή διπλές αλληλεπιδράσεις δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή διπλές αλληλεπιδράσεις, αλλά διπλές αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων. κ.ο.κ

Κατασκευή $\frac{1}{2}$ κλάσματος σχεδιασμού 2^3

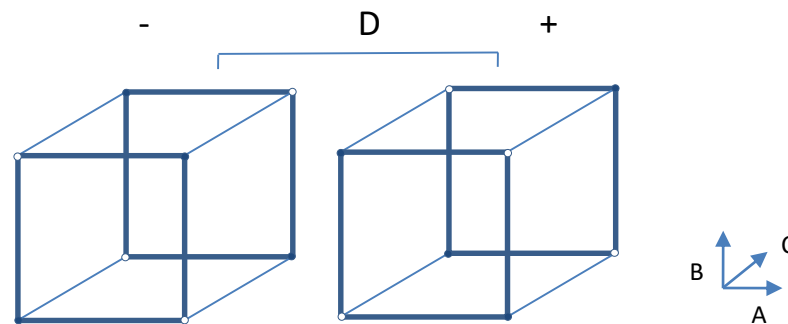
	Πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός 2^2			$2_{III}^{3-1}, I=ABC$				$2_{III}^{3-1}, I=-ABC$			
	A	B		A	B	C = AB		A	B	C = -AB	
1	-	-	(1)	-	-	+	c	-	-	-	(1)
2	+	-	a	+	-	-	a	+	-	+	ac
3	-	+	b	-	+	-	b	-	+	+	bc
4	+	+	ab	+	+	+	abc	+	+	-	ab

Προβολή 2_{III}^{3-1} σχεδιασμού σε τρεις 2^2 σχεδιασμούς



Σχεδιασμός 2_{IV}^{4-1} με ορίζουσα σχέση $I = ABCD$

	Βασικός συνδυασμός	Βασικό σχέδιο			D (=ABC)	I =ABCD	Τελική συνδυασμός	Y
		A	B	C				
1	(1)	-	-	-	-	+	(1)	45
2	a	+	-	-	+	+	ad	100
3	b	-	+	-	+	+	bd	45
4	ab	+	+	-	-	+	ab	65
5	c	-	-	+	+	+	cd	75
6	ac	+	-	+	-	+	ac	60
7	bc	-	+	+	-	+	bc	80
8	abc	+	+	+	+	+	abcd	96



Αλγόριθμός του Yates για το 2_{IV}^{4-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Υ	1	2	3	Επίδραση	Εκτίμηση Επίδρασης $2*(3)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $2*(3)^2/r2^k$
(1)	45	145	255	566	-		
a(d)	100	110	311	76	A + BCD	19	722
b(d)	45	135	75	6	B + ACD	1,5	4,5
ab	65	176	1	-4	AB + CD	-1	2
c(d)	75	55	-35	56	C + ABD	14	392
ac	60	20	41	-74	AC + BD	-18,5	684,5
bc	80	-15	-35	76	BC + AD	19	722
abc(d)	96	16	31	66	ABC + D	16,5	544,5

$$[A] = 1/4 (- 45 + 100 - 45 + 65 - 75 + 60 - 80 + 96) = 19.00 = A + BCD$$

Σχεδιασμός 2_{IV}^{4-1} με ορίζουσα σχέση $I = -ABCD$

	Βασικοί συνδυασμοί	Βασικό σχέδιο			D (= -ABC)	I = -ABCD	Τελικοί συνδυασμοί	Y
		A	B	C				
1	(1)	-	-	-	+	-	d	43
2	a	+	-	-	-	-	a	71
3	b	-	+	-	-	-	b	48
4	ab	+	+	-	+	-	abd	104
5	c	-	-	+	-	-	c	68
6	ac	+	-	+	+	-	acd	86
7	bc	-	+	+	+	-	bcd	70
8	abc	+	+	+	-	-	abc	65

Αλγόριθμος του Yates για το 2_{IV}^{4-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	1	2	3	Επίδραση	Εκτίμηση Επίδρασης $2*(3)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $2*(3)^2/r2^k$
(d)	43	114	266	555	-		
a	71	152	289	97	A - BCD	24,25	1176,125
b	48	154	84	19	B - ACD	4,75	45,125
ab(d)	104	135	13	5	AB - CD	1,25	3,125
c	68	28	38	23	C - ABD	5,75	66,125
ac(d)	86	56	-19	-71	AC - BD	-17,75	630,125
bc(d)	70	18	28	-57	BC - AD	-14,25	406,125
abc	65	-5	-23	-51	ABC - D	-12,75	325,125

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

$2_{IV}^{4-1}, (I=ABCD)$		$2_{IV}^{4-1}, (I=-ABCD)$		2^3 με ανάμειξη (ABCD)			
[i]	Εκτίμηση	[i]'	Εκτίμηση	$\frac{1}{2}([i] + [i]')$		$\frac{1}{2}([i] - [i]')$	
A + BCD	19	A - BCD	24,25	A	21,625	BCD	-2,625
B + ACD	1,5	B - ACD	4,75	B	3,125	ACD	-1,625
AB + CD	-1	AB - CD	1,25	AB	0,125	CD	-1,125
C + ABD	14	C - ABD	5,75	C	9,875	ABD	4,125
AC + BD	-18,5	AC - BD	-17,8	AC	-18,125	BD	-0,375
BC + AD	19	BC - AD	-14,3	BC	2,375	AD	16,625
ABC + D	16,5	ABC - D	-12,75	ABC	1,875	D	14,625

