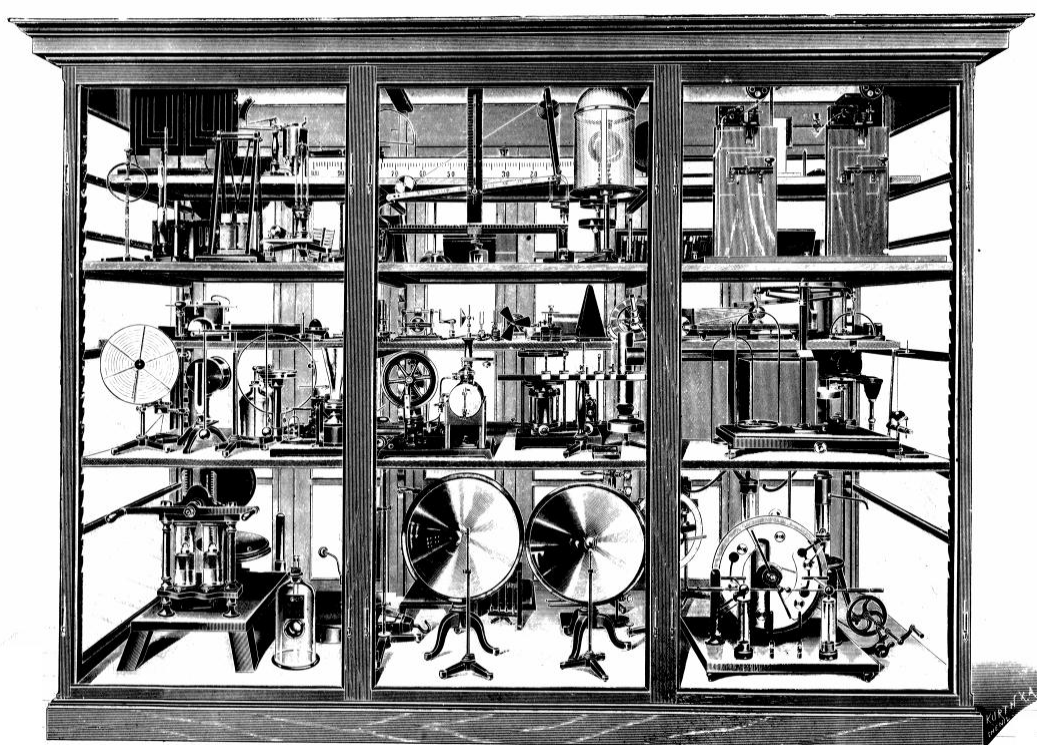


ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΒΙΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ



Μπεθάνης Κ., Καρούζας Μ. & Τζαμαλής Π.

ΑΘΗΝΑ 2013 -14

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η ενασχόληση στο Εργαστήριο Φυσικής περιλαμβάνει τρία μέρη.

- Το πρώτο, το προπαρασκευαστικό συνδέεται με την προετοιμασία των φοιτητών **πριν από την Εργαστηριακή Άσκηση**. Έχει να κάνει με την ενημέρωσή τους για το θεωρητικό και διαδικαστικό κομμάτι της επόμενης Άσκησης. Είναι απαραίτητο να μπορούν να εκτιμήσουν σε γενικές γραμμές (χωρίς πειραματικές λεπτομέρειες) “τι πρόκειται να κάνουν στο Εργαστήριο”.
- Το δεύτερο είναι το πρακτικό-πειραματικό μέρος και γίνεται στους χώρους των εργαστηρίων **κατά τη διάρκεια της Εργαστηριακής Άσκησης**. Είναι η εκτέλεση της και η καταγραφή των αντιστοιχών μετρήσεων. Προηγείται η γνωριμία με τις διατάξεις και τα όργανα και η συμβουλευτική παρέμβαση του προσωπικού για τη χρήση τους και την όλη διαδικασία. Στο Εργαστήριο επίσης γίνεται ένας πρώτος, έστω και προσεγγιστικός, υπολογισμός του μεγέθους-στόχου της Άσκησης. Ίσως αποδειχθεί πως “κάτι δεν πήγε καλά” και πρέπει κάποιες μετρήσεις να επαναληφθούν.
- Το τρίτο μέρος είναι η επεξεργασία των μετρήσεων **μετά την Εργαστηριακή Άσκηση**, και η ένταξή τους στην έκθεση που αναφέρεται αναλυτικά στις οδηγίες. Και το μέρος αυτό γίνεται στους χώρους των εργαστηρίων.

Απαραίτητη προϋπόθεση, για τη σύνταξη μιας καλής εργασίας, είναι η σωστή εκμετάλλευση του χρόνου και της υλικό-τεχνικής υποδομής του εργαστηρίου. Για το λόγο αυτό είναι **απαράδεκτο να υπάρχει άγνοια της υπό εκτέλεση άσκησης και των ερωτημάτων που αυτή θέτει και στα οποία θα κληθείτε να απαντήσετε με την εργασία σας**. Άγνοια της θεωρίας της άσκησης συνεπάγεται εσφαλμένες παρατηρήσεις, ελλειπίες σημειώσεις των παραμέτρων και λάθος μετρήσεις.

ΚΥΡΙΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΙΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μία εργασία πειραματικής άσκησης θα πρέπει να αποτελεί μία αυτοτελή αναφορά στα όσα έγιναν στο εργαστήριο και στα αποτελέσματα, συμπεράσματα που εξάγονται από αυτά. Θεωρήστε ότι απευθύνεστε σε ένα υποθετικό αναγνώστη με κάποιες γνώσεις φυσικής, ο οποίος δεν έχει υπόψη του το βιβλίο εργαστηριακών ασκήσεων, δεν ξέρει τι κάνατε στο εργαστήριο και στον οποίο θα πρέπει να περιγράψετε χωρίς περιττά λόγια τη δουλειά και τα συμπεράσματά σας.

