ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Συσχέτιση - Συμμεταβολή

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2017

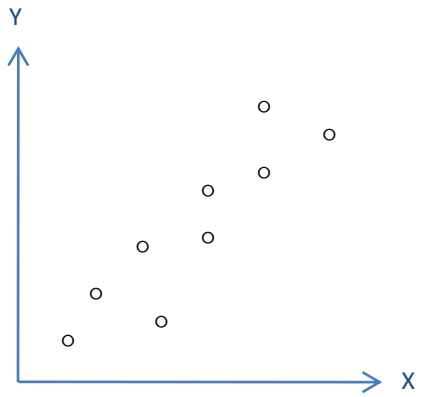
## ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Με την ανάλυση της συσχέτισης, μελετάται η ένταση (ή βαθμός) της σχέσης των δύο μεταβλητών ανεξάρτητα από την ύπαρξη σχέσης αιτίου-αποτελέσματος μεταξύ τους

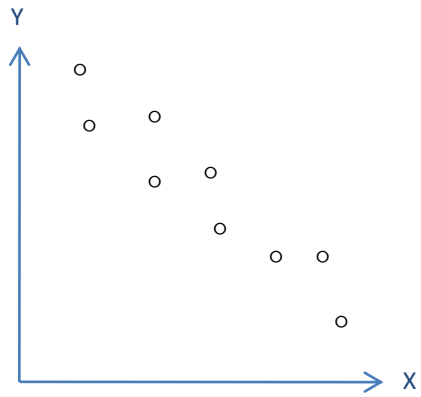
Για να εκτιμήσουμε την ένταση και την κατεύθυνσης της σχέσης αυτής, υπολογίζουμε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης Pearson's r.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson (r) κυμαίνεται από -1 έως 1 και είναι ανεξάρτητο από τις μονάδες μέτρησης. Ο βαθμός της σχέσης αυξάνεται όσο το r πλησιάζει την απόλυτη τιμή 1 ενώ τιμές κοντά στο μηδέν υποδεικνύει απουσία σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

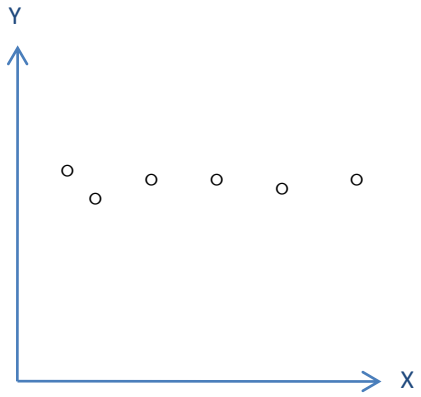
# Πειραματικοί Σχεδιασμοί



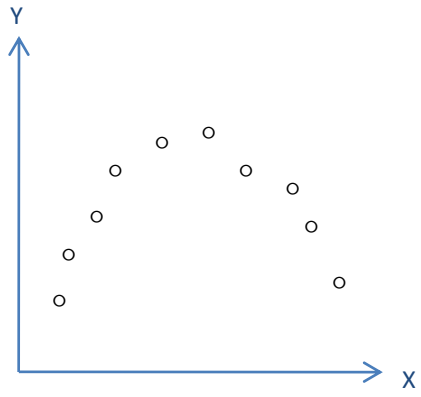

r ≈ 1



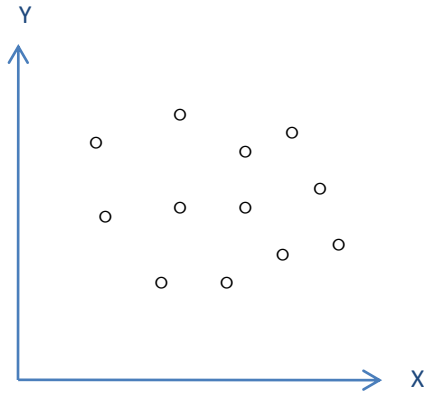

r ≈ - 1




r = 0




r = 0




r = 0

Προσδιορισμός της σχέσης δύο μεταβλητών:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \, s_y}$$