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=FrF2(8, generators = "ABC", randomize = F)
```

```
> summary(design)
```

Call:

```
FrF2(8, 4, randomize = F)
```

Experimental design of type FrF2 8 runs

Factor settings (scale ends):

```
  A B C D
```

```
1 -1 -1 -1 -1
```

```
2  1  1  1  1
```

Design generating information:

```
$legend [1] A=A B=B C=C D=D
```

```
$generators [1] D=ABC
```

```
Alias structure: $fi2 [1] AB=CD AC=BD AD=BC
```

The design itself:

```
  A B C D
```

```
1 -1 -1 -1 -1
```

```
2  1 -1 -1  1
```

```
3 -1  1 -1  1
```

```
4  1  1 -1 -1
```

```
5 -1 -1  1  1
```

```
6  1 -1  1 -1
```

```
7 -1  1  1 -1
```

```
8  1  1  1  1
```

```
class=design, type= FrF2
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(45,100,45,65,75,60,80,96)
```

```
> data=cbind(design, Y)
```

```
> data
```

	A	B	C	D	Y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	1	100
3	-1	1	-1	1	45
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	1	75
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	1	96

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~A*B*C*D, data)
```

```
> aliases(fit)
```

```
A = B:C:D
```

```
B = A:C:D
```

```
C = A:B:D
```

```
D = A:B:C
```

```
A:B = C:D
```

```
A:C = B:D
```

```
B:C = A:D
```

```
> alias(fit)
```

```
Model :
```

```
Y ~ A * B * C * D
```

```
Complete :
```

	(Intercept)	A1	B1	C1	D1	A1:B1	A1:C1	B1:C1
A1:D1	0	0	0	0	0	0	1	
B1:D1	0	0	0	0	0	1	0	
C1:D1	0	0	0	0	1	0	0	
A1:B1:C1	0	0	0	1	0	0	0	
A1:B1:D1	0	0	1	0	0	0	0	
A1:C1:D1	0	0	1	0	0	0	0	
B1:C1:D1	0	1	0	0	0	0	0	
A1:B1:C1:D1	1	0	0	0	0	0	0	

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y ~ A+B+C+D+A*B+A*C+A*D, data = data)
```

```
> summary(fit)
```

Call:

```
lm.default(formula = Y ~ A + B + C + D + A * B + A * C + A *  
D, data = data)
```

Residuals:

ALL 8 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	70.75	NA	NA	NA
A1	9.50	NA	NA	NA
B1	0.75	NA	NA	NA
C1	7.00	NA	NA	NA
D1	8.25	NA	NA	NA
A1:B1	-0.50	NA	NA	NA
A1:C1	-9.25	NA	NA	NA
A1:D1	9.50	NA	NA	NA

Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom

Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: NaN

F-statistic: NaN on 7 and 0 DF, p-value: NA

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	722.0	722.0		
B	1	4.5	4.5		
C	1	392.0	392.0		
D	1	544.5	544.5		
A:B	1	2.0	2.0		
A:C	1	684.5	684.5		
A:D	1	722.0	722.0		
Residuals	0	0.0			

Warning message:

In anova.lm(fit) :

ANOVA F-tests on an essentially perfect fit are unreliable

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=FrF2(8, generators = "-ABC", randomize = F)
```

```
> summary(design)
```

Call:

```
FrF2(8, generators = "-ABC", randomize = F)
```

Experimental design of type FrF2.generators 8 runs

Factor settings (scale ends):

```
  A B C D
```

```
1 -1 -1 -1 -1
```

```
2  1  1  1  1
```

Design generating information:

```
$legend [1] A=A B=B C=C D=D
```

```
$generators [1] D=-ABC
```

```
Alias structure: $fi2[1] AB=-CD AC=-BD AD=-BC
```

The design itself:

```
  A B C D
```

```
1 -1 -1 -1  1
```

```
2  1 -1 -1 -1
```

```
3 -1  1 -1 -1
```

```
4  1  1 -1  1
```

```
5 -1 -1  1 -1
```

```
6  1 -1  1  1
```

```
7 -1  1  1  1
```

```
8  1  1  1 -1
```

```
class=design, type= FrF2.generators
```


Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(43,71,48,104,68,86,70,65)
```

```
> data=cbind(design, Y)
```

```
> data
```

	A	B	C	D	Y
1	-1	-1	-1	1	43
2	1	-1	-1	-1	71
3	-1	1	-1	-1	48
4	1	1	-1	1	104
5	-1	-1	1	-1	68
6	1	-1	1	1	86
7	-1	1	1	1	70
8	1	1	1	-1	65

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y ~ A+B+C+D+A*B+A*C+A*D, data = data)
```

```
> summary(fit)
```

Call:

```
lm.default(formula = Y ~ A + B + C + D + A * B + A * C + A * D, data = data)
```

Residuals:

ALL 8 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	69.375	NA	NA	NA
A1	12.125	NA	NA	NA
B1	2.375	NA	NA	NA
C1	2.875	NA	NA	NA
D1	6.375	NA	NA	NA
A1:B1	0.625	NA	NA	NA
A1:C1	-8.875	NA	NA	NA
A1:D1	7.125	NA	NA	NA

Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom

Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: NaN

F-statistic: NaN on 7 and 0 DF, p-value: NA

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> anova(fit)
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: Y
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	1176.13	1176.13		
B	1	45.13	45.13		
C	1	66.13	66.13		
D	1	325.12	325.12		
A:B	1	3.12	3.12		
A:C	1	630.13	630.13		
A:D	1	406.13	406.13		