Μια εργασία λοιπόν θα πρέπει:

- (I) να είναι πλήρης αλλά και λιτή, σαφής και περιεκτική,
- (II) να έχει μια λογική δομή,
- (III) να είναι εύκολα και ευχάριστα αναγνώσιμη. (Παράγοντας τον οποίο δε θα πρέπει να υποτιμήσετε καθόλου!!!)

Προσέξτε τα παρακάτω σημεία:

- Γράψτε καθαρά στους πίνακες τις μετρήσεις σας και τους αντίστοιχους υπολογισμούς μεγεθών και σφαλμάτων. Μην παραλείπετε να εξηγείτε ποια είναι τα μεγέθη που σημειώνετε στους πίνακες σας και τις αντίστοιχες μονάδες.
- Όλα τα μεγέθη για τα οποία βρήκατε σφάλμα να τα γράφετε απαραιτήτως με τη μορφή $x \pm \delta x$.
- Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις στο μιλιμετρέ με μολύβι.
- Τα αποτελέσματα σας να είναι ευδιάκριτα ώστε να ξεχωρίζουν.
- Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας και συγκρίνετέ τα με τιμές της βιβλιογραφίας.
- Δώστε συμπεράσματα για τα μετρούμενα μεγέθη και την συμπεριφορά τους ανάλογα με τη μεταβολή διαφόρων παραμέτρων.
- Κάντε τις παρατηρήσεις σας για την πειραματική μέθοδο που ακολουθήσατε, για τις συνθήκες κάτω από τις οποίες έγινε η εκτέλεση του πειράματος και για τα όργανα που χρησιμοποιήσατε.
- Ελέγξτε τους παράγοντες και τους συμβιβασμούς που κατά την κρίση σας επηρέασαν τις μετρήσεις σας.
- Η πολυλογία και ο πλατειασμός είναι συνήθεις παγίδες για όσους παρουσιάζουν υπέρμετρο ζήλο. Να είστε σαφείς και σύντομοι. Μακρόσυρτα ή ακατανόητα συμπεράσματα οδηγούν το γραπτό σε κατώτερο επίπεδο σε σχέση με εκείνα που δεν έχουν καθόλου συμπεράσματα.

Παρακαλούνται οι φοιτητές να ενημερώνονται τακτικά για τις ανακοινώσεις του Εργαστηρίου Φυσικής από την ιστοσελίδα του εργαστηρίου στη διεύθυνση:



<http://www.aua.gr/gr/dep/gen/fysiki/index.html>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Άσκηση 1	
<i>Σφάλματα Μετρήσεων</i>	1
Άσκηση 2	
<i>Χάραξη Γραφικών Παραστάσεων</i>	19
Άσκηση 3	
<i>Κλίμακα Βερνιέρου, Διαστημόμετρο - Μικρόμετρο</i>	37
Άσκηση 4	
<i>Φάσματα Εκπομπής-Απορρόφησης στην περιοχή του ορατού</i>	47
Άσκηση 5	
<i>Πολωσίμετρο - Οπτικώς Ενεργά Υλικά</i>	59
Άσκηση 6	
<i>Απορρόφηση Ακτινοβολίας γ από την Ύλη</i>	71
Άσκηση 7	
<i>Μέτρηση του Συντελεστή Επιφανειακής Τάσης</i>	83
Άσκηση 8	
<i>Μέτρηση του Συντελεστή Ιξώδους</i>	91
Άσκηση 9	
<i>Μέτρηση Ειδικής Θερμότητας Υγρού</i>	101
Παράρτημα Α	111

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

*" Άνθρωποι είμαστε σφάλματα κάνουμε..."
Λαϊκή θυμοσοφία*



© Εξόφυλλο από το βιβλίο "An Introduction to Error Analysis – The study of uncertainties in physical measurements" του John R. Taylor. Η φωτογραφία λήφθηκε στις 22 Οκτωβρίου 1895 στο Gare Montparnasse του Παρισιού όταν η ταχεία που ερχόταν από το Granville της Νορμανδίας δεν σταμάτησε «σωστά» στον σταθμό.

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

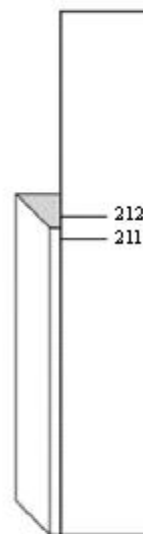
Μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους ονομάζεται η σύγκρισή του με ένα άλλο ομοειδές, το οποίο θεωρείται μονάδα. Για τη μέτρηση διαφόρων φυσικών μεγεθών χρησιμοποιούνται όργανα, με τα οποία άλλοτε καθορίζεται η τιμή των φυσικών μεγεθών και άλλοτε επαληθεύεται κάποιος Φυσικός νόμος.

Η εμπειρία έχει δείξει ότι καμία μέτρηση, όσο προσεκτικά και αν γίνει, δεν μπορεί να είναι απόλυτα ακριβής. Πάντα θα υπάρχει μια απόκλιση από την πραγματική τιμή. Για να γίνει κατανοητό το παραπάνω ως σκεφτούμε το εξής παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τοποθετήσουμε μια πόρτα οπότε χρειαζόμαστε το ύψος του πλαισίου. Η μέτρηση αυτή μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

α) Με μια πρώτη ματιά ένας έμπειρος ξυλουργός εκτιμά ότι το ύψος είναι περίπου 210 cm. Αυτό είναι μια ‘χοντρική’ εκτίμηση και μετά από λίγη σκέψη δέχεται ότι μπορεί να έχει κάνει ένα σφάλμα της τάξης των 5 cm. Έτσι το ύψος μπορεί να είναι από 205 cm έως 215 cm.