Όπου:

$$s_{xy} = Cov(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)(Y_i - \overline{Y}.)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)^2 \qquad s_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}.)^2$$

οπότε

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)(Y_i - \overline{Y}.)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)^2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}.)^2}}$$

Προσδιορισμός της σχέσης δύο μεταβλητών:

$$r = \frac{\text{ΑΓ}_{XY}}{\sqrt{\text{ΑΤ}_x \, \text{ΑΤ}_Y}}$$

Όπου:

$$\text{ΑΓ}_{XY} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}.)(Y_i - \overline{Y}.) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i)\sum_{i=1}^{n}(Y_i)}{n}$$

$$\text{ΑΤ}_x = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}.)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}$$

$$\text{ΑΤ}_Y = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}.)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}$$

**Παράδειγμα:** Έλαια Χ και πρωτεΐνη Υ

| X | Y | XY |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 9 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 8 | 24 |
| 3 | 4 | 12 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 3 | 15 |
| 5 | 2 | 10 |
| 6 | 3 | 18 |
| ΣX = 29 | ΣY = 40 | ΣXY = 120 |
| $\Sigma X^2$ = 125 | $\Sigma Y^2$ = 244 | n = 8 |

$$\text{ΑΓ}_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i)\sum_{i=1}^{n}(Y_i)}{n} = 120 - \frac{29*40}{8} = -25$$

$$\text{AT}_x = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n} = 125 - \frac{29^2}{8} = 19{,}875$$

$$\text{AT}_Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} = 244 - \frac{40^2}{8} = 44$$

$$r = \frac{\text{ΑΓ}_{XY}}{\sqrt{\text{AT}_x\ \text{AT}_Y}} = \frac{-25}{\sqrt{19{,}875*44}} = -0{,}845$$

**Έλεγχος σημαντικότητας του συντελεστή συσχέτισης r**

Μηδενική υπόθεση $H_0$: $r = 0$ και εναλλακτική $H_1$: $r \neq 0$

Α. Χρήση πινάκων ελέγχου σημαντικότητας του συντελεστή συσχέτισης r

Οι κρίσιμες τιμές των πινάκων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον αριθμό των παρατηρήσεων n, όσο το n αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του πίνακα για το r μειώνεται και είναι πιθανό να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση. Η κρίσιμη τιμή του σχετικού πίνακα για τον συντελεστή συσχέτισης r με ΒΕ = n–2 = 8–2 = 6 και για α = 0,05 είναι 0,755.

Επειδή η τιμή που υπολογίσθηκε - 0,845 είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή του πίνακα, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Επομένως υπάρχει στατιστικά σημαντική αρνητική σχέση μεταξύ των μεταβλητών Χ και Υ.

Β. Έλεγχος σημαντικότητας με την δοκιμασία του t

$$t_r = \frac{(r - 0)}{\sqrt{(1 - r^2)/(n - 2)}}$$

$$t_r = \frac{(0{,}845 - 0)}{\sqrt{(1 - 0{,}845^{\,2})/(8 - 2)}} = 3{,}8769$$

Η κρίσιμη τιμή του πίνακα t με ΒΕ= n–2= 8–2= 6 και για α = 0,05 είναι 2,44. Επειδή η τιμή που υπολογίσθηκε είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

Γ. Για μεγάλο αριθμό ζευγών παρατηρήσεων n (n > 50) χρησιμοποιείται η μετατροπή του z**.**

$$z = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r}{1-r}\right]$$

Η δοκιμασία είναι η εξής:

$$t_s = \frac{z - 0}{T\Sigma_z} = z\sqrt{n - 3}$$

όπου το τυπικό σφάλμα:

$$T\Sigma z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

και συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή των πινάκων του *t* για ΒΕ = ∞

## Όρια εμπιστοσύνης συντελεστή συσχέτιση

Για να υπολογιστούν τα όρια εμπιστοσύνης μετατρέπουμε το r σε z, υπολογίζουμε τα όρια εμπιστοσύνης του z και μετά τα μετατρέπουμε στην κλίμακα του r.