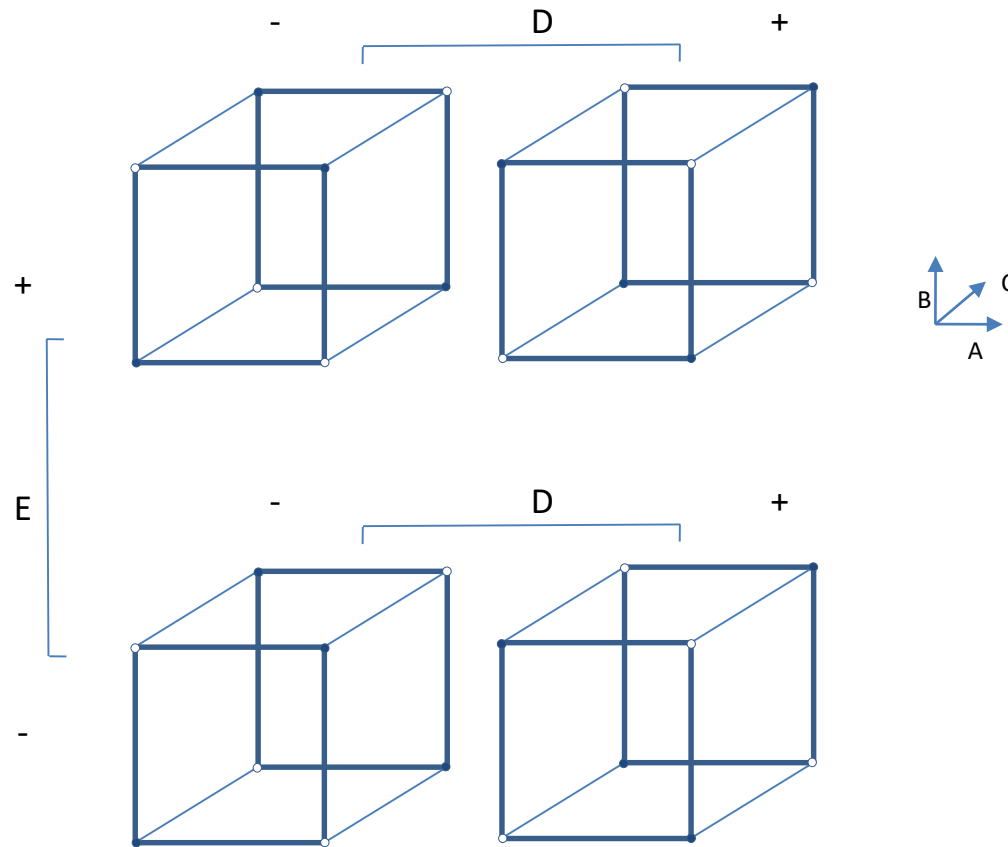
```
Residuals 0 0.00
```

```
Warning message:
```

```
In anova.lm(fit) :
```

```
ANOVA F-tests on an essentially perfect fit are unreliable
```


Σχεδιασμός 2_V^{5-1} , με οριζουσα σχέση $I = ABCDE$



Αλγόριθμος του Yates για το 2_v^{5-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Υ	1	2	3	4	Εκτίμηση Επίδρασης $2*(4)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $2*(4)^2/r2^k$	
(e)	8	17	103	246	485			
a	9	86	143	239	89	11,125	495,06	A + BCDE
b	34	38	96	40	271	33,875	4590,06	B + ACDE
ab(e)	52	105	143	49	55	6,875	189,06	AB + CDE
c	16	16	19	136	87	10,875	473,06	C + ABDE
ac(e)	22	80	21	135	3	0,375	0,56	AC + BDE
bc(e)	45	36	24	26	5	0,625	1,56	BC + ADE
abc	60	107	25	29	-11	-1,375	7,56	ABC + DE
d	6	1	69	40	-7	-0,875	3,06	D + ABCE
ad(e)	10	18	67	47	9	1,125	5,06	AD + BCE
bd(e)	30	6	64	2	-1	-0,125	0,06	BD + ACE
abd	50	15	71	1	3	0,375	0,56	ABD + CE
cd(e)	15	4	17	-2	7	0,875	3,06	CD + ABE
acd	21	20	9	7	-1	-0,125	0,06	ACD + BE
bcd	44	6	16	-8	9	1,125	5,06	BCD + AE
abcd(e)	63	19	13	-3	5	0,625	1,56	ABCD + E

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design = FrF2(16,5, randomize = F)
> design = FrF2(nfactors=5, resolution=5, randomize = F)
> design = FrF2(16, generators = "ABCD", randomize = F)
> summary(design)
$generators [1] E=ABCD
Alias structure: [[1]] [1] no aliasing among main effects and 2fis
  A B C D E
1 -1 -1 -1 -1 1
2  1 -1 -1 -1 -1
3 -1  1 -1 -1 -1
4  1  1 -1 -1  1
5 -1 -1  1 -1 -1
6  1 -1  1 -1  1
7 -1  1  1 -1  1
8  1  1  1 -1 -1
9 -1 -1 -1  1 -1
10 1 -1 -1  1  1
11 -1  1 -1  1  1
12 1  1 -1  1 -1
13 -1 -1  1  1  1
14 1 -1  1  1 -1
15 -1  1  1  1 -1
16 1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2.generators
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(8,9,34,52,16,22,45,60,6,10,30,50,15,21,44,63)
```