β) Επειδή δεν μπορεί να αρκεστεί στην παραπάνω ‘χονδρική’ εκτίμηση μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα μέτρο και να βρει το ύψος ίσο με 211,3 cm. Η εκτίμηση αυτή είναι προφανώς καλύτερη από την προηγούμενη αλλά και πάλι δεν είναι απόλυτα ακριβής αφού για παράδειγμα δε μπορεί να πει αν το ύψος είναι 211,3001 ή 211,3002 cm γιατί το μέτρο που χρησιμοποιεί έχει υποδιαίρέσεις ανά ένα mm. Επίσης δεν είναι καν σίγουρος για τα 0,3 cm αφού μπορεί η κορυφή της πόρτας να μη συμπίπτει με μια από τις υποδιαίρέσεις του μέτρου. Αλλά ακόμα και αν δεχτούμε ότι η σύμπτωση είναι ακριβής, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η κάθε υποδιαίρεση έχει κάποιο πάχος και έτσι πρέπει ο ίδιος να αποφασίσει ποιά ακριβώς είναι η ένδειξη. Έτσι και πάλι αναγκαζόμαστε να πούμε ότι το ύψος της πόρτας είναι κάπου ανάμεσα στα 211,29 και στα 211,31 cm.



Αγοράζοντας ένα καλύτερο μέτρο, με πυκνότερες και λεπτότερες υποδιαίρέσεις, θα πετύχει μεγαλύτερη ακρίβεια αλλά το πρόβλημα θα μεταφερθεί σε επόμενα δεκαδικά ψηφία.

γ) Αν έχει καταληφθεί από το πείσμα να μετρήσει το ακριβές ύψος της πόρτας, μπορεί να χρησιμοποιήσει μια σύγχρονη συσκευή μεγάλης ακρίβειας (π.χ. συμβολόμετρο) και μολονότι τώρα θα έχει μια μέτρηση πολύ πιο ακριβή όπως 211,300165 cm και πάλι δεν θα ξέρει αν το ακριβές ύψος της πόρτας είναι 211,3001650 ή 211,3001651 cm. Έτσι και πάλι μπορούμε να πούμε ότι το ύψος της πόρτας είναι κάπου ανάμεσα στα 211,3001649 και στα 211,3001651 cm.

Αυτό που διαπιστώνεται με το παραπάνω παράδειγμα είναι μια γενική αρχή που ισχύει για όλες τις μετρήσεις όλων των μεγεθών. **Καμία φυσική ποσότητα δεν μπορεί να μετρηθεί με απόλυτη ακρίβεια και αυτό δεν οφείλεται σε απροσεξία ή ανικανότητα του παρατηρητή, αλλά είναι σύμφυτο με την τεχνική των μετρήσεων. Με πολύ προσοχή μπορούμε να μειώσουμε την απόκλιση από την πραγματική τιμή αλλά ποτέ δεν μπορούμε να την εξαλείψουμε.**

Στη Φυσική τις αποκλίσεις αυτές τις ονομάζουμε **σφάλματα** και μπορούν να προέρχονται από διάφορες αιτίες εκτός απ' αυτές που είδαμε στο παράδειγμα. Στην συνέχεια θα δούμε διάφορους τρόπους για να εκτιμούμε αυτά τα σφάλματα καθώς και τις συνηθέστερες αιτίες που τα προκαλούν.

1.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος πολύ συχνά μπορεί να γίνει κάποιο λάθος στη μέτρηση μιας ποσότητας. Επομένως μια και μόνη μέτρηση δεν είναι αξιόπιστη για ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων. Για το λόγο αυτό προτιμούμε να παίρνουμε πολλαπλές μετρήσεις.

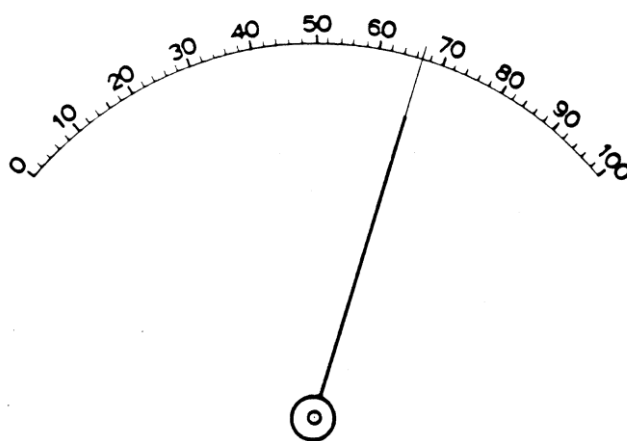
Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου δεν έχουμε τη δυνατότητα ή τα χρονικά περιθώρια να καταγράψουμε πολλές μετρήσεις. Τότε περιοριζόμαστε αναγκαστικά σε μια μέτρηση για την οποία όμως πρέπει να εκτιμήσουμε το σφάλμα της.

1.2.1 Υπολογισμός Σφάλματος σε μια Απλή Μέτρηση

Σφάλμα Διακριτικής Ικανότητας

Στις εργαστηριακές ασκήσεις που ακολουθούν η μέτρηση μας ανάγεται στην ανάγνωση κάποιων ενδείξεων από τα όργανα τα οποία χρησιμοποιούμε. Τα περισσότερα από αυτά είναι αναλογικά παρέχουν δηλ. το ζητούμενο με τη βοήθεια ενός δείκτη που κινείται “παράλληλα” προς μια βαθμολογημένη κλίμακα. Οι μετρήσεις γίνονται με την ανάγνωση της τιμής του μετρούμενου μεγέθους στην κλίμακα, η οποία είναι χαραγμένη με τις κατάλληλες μονάδες. Τη στιγμή της μέτρησης πρέπει να παρατηρηθεί, κοντά σε ποιά χαραγή της κλίμακας βρίσκεται ο δείκτης του οργάνου. Στο Σχ. 1.1, για παράδειγμα, έχει σχεδιαστεί η κλίμακα και ο δείκτης σε ένα αμπερόμετρο. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης του οργάνου βρίσκεται μεταξύ των ενδείξεων 66 mA και 68 mA δηλ. $66 \text{ mA} \leq I \leq 68 \text{ mA}$. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι ο δείκτης βρίσκεται πιο κοντά στην ένδειξη 67 mA από ότι στην 66 mA ή στην 68 mA, αλλά δεν είναι δυνατόν να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από όση εμπεριέχει αυτή η δήλωση. Αυτήν την ακρίβεια μπορούμε καλύτερα να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας την έννοια του **σφάλματος διακριτικής ικανότητας**. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε ως πιθανότερη ένδειξη αυτήν των 67mA με σφάλμα $\delta I = \pm 1 \text{ mA}$ και όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους να γράψουμε ισοδύναμα:

$$I = (67 \pm 1) \text{ mA.}$$



Σχήμα 1.1

Συνήθως θεωρούμε ότι το **σφάλμα διακριτικής ικανότητας είναι ίσο με το μισό της μικρότερης υποδιαίρεσης που φέρει το όργανο μέτρησης**, εκτός εάν κάτι διαφορετικό αναφέρεται ρητά στην άσκηση.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε ψηφιακό όργανο, θεωρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο που εμφανίζεται είναι αβέβαιο. Για παράδειγμα η ένδειξη 7,28mA θα έχει σφάλμα $\pm 0,01\text{mA}$.

Σφάλμα Ανάγνωσης

Είναι δυνατό σε μια μέτρηση η μετρούμενη ποσότητα να μεταβάλλεται σημαντικά, περισσότερο και από τα όρια του σφάλματος της διακριτικής ικανότητας. Για παράδειγμα κατά τη μέτρηση της θερμοκρασίας, με ένα θερμόμετρο που φέρει υποδιαίρεσεις ανά 1°C , είναι δυνατό να παρατηρηθεί μεταβολή της ένδειξης από τους 36°C στους 34°C και αμέσως μετά στους 35°C . Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το σφάλμα διακριτικής ικανότητας $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$ είναι υποεκτίμηση του πραγματικού σφάλματος. Ένα τέτοιο σφάλμα λέγεται **σφάλμα ανάγνωσης** και η εκτίμησή του ποικίλλει ανάλογα με την περίπτωση.

Σφάλμα Βαθμονόμησης

Μπορεί ένα όργανο μέτρησης, είτε λόγω κάποιου κατασκευαστικού προβλήματος είτε λόγω της φθοράς του από το χρόνο και τη χρήση του, να δίνει λανθασμένες μετρήσεις. Ο μόνος τρόπος για να αποφύγουμε τέτοια σφάλματα είναι να συγκρίνουμε τα όργανα μετρήσεως, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, με πρότυπα ομοειδή όργανα.

1.2.2 Υπολογισμός Σφάλματος σε Πολλαπλές Μετρήσεις

Τυχαία Σφάλματα

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τα σφάλματα διακριτικής ικανότητας, ανάγνωσης, βαθμονόμησης όταν προσπαθούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα μιας απλής μέτρησης. Σε κάθε περίπτωση όμως που έχουμε την ευχέρεια, προτιμάμε να εκτελούμε περισσότερες από μία μετρήσεις.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε ένα χρονικό διάστημα με τη βοήθεια χρονομέτρου. Η κύρια πηγή σφάλματος σε μια τέτοια μέτρηση δεν είναι η διακριτότητα της κλίμακας αλλά ο άγνωστος χρόνος αντίδρασης στην εκκίνηση και στο σταμάτημα του χρονομέτρου. Αν ο χρόνος αυτός ήταν πάντα ο ίδιος τότε η μια καθυστέρηση θα εξουδετέρωνε την άλλη. Στην πραγματικότητα όμως ο χρόνος αντίδρασης ποικίλλει (είναι τυχαίος) και έτσι άλλες φορές υπερεκτιμούμε και άλλες φορές υποεκτιμούμε το πραγματικό χρονικό διάστημα.

Τέτοιου είδους σφάλματα (**τυχαία σφάλματα**) είναι δυνατό να εκτιμηθούν με τη βοήθεια της Στατιστικής Ανάλυσης. Έστω λοιπόν ότι μετράμε το προηγούμενο χρονικό διάστημα πέντε φορές και βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$71\text{s}, 72\text{s}, 72\text{s}, 73\text{s}, 71\text{s}$$

Μπορεί να αποδειχθεί στα πλαίσια της Στατιστικής ότι η καλύτερη εκτίμηση για το χρονικό διάστημα είναι η μέση τιμή των πέντε μετρήσεων. Έτσι:

$$\bar{t} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = 71,8 \text{ s}$$

Γενικότερα αν κάνουμε N μετρήσεις μιας ποσότητας x από τις οποίες παίρνουμε τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_N τότε η καλύτερη εκτίμηση για την ποσότητα x είναι η μέση τιμή των μετρήσεων x_1, x_2, \dots, x_N δηλ.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1.1)$$

Στη Στατιστική επίσης αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της μέσης τιμής (τυπική απόκλιση της μέσης τιμής) μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

$$\delta\bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (1.2)$$

και αυτό σημαίνει ότι η τυχαία μέτρηση βρίσκεται με πιθανότητα 68% στην περιοχή τιμών : $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$.

Είναι εύλογο, ότι όλα τα παραπάνω έχουν νόημα μόνο εφόσον μιλάμε για το ίδιο μέγεθος (π.χ. την διάμετρο του ίδιου κυλινδρικού σώματος). Αν, όμως, αναφερόμαστε σε διαφορετικό μέγεθος (π.χ. το ύψος κάποιων φοιτητών) τα μεγέθη: μέση τιμή και απόλυτο σφάλμα της είναι άνευ αξίας..