$$\alpha = 0{,}05 \qquad r = -0{,}845 \qquad z = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r}{1-r}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+(-0{,}845)}{1-(-0{,}845)}\right] = -1{,}238$$

$$KO = z - t_{(a,\infty)}\Sigma z = -1{,}238 - 1{,}96(1/\sqrt{5}) = -2{,}16$$

$$AO = z + t_{(a,\infty)}\Sigma z = -1{,}238 + 1{,}96(1/\sqrt{5}) = -0{,}36$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετατροπής των τιμών z σε κλίμακα r:

$$KO \cong -0{,}97 \qquad \text{και} \qquad AO \cong -0{,}35$$

```
> attach(Pearson)
> cor.test(X, Y, method = c("pearson"))

Pearson's product-moment correlation

data:  X and Y
t = -3.8769, df = 6, p-value = 0.0082
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.9713868  -0.3480893
sample estimates:
      cor
-0.8453958
```

**Σύγκριση δυο συντελεστών συσχέτισης**

Για σύγκριση δυο συντελεστών συσχέτισης τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το κριτήριο του z.

$$z = \frac{z_1 - z_2}{\sigma_{(z_1 - z_2)}}$$

Όπου:

$$\sigma_{(z_1 - z_2)} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_1 - 3}}$$

Όταν δεν απορρίπτεσαι η μηδενική υπόθεση, υπολογίζουμε τον κοινό συντελεστή συσχέτισης ως εξής:

$$z_w = \frac{(n_1 - 3)z_1 + (n_2 - 3)z_2}{(n_1 - 3) + (n_2 - 3)}$$

και στην συνέχεια η τιμή $z_w$ μετατρέπεται στην κλίμακα r.

## ΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗ

Η ανάλυση συμμεταβολής ή παλινδρόμησης είναι μια τεχνική προσδιορισμού της σχέσης μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών, με σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές, μέσω των άλλων.

Η σχέση αυτή μπορεί να οφείλεται εξ ολοκλήρου ή εν μέρει στην επίδραση της μιας μεταβλητής (ανεξάρτητη Χ) στην άλλη μεταβλητή (εξαρτημένη Υ), υπάρχει δηλαδή σχέση αιτίου-αποτελέσματος.

Το γραμμικό μοντέλο για την απλή γραμμική συμμεταβολή είναι το εξής:

$$Y_i = a + b X_i + e_i \qquad i = 1, 2,....,n$$

όπου

$Y_i$ = η $i$ παρατήρηση της εξαρτημένης μεταβλητής
$X_i$ = η $i$ παρατήρηση της ανεξάρτητης μεταβλητής
$a, b$ = είναι δυο άγνωστες σταθερές
$\varepsilon_i$ = το υπόλοιπο, $N(0,\sigma^2)$

Με την μέθοδο της απλής γραμμική συμμεταβολής ψάχνουμε να βρούμε μια ευθεία η οποία θα προσαρμόζει καλύτερα στα δεδομένα μας. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων *α* και *b*, έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των σημείων από την ευθεία να είναι ελάχιστο.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bX_i)$$