```
> data=cbind(design, Y)
```

```
> data
```

	A	B	C	D	E	Y
1	-1	-1	-1	-1	1	8
2	1	-1	-1	-1	-1	9
3	-1	1	-1	-1	-1	34
4	1	1	-1	-1	1	52
5	-1	-1	1	-1	-1	16
6	1	-1	1	-1	1	22
7	-1	1	1	-1	1	45
8	1	1	1	-1	-1	60
9	-1	-1	-1	1	-1	6
10	1	-1	-1	1	1	10
11	-1	1	-1	1	1	30
12	1	1	-1	1	-1	50
13	-1	-1	1	1	1	15
14	1	-1	1	1	-1	21
15	-1	1	1	1	-1	44
16	1	1	1	1	1	63

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E)^4, data=data)
```

```
> aliases(fit)
```

A = B:C:D:E

B = A:C:D:E

C = A:B:D:E

D = A:B:C:E

E = A:B:C:D

A:B = C:D:E

A:C = B:D:E

A:D = B:C:E

A:E = B:C:D

B:C = A:D:E

B:D = A:C:E

B:E = A:C:D

C:D = A:B:E

C:E = A:B:D

D:E = A:B:C

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E)^2, data=data)
```

```
> summary(fit)
```

```
Call: lm.default(formula = Y ~ (A + B + C + D + E)^2, data = data)
```

```
Residuals: ALL 16 residuals are 0: no residual degrees of freedom!
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	30.3125	NA	NA	NA
A1	5.5625	NA	NA	NA
B1	16.9375	NA	NA	NA
C1	5.4375	NA	NA	NA
D1	-0.4375	NA	NA	NA
E1	0.3125	NA	NA	NA
A1:B1	3.4375	NA	NA	NA
A1:C1	0.1875	NA	NA	NA
A1:D1	0.5625	NA	NA	NA
A1:E1	0.5625	NA	NA	NA
B1:C1	0.3125	NA	NA	NA
B1:D1	-0.0625	NA	NA	NA
B1:E1	-0.0625	NA	NA	NA
C1:D1	0.4375	NA	NA	NA
C1:E1	0.1875	NA	NA	NA
D1:E1	-0.6875	NA	NA	NA

```
Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: NaN
```

```
F-statistic: NaN on 15 and 0 DF, p-value: NA
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y

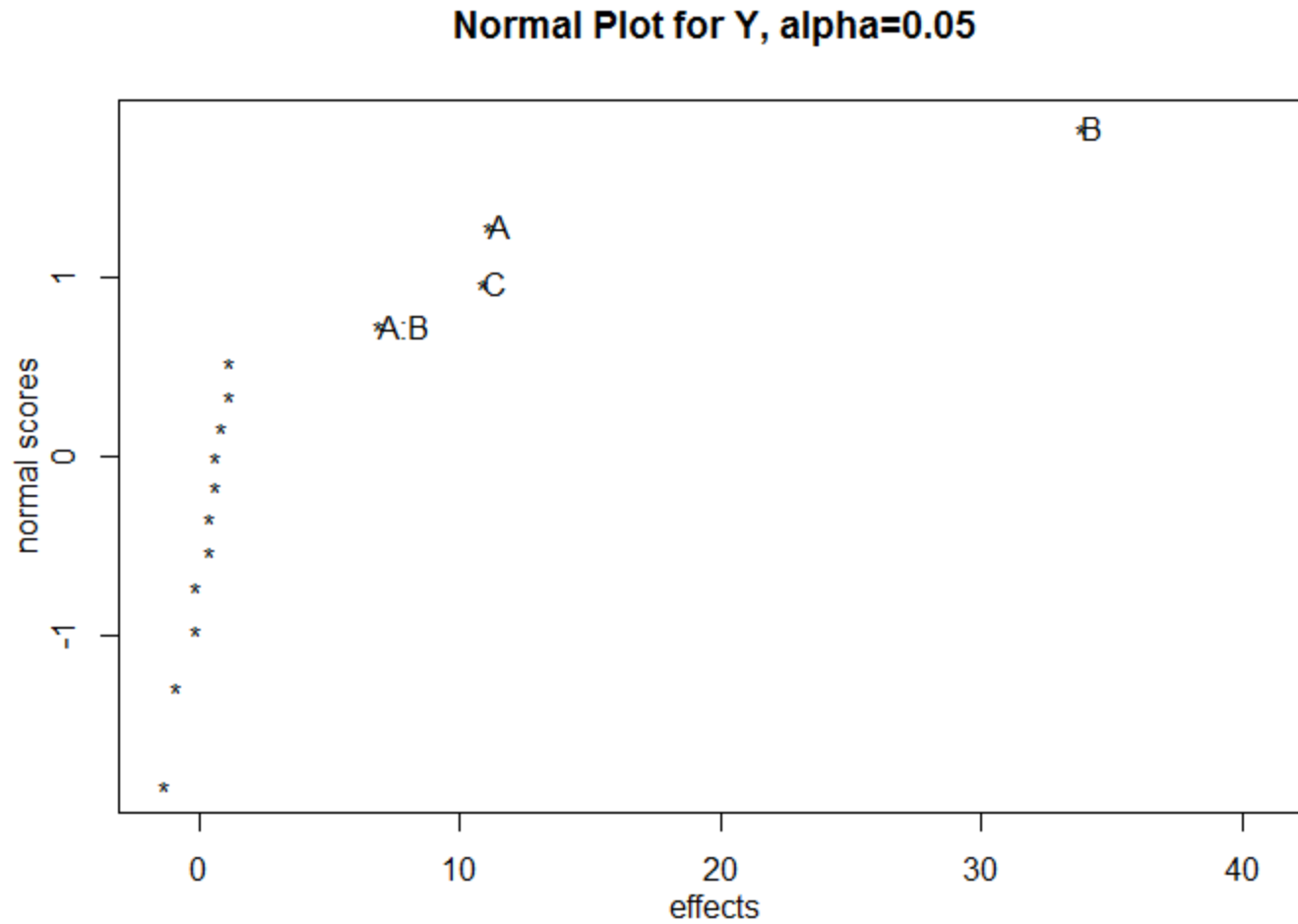
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	495.1	495.1		
B	1	4590.1	4590.1		
C	1	473.1	473.1		
D	1	3.1	3.1		
E	1	1.6	1.6		
A:B	1	189.1	189.1		
A:C	1	0.6	0.6		
A:D	1	5.1	5.1		
A:E	1	5.1	5.1		
B:C	1	1.6	1.6		
B:D	1	0.1	0.1		
B:E	1	0.1	0.1		
C:D	1	3.1	3.1		
C:E	1	0.6	0.6		
D:E	1	7.6	7.6		
Residuals	0	0.0			

Warning message:

In anova.lm(fit) :

ANOVA F-tests on an essentially perfect fit are unreliable

> DanielPlot(fit)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~A+B+C+A*B, data=data)
```

```
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	495.1	495.1	193.195	2.535e-08	***
B	1	4590.1	4590.1	1791.244	1.560e-13	***
C	1	473.1	473.1	184.610	3.214e-08	***
A:B	1	189.1	189.1	73.781	3.302e-06	***
Residuals	11	28.2	2.6			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας	Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας	Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας
3	2_{III}^{3-1}	4	C =± AB		2_{III}^{9-5}	16	E =± ABC	12	2_{III}^{12-8}	16	L =± AC
4	2_{IV}^{4-1}	8	D =± ABC				F =± BCD				E =± ABC
5	2_V^{5-1}	16	E =± ABCD				G =± ACD				F =± ABD
	2_{III}^{5-2}	8	D =± AB				H =± ABD				G =± ACD
			E =± AC				J =± ABCD				H =± BCD
6	2_{VI}^{6-1}	32	F =± ABCDE		2_V^{10-3}	12	H =± ABCG				J =± ABCD
	2_{IV}^{6-2}	16	E =± ABC				J =± BCDE				K =± AB
			F =± BCD				K =± ACDF				L =± AC
	2_{III}^{6-3}	8	D =± AB	10	2_{IV}^{10-4}	64	G =± BCDF				M =± AD