Στη περίπτωση του εξεταζόμενου παραδείγματος (μετρήσεις χρονικών διαστημάτων), το σφάλμα της μέσης τιμής υπολογίζεται με την βοήθεια του Πίνακα 1.1:

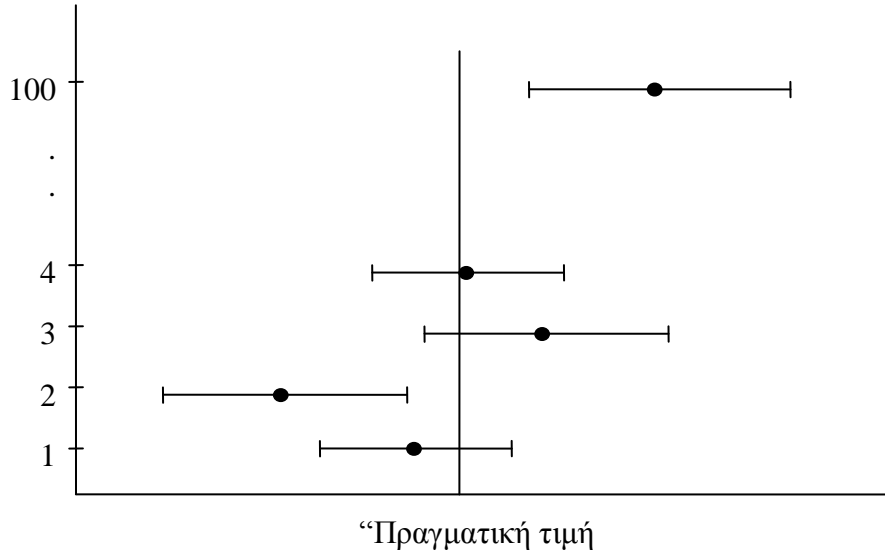
Πίνακας 1.1

t_i (s)	$t_i - \bar{t}$ (s)	$(t_i - \bar{t})^2$ (s^2)
71	-0,8	0,64
72	0,2	0,04
72	0,2	0,04
73	1,2	1,44
71	-0,8	0,64

$$\delta\bar{t} = \sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2}{5(5-1)}} = 0,3741 \text{ s} \approx 0,4 \text{ s}$$

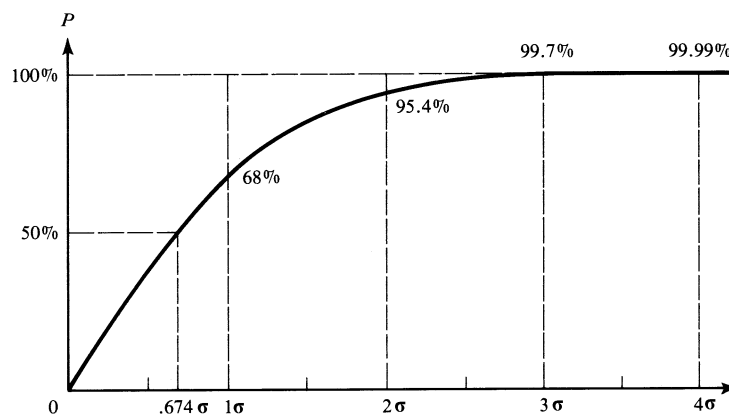
Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα 68% η πραγματική τιμή του χρονικού διαστήματος να βρίσκεται κάπου ανάμεσα στο 71,4 sec ($71,8 - 0,4$) s και στο 72,2 sec ($71,8 + 0,4$) s. Αυτό ισοδυναμεί με το εξής: αν πάρουμε 100 ομάδες των 5 μετρήσεων και από την καθεμία τους υπολογίσουμε το \bar{t} και το $\delta\bar{t}$ με την προηγούμενη τρόπο και βρούμε τα διαστήματα ($\bar{t} - \delta\bar{t}$, $\bar{t} + \delta\bar{t}$) τότε περιμένουμε ότι στις 68 περίπου από αυτές τις ομάδες μετρήσεων τα διαστήματα θα περιλαμβάνουν την “πραγματική” τιμή, ενώ στις υπόλοιπες 32 δε θα την περιλαμβάνουν. Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα.

Δείγμα μεγέθους : 5



Σχήμα 1.2

Αποδεικνύεται από την Στατιστική ότι, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, το σφάλμα της μέσης τιμής ορίζει ένα διάστημα γύρω από τη μέση τιμή, μέσα στο οποίο μπορούμε να ισχυριστούμε πως βρίσκεται η πραγματική τιμή του μεγέθους με πιθανότητα (P) 68%. Αν υπολογίσουμε το διάστημα με χρήση του $2\sigma_{\bar{x}}$ αντί του $\sigma_{\bar{x}}$, τότε η πιθανότητα P για σωστή εκτίμηση αυξάνει σε 95.4% όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 1.3

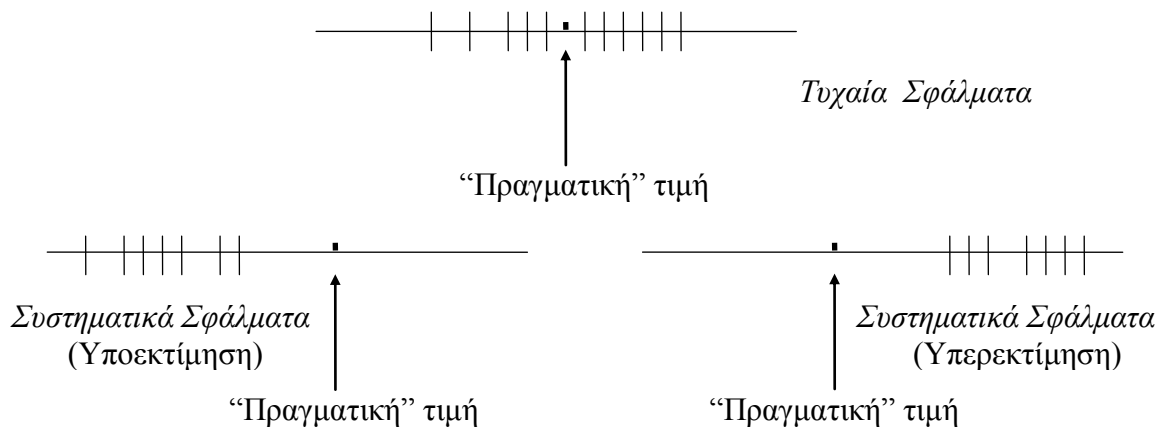
Επομένως, η εκτίμηση των τυχαίων σφαλμάτων σε πολλαπλές μετρήσεις βοηθά να ορίσουμε μια περιοχή γύρω από τη μέση τιμή (καλύτερη εκτίμηση), μέσα στην οποία βρίσκεται η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους με μια προκαθορισμένη πιθανότητα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Θα πρέπει να χρησιμοποιούμε τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, μόνο αν είμαστε σίγουροι ότι σε κάθε επανάληψη μετράμε το ίδιο μέγεθος **κάτω από τις ίδιες ακριβώς πειραματικές συνθήκες**. Για παράδειγμα, αν τα προηγούμενα χρονικά διαστήματα αφορούν τον χρόνο πτώσης ενός σώματος από ένα ύψος h θα πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι κάθε φορά το σώμα πέφτει από το ίδιο ύψος h και κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Δεν έχει κάποιο νόημα να υπολογίσουμε την μέση τιμή