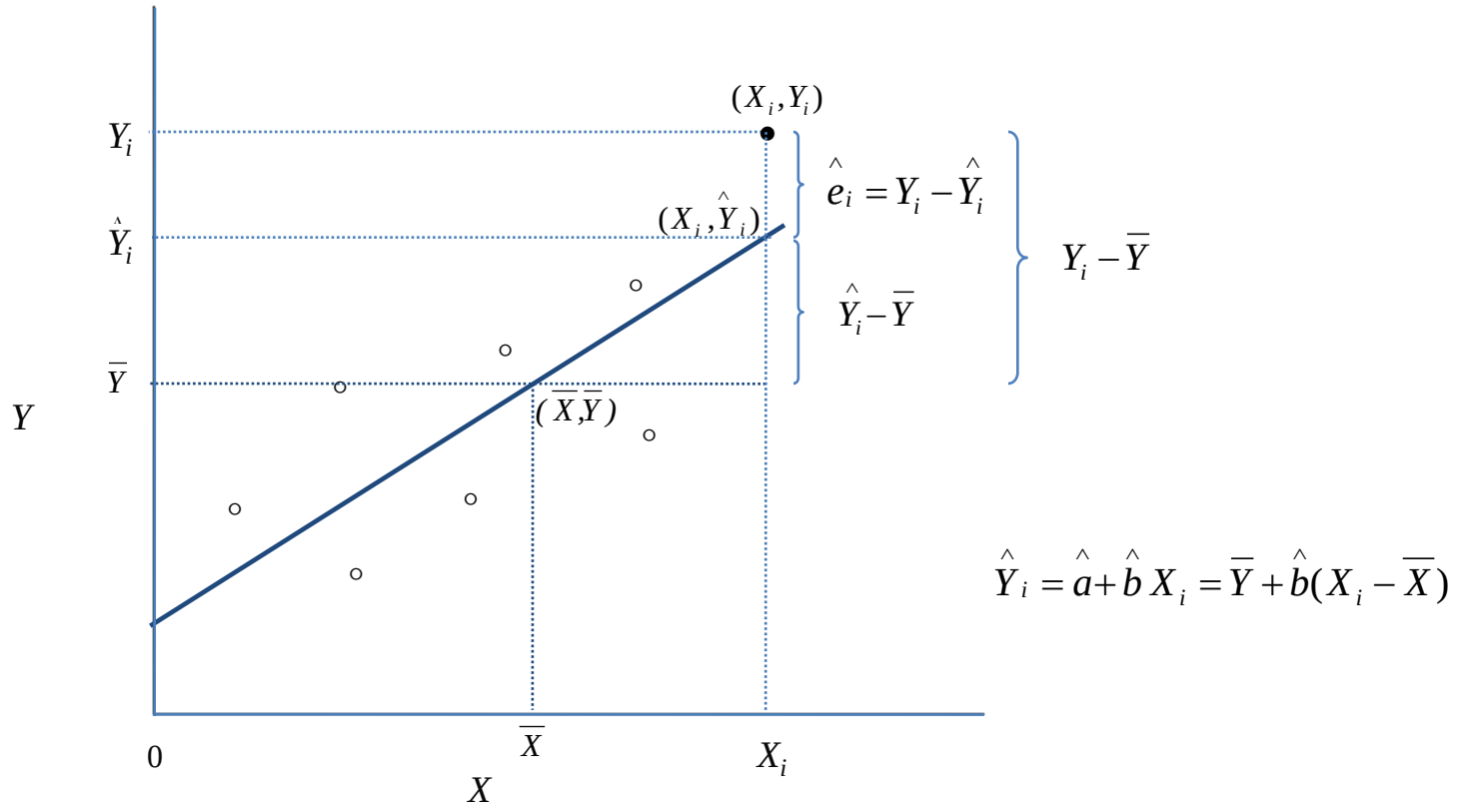
Οι τιμές των παραμέτρων *a* και *b*, που ελαχιστοποιούν την σχέση καλούνται εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων, συμβολίζονται με $\hat{a}$ και $\hat{b}$ και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\,\overline{X} \quad \text{και} \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)(Y_i - \overline{Y}.)}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}.)^2} = \frac{\text{ΑΓ}_{\text{XY}}}{\text{ΑΤ}_{\text{x}}}$$

Η ευθεία καλείται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία συμμεταβολής της *Y* πάνω στη *X*.

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}\,X_i$$

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί




α = η τομή της γραμμής στον άξονα των Υ

b = ο συντελεστής συμμεταβολής ή κλίση της ευθείας

Για μεταβολή του Χ κατά μία μονάδα έχουμε μεταβολή του Υ κατά b μονάδες

## Όρια εμπιστοσύνης των παραμέτρων της συμμεταβολής

Το $s^2$ παρέχει μία εκτίμηση της διασποράς $\sigma^2$ των τυχαίων αποκλίσεων των σημείων από την ευθεία γραμμή και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$s_a^2 = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{ATx}\right) \qquad s_b^2 = \frac{s^2}{ATx}$$

Επομένως τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους *a, b* ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\hat{a} \pm s_a t_{(n-2,a/2)} \quad \text{και} \quad \hat{b} \pm s_b t_{(n-2,a/2)}$$

**Δοκιμασίες σημαντικότητας**

Για τον έλεγχος σημαντικότητας των δυο παραμέτρων χρησιμοποιείται η δοκιμασία του t για ΒΕ = n – 2.