			E =± AC				H =± ACDF	13	2_{III}^{13-9}	16	E =± ABC
			F =± BC				J =± ABDE				F =± ABD
7	2_{VII}^{7-1}	64	G =± ABCDEF				K =± ABCE				G =± ACD
	2_{IV}^{7-2}	32	F =± ABCD		2_{IV}^{10-5}	32	F =± ABCD				H =± BCD
			G =± ABDE				G =± ABC E				J =± ABCD
	2_{IV}^{7-3}	16	E =± ABC				H =± ABDE				K =± AB
			F =± BCD				J =± ACDE				L =± AC
			G =± ACD				K =± BCDE				A =± AD
	2_{III}^{7-4}	8	D =± AB		2_{III}^{10-6}	16	E =± ABC				N =± BC
			E =± AC				F =± BCD	14	2_{III}^{14-10}	16	E =± ABC
			F =± BC				G =± ACD				F =± ABD
			G =± ABC				H =± ABD				G =± ACD
8	2_V^{8-2}	64	G =± ABCD				J =± ABCD				H =± BCD
			H =± ABEF	11			K =± AB				J =± ABCD
	2_{IV}^{8-3}	32	F =± ABC		2_{IV}^{11-5}	64	G =± CDE				K =± AB
			G =± ABD				H =± ABCD				L =± AC
			H =± BCDE				J =± ABF				A =± AD
	2_{IV}^{8-4}	16	E =± BCD				K =± BDEF				N =± BC
			F =± ACD				L =± ADEF				O =± BD
			G =± ABC		2_{IV}^{11-6}	32	F =± ABC	15	2_{III}^{15-11}	16	E =± ABC
			H =± ABD				G =± BCD				F =± ABD
9	2_{VI}^{9-2}	128	H =± ACDFG				H =± CDE				G =± ACD
			J =± BCEFG				J =± ACD				H =± BCD
	2_{IV}^{9-3}	64	G =± ABCD				K =± ADE				J =± ABCD
			H =± ACEF				L =± BDE				K =± AB
			J =± CDEF		2_{III}^{11-7}	16	E =± ABC				L =± AC
	2_{IV}^{9-4}	32	F =± BCDE				F =± BCD				M =± AD
			G =± ACDE				G =± ACD				N =± BC
			H =± ABDE				H =± ABD				O =± BD
			J =± ABCE				J =± ABCD				P =± CD
							K =± AB				

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

$\frac{1}{4}$ Σχεδιασμός 2^6 (2_{IV}^{6-2}), με ορίζουσες σχέσεις $I = ABCE$ και $I = BCDF$

	Βασικοί συνδυασμοί	Βασικό σχέδιο				E = ABC	F = BCD	Τελικοί συνδυασμοί	Y
		A	B	C	D				
1	(1)	-	-	-	-	-	(1)	6	
2	a	+	-	-	-	+	ae	10	
3	b	-	+	-	-	+	bef	32	
4	ab	+	+	-	-	-	abf	60	
5	c	-	-	+	-	+	cef	4	
6	ac	+	-	+	-	-	acf	15	
7	bc	-	+	+	-	-	bc	26	
8	abc	+	+	+	-	+	abce	60	
9	d	-	-	-	+	-	df	8	
10	ad	+	-	-	+	+	adef	12	
11	bd	-	+	-	+	+	bde	34	
12	abd	+	+	-	+	-	abd	60	
13	cd	-	+	+	+	+	cde	16	
14	acd	+	+	+	+	-	acd	5	
15	bcd	-	-	+	+	-	bcdf	37	
16	abcd	+	-	+	+	+	abcdef	52	

Αλγόριθμος του Yates για το 2_{IV}^{6-2} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	1	2	3	4	Εκτίμηση Επίδρασης $4*(4)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $4*(4)^2/r2^k$
(1)	6	16	108	213	437		
ae	10	92	105	224	111	13,875	770,06
bef	32	19	114	77	285	35,625	5076,56
abf	60	86	110	34	95	11,875	564,06
cef	4	20	32	143	-7	-0,875	3,06
acf	15	94	45	142	-13	-1,625	10,56
bc	26	21	30	47	-15	-1,875	14,06
abce	60	89	4	48	3	0,375	0,56
df	8	4	76	-3	11	1,375	7,56
adef	12	28	67	-4	-43	-5,375	115,56
bd	34	11	74	13	-1	-0,125	0,06
abd	60	34	68	-26	1	0,125	0,06
cde	16	4	24	-9	-1	-0,125	0,06
acd	5	26	23	-6	-39	-4,875	95,06
bcdf	37	-11	22	-1	3	0,375	0,56
abcdef	52	15	26	4	5	0,625	1,56

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=FrF2(16, generators = c("ABC","BCD"), randomize = F)
```

```
> design
```