και το σφάλμα της για χρόνους πτώσης του σώματος από διαφορετικά ύψη. **Γενικότερα, δεν υπολογίζουμε ποτέ μέση τιμή και σφάλματα, όταν κάτι αλλάζει στο σύστημα** (π.χ. όταν προσφέρουμε θερμότητα σε σώμα και φυσικά αλλάζει η θερμοκρασία του. Οι διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας δεν αποτελούν στατιστικό δείγμα για επεξεργασία σφαλμάτων)

Συστηματικά Σφάλματα

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το χρονόμετρο που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι ελαττωματικό και “πηγαίνει πιο αργά” από το κανονικό. Αυτό έχει, σαν αποτέλεσμα, να υποεκτιμούμε το χρονικό διάστημα και όσες επαναλήψεις και αν κάνουμε δε θα μπορέσουμε να ανακαλύψουμε και να εκτιμήσουμε το σφάλμα αυτό. Τα σφάλματα αυτού του τύπου καλούνται **συστηματικά**, γιατί πάντα “μετατοπίζουν” τις μετρήσεις μας προς μια κατεύθυνση (είτε υποεκτιμούν είτε υπερεκτιμούν) σε αντίθεση με τα τυχαία σφάλματα που μετατοπίζουν τις μετρήσεις μας και προς τις δύο κατευθύνσεις. Η διαφορά αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.4

Έτσι λοιπόν, ενώ τα τυχαία σφάλματα μπορούν να εκτιμηθούν με τη βοήθεια της στατιστικής ανάλυσης, τα συστηματικά δεν μπορούν να εκτιμηθούν με την βοήθεια της θεωρίας της προηγούμενης παραγράφου. Περιπτώσεις συστηματικών σφαλμάτων έχουμε για παράδειγμα:

- i) σφάλμα μετάθεσης του μηδενός σε μία ζυγαριά,
- ii) μεταλλικός χάρακας που βρίσκεται σε πολύ υψηλή ή πολύ χαμηλή θερμοκρασία, κ.ο.κ.

Στις εργαστηριακές ασκήσεις που ακολουθούν δε θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση συστηματικών σφαλμάτων (εκτός από εκείνο της μετάθεσης του μηδενός) και γι’ αυτό το λόγο δεν παρατίθεται μέθοδος για την εκτίμηση τέτοιων σφαλμάτων.

1.3 ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις κάποιου μεγέθους έδωσαν N φορές το ίδιο αποτέλεσμα, π.χ. η διάμετρος μιας σφαίρας d μετρήθηκε N φορές ίση με 16 mm . Ο υπολογισμός, επομένως, της μέσης τιμής της διαμέτρου θα δίνει $\bar{d} = 16 \text{ mm}$ με τυπική απόκλιση $\delta\bar{d} = \sigma\bar{d} = 0 \text{ mm}$. Αυτό δεν σημαίνει ότι η μέτρηση αυτή έχει μηδενικό σφάλμα. Θυμηθείτε ότι κάθε μία από τις N μετρήσεις (δηλ. κάθε απλή μέτρηση) συνοδεύεται τουλάχιστον από το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του οργάνου που χρησιμοποιήθηκε για να ληφθεί αυτή η μέτρηση. Αν, π.χ. χρησιμοποιήθηκε όργανο με υποδιαιρέσεις 1 mm , τότε το σφάλμα διακριτικής ικανότητας είναι για κάθε απλή μέτρηση ίσο με $0,5$ υποδιαιρέσεις του οργάνου, δηλ., $\delta d = 0,5 \text{ mm}$. Εάν οι μετρήσεις δεν συνοδεύονται από άλλα σφάλματα (ανάγνωσης, βαθμονόμησης, συστηματικά) τα οποία είναι μεγαλύτερα του σφάλματος διακριτικής ικανότητας του οργάνου μέτρησης, το τελικό αποτέλεσμα γράφεται (όπως θα εξηγηθεί και στη συνέχεια) ως εξής:

$$\bar{d} \pm \delta d = (16,0 \pm 0,5) \text{ mm}$$

Επομένως, η τελική γραφή ενός μετρούμενου μεγέθους πρέπει να ακολουθεί τους εξής κανόνες:

1. Κάθε μετρούμενο μέγεθος εκφράζεται πάντα από την εκτιμώμενη τιμή (την μέση τιμή όταν πρόκειται για πολλαπλές μετρήσεις) και το σφάλμα της (την τυπική απόκλιση μέσης τιμής όταν πρόκειται για πολλαπλές μετρήσεις με τυχαία σφάλματα). Τα σφάλματα είναι σύμφυτα σε κάθε μέτρηση και **δεν νοείται να παρουσιάζεται μετρούμενο μέγεθος χωρίς να συνοδεύεται από το αντίστοιχο σφάλμα μέτρησης του**. Τα σφάλματα παρουσιάζονται στην τελική γραφή με το σύμβολο “ \pm ” (συν ή πλην) μαζί με την εκτιμώμενη τιμή. Έτσι, μια μέτρηση $(150 \pm 5) \text{ g}$, σημαίνει ότι η “πραγματική” τιμή της μετρούμενης μάζας βρίσκεται με σφάλμα (αβεβαιότητα) 5 g γύρω από τα 150 g , δηλ. κάπου ανάμεσα στα 145 με 155 g .
2. Αν η μέτρηση ενός μεγέθους υπόκειται σε περισσότερα του ενός είδους σφάλματα (π.χ. διακριτικής ικανότητας και ανάγνωσης του οργάνου για κάθε απλή μέτρηση και σφάλμα μέσης τιμής από τη λήψη πολλαπλών μετρήσεων) **σημειώνεται στην τελική γραφή το σφάλμα με τη μεγαλύτερη τιμή**.
3. **Το σφάλμα διακριτικής ικανότητας είναι το ελάχιστο δυνατό σφάλμα που μπορούμε να έχουμε για μια μετρούμενη ποσότητα**.
4. Τα μετρούμενα μεγέθη είναι φυσικά μεγέθη και **συνοδεύονται πάντα από τις μονάδες τους**.
5. Η τελική γραφή γίνεται με **στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων σύμφωνα με τους κανόνες που αφορούν στα σημαντικά ψηφία των τιμών των σφαλμάτων που αναφέρονται στην επόμενη παράγραφο**.

Σημαντικά ψηφία

Όταν παρουσιάζουμε μια μέτρηση ως: *εκτίμηση \pm σφάλμα (αβεβαιότητα)* θα πρέπει η ακρίβεια, όπως ορίζεται από τα σημαντικά ψηφία, να είναι ίδια για την εκτιμώμενη τιμή και την τιμή του σφάλματος. Ως παράδειγμα, εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε μια εκτίμηση για ένα μέγεθος, π.χ. ενέργεια, την τιμή $E = 12,398318 \text{ Joules}$ και ο υπολογισμός του αντίστοιχου σφάλματος της δίνει $\delta E = 0,04625 \text{ Joules}$. Για την τελική παρουσίαση της μέτρησης της ενέργειας του παραδείγματος ακολουθούμε τους εξής κανόνες για τα σημαντικά ψηφία.

(i) Η τιμή του σφάλματος δE δίνει την αβεβαιότητα της μέτρησης γύρω από την εκτιμώμενη τιμή και επομένως δεν μπορεί να εκφράζεται με μεγάλη ακρίβεια. Το δE δεν μπορεί να εκφράζεται με τέσσερα σημαντικά ψηφία αφού αυτό θα σήμαινε ότι η αβεβαιότητα της μέτρησης είναι η ίδια αβέβαιη (το 2^ο σημαντικό ψηφίο είναι μέσα στα \pm όρια του 1^{ου} σημαντικού ψηφίου κ.ο.κ). Σε πειραματικές διαδικασίες υψηλής ακρίβειας μερικές φορές σημειώνονται δύο σημαντικά ψηφία του σφάλματος αλλά για τις πειραματικές ασκήσεις του Εργαστηρίου Φυσικής θεωρούμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε εκτίμηση σφάλματος με μεγαλύτερη ακρίβεια από ένα σημαντικό ψηφίο (δηλ. το πρώτο από αριστερά ψηφίο ενός αριθμού που είναι διαφορετικό του μηδενός) αφού το σφάλμα του πρώτου σημαντικού ψηφίου καλύπτει εκείνο των ψηφίων που ακολουθούν και επομένως εφαρμόζουμε πάντα τον κανόνα:

Η τιμή των σφαλμάτων των πειραματικών μετρήσεων θα στρογγυλοποιείται πάντα στο πρώτο σημαντικό ψηφίο.

Σύμφωνα με αυτό, η τιμή δE του παραδείγματος στρογγυλοποιείται στην τιμή $\delta E = 0,05$ Joules.

(ii) Αφού η αβεβαιότητα δE στην τιμή της E έχει ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου, όλα τα ψηφία μετά το δεύτερο δεκαδικό (δηλ. το ψηφίο αντίστοιχης τάξης με το 1^ο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος) της εκτιμώμενης τιμής της E εκφράζουν ακρίβεια που υπερκαλύπτεται από τα όρια της αβεβαιότητας και επομένως δεν έχουν κανένα νόημα. Προφανώς, λοιπόν, πρέπει να στρογγυλοποιήσουμε την τιμή $E = 12,398318$ Joules στην τιμή $E = 12,40$ Joules. Το ίδιο συμβαίνει για όλες τις μετρήσεις και επομένως ακολουθείται πάντα ο κανόνας:

Στρογγυλοποιούμε την εκτιμώμενη τιμή, αφήνοντας ως τελευταίο ψηφίο εκείνο που αντιστοιχεί στην ίδια τάξη μεγέθους με το πρώτο σημαντικό ψηφίο της τιμής του σφάλματος.

Όταν απαιτείται (περίπτωση ακρίβειας δεκαδικών ψηφίων) συμπληρώνουμε με “0” μέχρι να φτάσουμε στη τάξη μεγέθους που υποδεικνύει η τιμή του σφάλματος (όπως σε προηγούμενο παράδειγμα, όπου η τιμή “16mm” γράφτηκε “16,0 mm”)

Η τελική παρουσίαση της μέτρησης θα δίνεται ως:

$$E \pm \delta E = (12,40 \pm 0,05) \text{ Joules}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο παραπάνω κανόνας για την στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων αφορά μόνο τη γραφή των μετρήσεων. Όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τις μετρήσεις αυτές για υπολογισμούς θα πρέπει να κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία προκειμένου να αποφύγουμε σφάλματα λόγω στρογγυλοποιήσεων στους υπολογισμούς.

Ορισμένες εφαρμογές αυτών των κανόνων έχουν καταγραφεί στον Πίνακα 1.2.