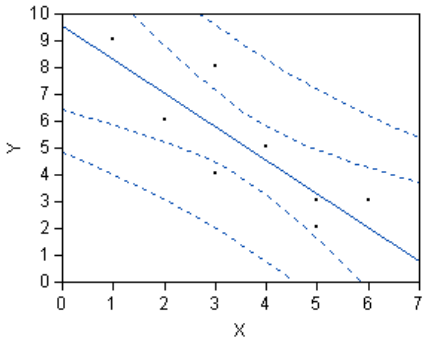
$$t = \frac{\hat{a}}{s_a} = \frac{\hat{a}}{s\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{ATx}\right)}} \quad \text{και} \quad t = \frac{\hat{b}}{s_b} = \frac{\hat{b}}{s\sqrt{\frac{1}{ATx}}}$$

Το διάστημα μέσης πρόβλεψης του Y για συγκεκριμένη τιμή του X, είναι:

$$\hat{a}+\hat{b}\,X \pm s\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^{2}}{\mathrm{ATx}}\right)}t_{(n-2,a/2)}$$

Το διάστημα ατομικής πρόβλεψης του Y για συγκεκριμένη τιμή του X, είναι:

$$\hat{a}+\hat{b}\,X \pm s\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^{2}}{\mathrm{ATx}}\right)}t_{(n-2,a/2)}$$




Οι ζώνες εμπιστοσύνης για τους μέσους είναι στενότερες από ότι στις ατομικές παρατηρήσεις

**Προϋποθέσεις της ανάλυσης συμμεταβολής**

1. Υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ Χ και Υ (γραμμικότητα).
2. Οι κατανομές της Υ έχουν ίδια διασπορά για όλα τα επίπεδα της Χ (ομοσκεδαστικότητα).
3. Οι τιμές της Υ που αντιστοιχούν στα διάφορα επίπεδα της Χ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
4. Η κατανομή της Υ για όλα τα επίπεδα της Χ είναι κανονική.

$$Y_i - \overline{Y} = (\hat{Y}_i - \overline{Y}) + (Y_i - \hat{Y})$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2$$

Το ΑΤολ. εκφράζει τη συνολική μεταβλητότητα των παρατηρήσεων $Y_i$.

$$ATολ. = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}Y_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n}Y_i)^2/n$$

Το ΑΤσυμ. εκφράζει τη μεταβλητότητα των προσαρμοσμένων τιμών $\hat{Y}_i$.

$$ATσυμ. = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \sum_{i=1}^{n}(X_i)\sum_{i=1}^{n}(Y_i)/n\right)^2 \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n}X_i)^2/n\right)$$

Το ΑΤαποκλ. εκφράζει τη μεταβλητότητα των $Y_i$ σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές $\hat{Y}_i$.

$$ATαποκλ. = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2$$

## Πίνακας Ανάλυσης Συμμεταβολής

| **Πηγή παρ/τητας** | **ΒΕ** | **ΑΤ** | **ΜΤ** | **F** |
|---|---|---|---|---|
| Συμμεταβολή | 1 | $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ | $\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}$ | $\frac{\text{ΜΤ}\,συμ}{\text{ΜΤ}\,απ}$ |
| Αποκλίσεις | n – 2 | $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2$ | $\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2}{n-2}$ | |
| Σύνολο | n – 1 | $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ | | |

**Παράδειγμα:**

| X | Y | XY |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 9 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 8 | 24 |
| 3 | 4 | 12 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 3 | 15 |
| 5 | 2 | 10 |
| 6 | 3 | 18 |
| ΣX = 29 | ΣY = 40 | ΣXY = 120 |
| $\Sigma X^2$ = 125 | $\Sigma Y^2$ = 244 | n = 8 |