	A	B	C	D	E	F
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1	1	-1
3	-1	1	-1	-1	1	1
4	1	1	-1	-1	-1	1
5	-1	-1	1	-1	1	1
6	1	-1	1	-1	-1	1
7	-1	1	1	-1	-1	-1
8	1	1	1	-1	1	-1
9	-1	-1	-1	1	-1	1
10	1	-1	-1	1	1	1
11	-1	1	-1	1	1	-1
12	1	1	-1	1	-1	-1
13	-1	-1	1	1	1	-1
14	1	-1	1	1	-1	-1
15	-1	1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1

```
class=design, type= FrF2.generators
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(6,10,32,60,4,15,26,60,8,12,34,60,16,5,37,52)
```

```
> data=cbind(design, Y)
```

```
> data
```

	A	B	C	D	E	F	Y
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	6
2	1	-1	-1	-1	1	-1	10
3	-1	1	-1	-1	1	1	32
4	1	1	-1	-1	-1	1	60
5	-1	-1	1	-1	1	1	4
6	1	-1	1	-1	-1	1	15
7	-1	1	1	-1	-1	-1	26
8	1	1	1	-1	1	-1	60
9	-1	-1	-1	1	-1	1	8
10	1	-1	-1	1	1	1	12
11	-1	1	-1	1	1	-1	34
12	1	1	-1	1	-1	-1	60
13	-1	-1	1	1	1	-1	16
14	1	-1	1	1	-1	-1	5
15	-1	1	1	1	-1	1	37
16	1	1	1	1	1	1	52