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}.)(Y_i - \overline{Y}.)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}.)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n}(X_i)\sum_{i=1}^{n}(Y_i)/n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2/n} = \frac{120 - 29*40/8}{125 - 29^2/8} = \frac{-25}{19{,}875} = -1{,}257$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\,\overline{X} = 40/8 - (-1{,}257)*29/8 = 9{,}55$$

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}\,X = 9{,}55 - 1{,}257X$$

**Έλεγχος ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ *Y και X.***

Δοκιμασία του *F*

$$ATολ. = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2/n = 244 - 40^2/8 = 44$$

$$ATσυμ. = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n}(X_i)\sum_{i=1}^{n}(Y_i)/n\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2/n} = \frac{(120 - 29*40/8)^2}{125 - 29^2/8} = \frac{(25)^2}{19{,}875} = 31{,}447$$

$$ATαποκλ. = ATολ. - ATσυμ. = 44 - 31{,}447 = 12{,}553$$

## Πίνακας Ανάλυσης Συμμεταβολής

| Πηγή παρ/τητας | ΒΕ | ΑΤ | ΜΤ | F | Fπιν |
|---|---|---|---|---|---|
| Συμμεταβολή | 1 | 31,447 | 31,447 | 15,03 | 5,98 |
| Αποκλίσεις | 6 | 12,553 | 2,0922 | | |
| Σύνολο | 7 | 44 | | | |

Επειδή το *F* για τη συμμεταβολή είναι μεγαλύτερο από την κρίσιμη τιμή, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και επομένως υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ *X* και *Y*.

**Έλεγχος ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ *Y και X.***

Δοκιμασία του *t*

$$s^2 = \frac{\mathrm{AT_Y} - \frac{\mathrm{A\Gamma_{XY}^2}}{\mathrm{AT_x}}}{n-2} = \frac{44 - 31{,}447}{6} = 2{,}092$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\mathrm{ATx}} = \frac{2{,}092}{19{,}875} = 0{,}10$$

$$t = \frac{\hat{b}}{s_b} = \frac{-1{,}257}{\sqrt{0{,}105}} = \frac{-1{,}257}{0{,}3244} = -3{,}88$$

| **X** | **Y** | $\hat{Y}$ | $e = Y - \hat{Y}$ | $(Y - \hat{Y})^2$ | $Y - \bar{Y}$ | $(Y - \bar{Y})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 8,3 | 0,7 | 0,5 | 4 | 16 |
| 2 | 6 | 7,0 | -1,0 | 1,1 | 1 | 1 |
| 3 | 8 | 5,8 | 2,2 | 4,9 | 3 | 9 |
| 3 | 4 | 5,8 | -1,8 | 3,2 | -1 | 1 |
| 4 | 5 | 4,5 | 0,5 | 0,2 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 3,3 | -0,3 | 0,1 | -2 | 4 |
| 5 | 2 | 3,3 | -1,3 | 1,6 | -3 | 9 |
| 6 | 3 | 2,0 | 1,0 | 1,0 | -2 | 4 |
| $\Sigma X = 29$ | $\Sigma Y = 40$ | | | 12,55 | | 44 |

```
> attach(Regression)
> fit=lm(Y~X)
> library(car)
> dwt(fit)
```

| lag | Autocorrelation | D-W Statistic | p-value |
|---|---|---|---|
| 1 | -0.7070084 | 3.297526 | 0.088 |

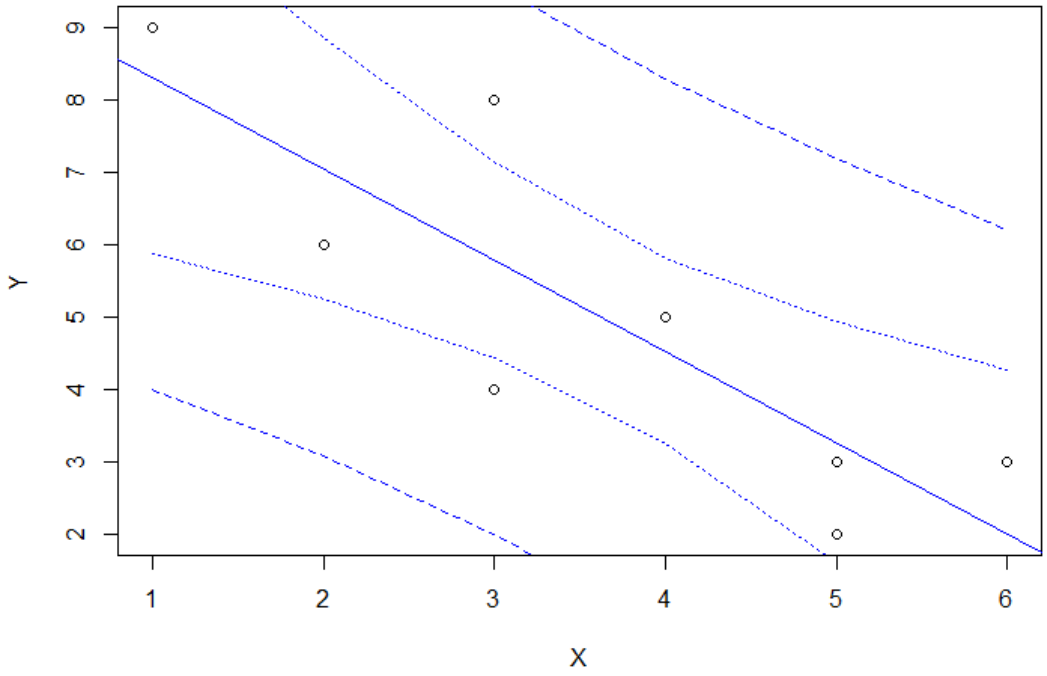
Alternative hypothesis: rho != 0

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> summary(fit)
Call:
  lm(formula = Y ~ X)
Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-1.7862 -1.1006  0.1006  0.7704  2.2138

Coefficients:
             Estimate   Std. Error    t value     Pr(>|t|)
(Intercept)   9.5597       1.2825      7.454     0.000301 ***
 X           -1.2579       0.3245     -3.877     0.008200 **
 ---
  Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.446 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7147,        Adjusted R-squared:  0.6671
F-statistic: 15.03 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.0082

> anova(fit)
Analysis of Variance Table
Response: Y
          Df     Sum Sq   Mean Sq    F value    Pr(>F)
X         1      31.447   31.4465      15.03    0.0082 **
  Residuals  6 12.553  2.0922
---
  Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> plot(X, Y)
> abline(lm(Y~X), col="blue")
> conf_interval=predict(fit, interval="confidence",level = 0.95)
> lines(X, conf_interval[,2],  col="blue“, lty=2)
> lines(X, conf_interval[,3],  col="blue“, lty=2)
> pred_interval= predict(fit, interval="prediction", level = 0.95)
> lines(X, pred_interval[,2],  col="blue“, lty=2)
> lines(X, pred_interval[,3],  col="blue“, lty=2)
```



```
> conf_interval
```

| | fit | lwr | upr |
|---|---|---|---|
| 1 | 8.301887 | 5.8710462 | 10.732727 |
| 2 | 7.044025 | 5.2467368 | 8.841314 |
| 3 | 5.786164 | 4.4400250 | 7.132302 |
| 4 | 5.786164 | 4.4400250 | 7.132302 |
| 5 | 4.528302 | 3.2420220 | 5.814582 |
| 6 | 3.270440 | 1.6098600 | 4.931020 |
| 7 | 3.270440 | 1.6098600 | 4.931020 |
| 8 | 2.012579 | -0.2504108 | 4.275568 |

**Σύγκριση των συντελεστών συμμεταβολής**

$$t = \frac{b_1 - b_2}{s_{(b_1 - b_2)}}$$

$$s_{(b_1 - b_2)} = s_{yp}^2 \sqrt{\left[\frac{1}{AT_{1XX}} + \frac{1}{AT_{2XX}}\right]}$$

$$s_{yp}^2 = \frac{AT_{1YY} - b_1 A\Gamma_{1XY} + AT_{2YY} - b_1 A\Gamma_{2XY}}{n_1 + n_2 - 4}$$

Και συγκρίνεται με την τιμή του πίνακα t για ΒΕ= $n_1 + n_2 - 2$