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~A*B*C*D*E*F, data)
```

```
> aliases(fit)
```

A = B:C:E = D:E:F = A:B:C:D:F

B = A:C:E = C:D:F = A:B:D:E:F

C = A:B:E = B:D:F = A:C:D:E:F

D = B:C:F = A:E:F = A:B:C:D:E

E = A:D:F = B:C:D:E:F = A:B:C

F = B:C:D = A:D:E = A:B:C:E:F

A:B = A:C:D:F = B:D:E:F = C:E

A:C = A:B:D:F = C:D:E:F = B:E

B:C = A:B:C:D:E:F = A:E = D:F

A:D = B:C:D:E = A:B:C:F = E:F

B:D = A:C:D:E = A:B:E:F = C:F

C:D = A:B:D:E = A:C:E:F = B:F

D:E = A:B:C:D = B:C:E:F = A:F

A:B:D = C:D:E = A:C:F = B:E:F

A:C:D = B:D:E = A:B:F = C:E:F

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> summary(fit)

Call:

lm.default(formula = Y ~ A * B * C * D * E * F, data = data)

Residuals:

ALL 16 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients: (48 not defined because of singularities)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	27.3125	NA	NA	NA
A1	6.9375	NA	NA	NA
B1	17.8125	NA	NA	NA
C1	-0.4375	NA	NA	NA
D1	0.6875	NA	NA	NA
E1	0.1875	NA	NA	NA
F1	0.1875	NA	NA	NA
A1:B1	5.9375	NA	NA	NA
A1:C1	-0.8125	NA	NA	NA
B1:C1	-0.9375	NA	NA	NA
A1:D1	-2.6875	NA	NA	NA
B1:D1	-0.0625	NA	NA	NA
C1:D1	-0.0625	NA	NA	NA
D1:E1	0.3125	NA	NA	NA
A1:B1:D1	0.0625	NA	NA	NA
A1:C1:D1	-2.4375	NA	NA	NA

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y

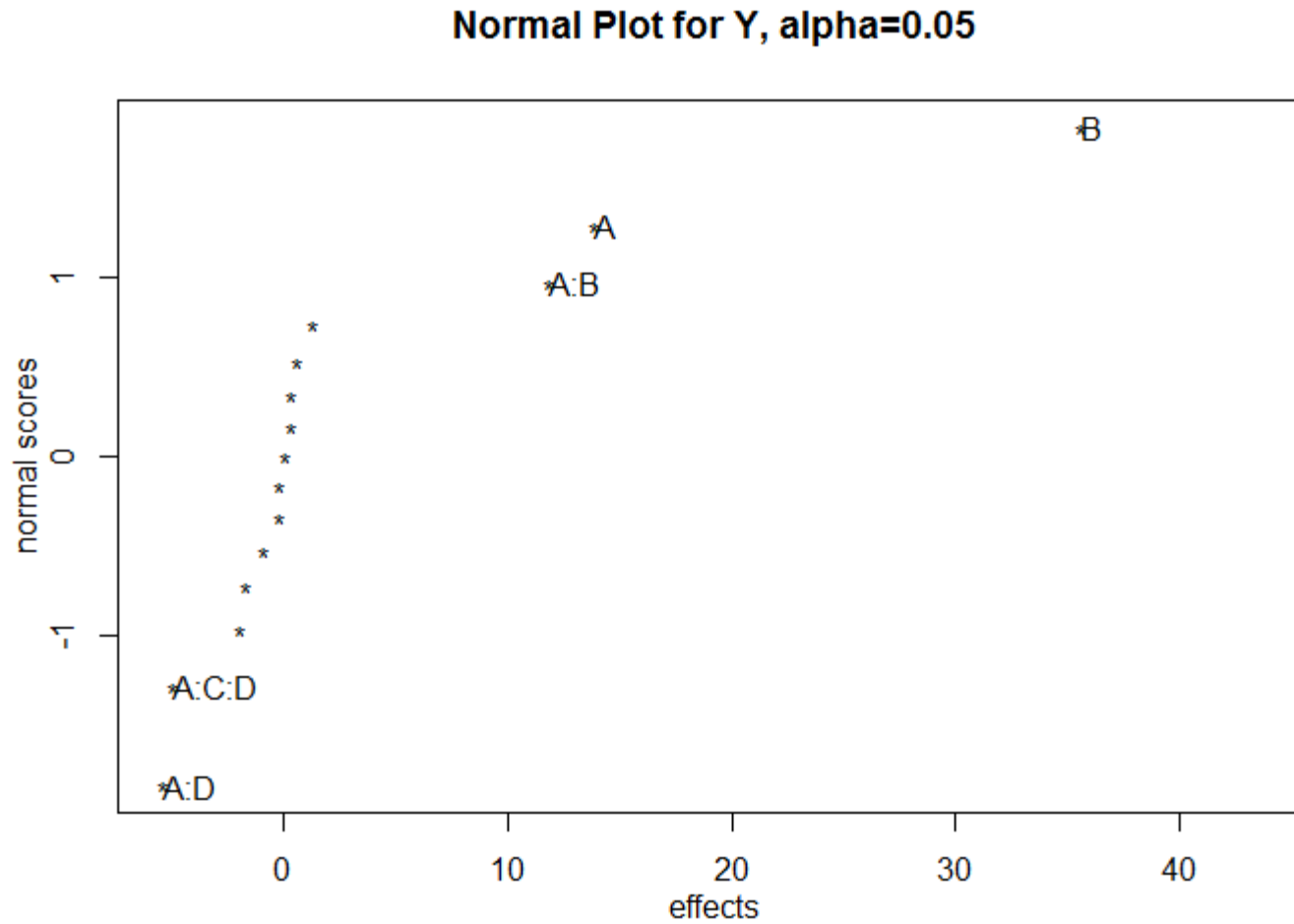
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	770.1	770.1		
B	1	5076.6	5076.6		
C	1	3.1	3.1		
D	1	7.6	7.6		
E	1	0.6	0.6		
F	1	0.6	0.6		
A:B	1	564.1	564.1		
A:C	1	10.6	10.6		
B:C	1	14.1	14.1		
A:D	1	115.6	115.6		
B:D	1	0.1	0.1		
C:D	1	0.1	0.1		
D:E	1	1.6	1.6		
A:B:D	1	0.1	0.1		
A:C:D	1	95.1	95.1		
Residuals	0	0.0			

Warning message:

In anova.lm(fit) :

ANOVA F-tests on an essentially perfect fit are unreliable

> DanielPlot(fit)



Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί σε ομάδες

Όταν ένας κλασματικός σχεδιασμός απαιτεί πολλές εκτελέσεις που δεν μπορούν να γίνουν σε ομοιογενείς συνθήκες, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνική της ανάμειξης.

Σε ένα κλασματικό σχεδιασμό 2_{IV}^{6-2} με ορίζουσες σχέσεις $I = ABCE = BCDF = ADEF$ (γεννήτορες $E = ABC$ και $F = BCD$), δημιουργούμε δύο ομάδες των οκτώ συνδυασμών, με την ανάμειξη μία από τις επιδράσεις ABD, CDE, ACF και BEF .

Ομάδα 1	Ομάδα 2
(1)	ae
abf	acf
cef	bef
abce	bc
adef	df
bde	abd
acd	cde
bcdf	abcdef

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> FrF2(16, 6, generators=c("ABC", "BCD"), blocks=c("CDE"), alias.block.2fis=TRUE, randomize=F)

run.no	run.no.std.rp	Blocks	A	B	C	D	E	F
1	1	1.1.1	1	-1	-1	-1	-1	-1
2	2	3.1.2	1	-1	-1	1	-1	1
3	3	6.1.3	1	-1	1	-1	1	-1
4	4	8.1.4	1	-1	1	1	1	-1
5	5	10.1.5	1	1	-1	-1	1	1
6	6	12.1.6	1	1	-1	1	1	-1
7	7	13.1.7	1	1	1	-1	-1	-1
8	8	15.1.8	1	1	1	1	-1	1

run.no	run.no.std.rp	Blocks	A	B	C	D	E	F
9	9	2.2.1	2	-1	-1	-1	1	-1
10	10	4.2.2	2	-1	-1	1	1	1
11	11	5.2.3	2	-1	1	-1	-1	1
12	12	7.2.4	2	-1	1	1	-1	-1
13	13	9.2.5	2	1	-1	-1	-1	1
14	14	11.2.6	2	1	-1	1	-1	-1
15	15	14.2.7	2	1	1	-1	1	-1
16	16	16.2.8	2	1	1	1	1	1

class=design, type= FrF2.blocked

NOTE: columns run.no and run.no.std.rp are annotation, not part of the data frame

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός 2_{IV}^{8-3} σε τέσσερις ομάδες

> FrF2(32, 8, generators=c("ABC", "ABD", "BCDE"), blocks=c("ABC", "EH"), alias.block.2fis=TRUE, randomize=F)

run.no	run.no	std.rp	Blocks	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1.1.1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
2	2	2.1.2	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1
3	3	13.1.3	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
4	4	14.1.4	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
5	5	23.1.5	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
6	6	24.1.6	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
7	7	27.1.7	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
8	8	28.1.8	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1

run.no	run.no	std.rp	Blocks	A	B	C	D	E	F	G	H
9	9	3.2.1	2	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
10	10	4.2.2	2	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
11	11	15.2.3	2	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
12	12	16.2.4	2	-1	1	1	1	1	-1	-1	1
13	13	21.2.5	2	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
14	14	22.2.6	2	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
15	15	25.2.7	2	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
16	16	26.2.8	2	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

run.no	run.no.std	rp	Blocks	A	B	C	D	E	F	G	H
17	17	7.3.1	3	-1	-1	1	1	-1	1	1	1
18	18	8.3.2	3	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
19	19	11.3.3	3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
20	20	12.3.4	3	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
21	21	17.3.5	3	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
22	22	18.3.6	3	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
23	23	29.3.7	3	1	1	1	-1	-1	1	-1	1
24	24	30.3.8	3	1	1	1	-1	1	1	-1	-1

run.no	run.no.std	rp	Blocks	A	B	C	D	E	F	G	H
25	25	5.4.1	4	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
26	26	6.4.2	4	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1
27	27	9.4.3	4	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
28	28	10.4.4	4	-1	1	-1	-1	1	1	1	1
29	29	19.4.5	4	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
30	30	20.4.6	4	1	-1	-1	1	1	1	-1	1
31	31	31.4.7	4	1	1	1	1	-1	1	1	-1
32	32	32.4.8	4	1	1	1	1	1	1	1	1

class=design, type= FrF2.blocked

NOTE: columns run.no and run.no.std.rp are annotation, not part of the data frame

Σχεδιασμός Plackett–Burman

Οι σχεδιασμοί Plackett-Burman είναι μία ειδική κατηγορία ορθογώνιων σχεδιασμών που εξετάζουν $k = N - 1$ μεταβλητές σε N εκτελέσεις. Δημιουργούν σχεδιασμούς με αριθμό εκτελέσεων ενδιάμεσους από αυτούς που σχηματίζονται με τους κλασματικούς σχεδιασμούς.

Ο αριθμός των εκτελέσεων είναι πολλαπλάσιο του 4 (12, 20, 24, 28, 36,...) και αναφέρονται ως μη-γεωμετρικοί σχεδιασμοί (**nongeometric designs**). Αν το N είναι δύναμη του 2 (π.χ. 8, 16, 32, 64) οι σχεδιασμοί είναι ταυτόσημοι με τους 2^{k-p} κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς.

Οι σχεδιασμοί Plackett-Burman έχουν σύνθετες ταυτόσημες επιδράσεις. Για παράδειγμα στο $N=12$, κάθε κύρια επίδραση είναι μερικώς ταυτόσημη με όλες τις διπλές αλληλεπιδράσεις.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> pb(12,randomize=FALSE)
```

```
  A B C D E F G H J K L  
1  1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1  
2 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1  
3  1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1  
4 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1  
5 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1  
6 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1  
7  1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1  
8  1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1  
9  1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1  
10 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1  
11 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1  
12 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  
class=design, type= pb
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=rnorm(12)
> design=pb(12,randomize=FALSE)
> data=cbind(design,Y)
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E+F+G+H+J+K+L)^2,data)
> alias(fit)
```

Model :

```
Y ~ (A + B + C + D + E + F + G + H + J + K + L)^2
```

Complete :

	(Intercept)	A1	B1	C1	D1	E1	F1	G1	H1	J1	K1	L1
A1:B1	0	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	-1/3
A1:C1	0	0	-1/3	0	1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	1/3	-1/3	-1/3
A1:D1	0	0	-1/3	1/3	0	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3
A1:E1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	0	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
A1:F1	0	0	1/3	-1/3	1/3	-1/3	0	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3
A1:G1	0	0	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3	0	1/3	-1/3	1/3	-1/3
A1:H1	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	0	-1/3	-1/3	1/3
A1:J1	0	0	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	0	-1/3	1/3
A1:K1	0	0	1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	0	-1/3
A1:L1	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	-1/3	0
B1:C1	0	-1/3	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
B1:D1	0	-1/3	0	-1/3	0	1/3	-1/3	-1/3	1/3	-1/3	1/3	-1/3
B1:E1	0	-1/3	0	-1/3	1/3	0	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3

.....