Πίνακας 1.2

Πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Τελικό αποτέλεσμα
X	Δx	δx	X	x ± δx
0,2354	0,00278	0,003	0,235	0,235 ± 0,003
379,45	58,32	60	380	380 ± 60
176232	1453	1000	176000	176000 ± 1000
2,345	0,267	0,3	2,3	2,3 ± 0,3

Σχετικό Σφάλμα

Το σφάλμα μέτρησης είναι ενδεικτικό της ακρίβειας μιας μέτρησης. Παρ’ όλα αυτά, η τιμή του σφάλματος από μόνη της δεν μπορεί να αποκαλύψει την πλήρη εικόνα της αξιοπιστίας της μέτρησης. Π.χ., σφάλμα δx=1cm σε μέτρηση μήκους x=1km σημαίνει ότι η μέτρηση έγινε με μεγάλη ακρίβεια ενώ αντίθετα αν το ίδιο σφάλμα δίνεται για μέτρηση μήκους x=3cm θεωρούμε ότι έχουμε μια χοντρική εκτίμηση του μήκους. Είναι επομένως φανερό ότι η ποιότητα μιας μέτρησης δεν εξαρτάται μόνο από το σφάλμα της δx αλλά και από το λόγο του δx προς την τιμή του x. Ο λόγος αυτός ορίζει το *σχετικό σφάλμα της μέτρησης*:

$$\text{Σχετικό Σφάλμα} = \frac{\text{Εκτιμωμενο Σφαλμα}}{\text{Εκτιμωμενη Τιμη}} = \frac{\delta x}{x} \quad (1.3)$$

Το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό (π.χ. σχετικό σφάλμα δx/x = 1cm/500cm = 0,002 ή 2%). Εκφράζει την καθαρή ακρίβεια μιας μέτρησης με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συγκρίσιμη με αυτές άλλων μετρήσεων. Το σφάλμα μέτρησης (δx=1cm) που ορίζεται στις προηγούμενες παραγράφους διαχωρίζεται από το σχετικό σφάλμα με την ονομασία **απόλυτο σφάλμα**.

Για να εκτιμηθεί η αξία του σχετικού σφάλματος ας επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στην εξής ερώτηση:

Ποια από τις ακόλουθες μετρήσεις έγινε με μεγαλύτερη ακρίβεια;

A. Μέτρηση ύψους κτιρίου h=41,14m με απόλυτο σφάλμα 4cm.

B. Μέτρηση μέσης απόστασης Γης-Ηλίου S = 149.597.871 km με απόλυτο σφάλμα δS = 100km

Στην περίπτωση (A), η αβεβαιότητα (απόλυτο σφάλμα), ίση με μόλις 4cm για ύψος 41,14m μας φαίνεται ιδιαίτερα μικρή και η μέτρηση αυτή μεγάλης ακριβείας ιδιαίτερα αν την συγκρίνουμε με το απόλυτο σφάλμα των 100km της μέτρησης (B). Για να μπορέσει όμως η σύγκριση αυτή να γίνει σωστά θα πρέπει να υπολογίσουμε το σχετικό σφάλμα των δύο μετρήσεων:

Σχετικό σφάλμα (A) = 4cm/4114cm = 0,097 ή 9,7%

Σχετικό σφάλμα (B) = 100km/149.597.871 km = 0.0000007 ή 0,000007%

από όπου προκύπτει ότι η μέτρηση (B) είναι πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας.

1.4 ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Τα περισσότερα φυσικά μεγέθη δεν μπορούν να μετρηθούν αμέσως αλλά υπολογίζονται εμμέσως. Συνήθως ο παρατηρητής μετράει ένα ή περισσότερα μεγέθη, με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων οργάνων, και στη συνέχεια υπολογίζει από αυτά την τιμή του μεγέθους που τον ενδιαφέρει. Αφού λοιπόν έχει εκτιμήσει τα επιμέρους σφάλματα των αμέσως μετρούμενων μεγεθών, στη συνέχεια θα πρέπει να βρει τον τρόπο με τον οποίο αυτά "μεταδίδονται" μέσω των υπολογισμών και οδηγούν στο σφάλμα του ζητούμενου μεγέθους.

Έστω ότι μετρήθηκαν οι ποσότητες x, y, z, \dots και εκτιμήθηκαν τα σφάλματα μέτρησης τους $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ με σκοπό να υπολογισθεί η ποσότητα Q , της οποίας η άμεση μέτρηση δεν είναι δυνατή. Η ποσότητα Q δίνεται από κάποιο φυσικό νόμο (μαθηματικό μοντέλο) ως συνάρτηση των ποσοτήτων $x, y, z \dots$ δηλ.:

$$Q = f(x, y, z, \dots) \tag{1.4}$$

Προφανώς η καλύτερη εκτίμηση για την ποσότητα Q προκύπτει από τις καλύτερες εκτιμήσεις για τις ποσότητες $x, y, z \dots$. Επι πλέον, όμως, πρέπει να εκτιμηθεί κάποιο σφάλμα για την Q που προκύπτει από τη μετάδοση των επιμέρους σφαλμάτων των ποσοτήτων που συμμετέχουν στη σχέση 1.4 για τον υπολογισμό της.

Στη θεωρία των σφαλμάτων αποδεικνύεται ότι το σφάλμα δQ της ποσότητας Q υπολογίζεται με διαφορίση της σχέσης (1.4), με τη βοήθεια της απόλυτης τιμής των μερικών παραγώγων της Q , ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές, δηλ.:

$$\delta Q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta z + \dots \tag{1.5}$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$ είναι οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x, y και z

αντίστοιχα. (Σκεφτείτε: γιατί μιλήσαμε για απόλυτη τιμή των μερικών παραγώγων;)

Η μερική παράγωγος π.χ $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι το αποτέλεσμα της παραγωγίσης της f ως προς x θεωρώντας τις μεταβλητές y και z σταθερές.

Το σφάλμα που υπολογίζεται με βάση τη σχέση αυτή, ονομάζεται **μέγιστο σφάλμα σύνθετης μετρήσεως**. Στην αμέσως επόμενη παράγραφο (ανεξάρτητα σφάλματα) θα εξηγήσουμε γιατί δίνεται αυτή η ονομασία.

Στο Παράρτημα I εξετάζονται ορισμένες περιπτώσεις μετάδοσης σφαλμάτων σε μεγέθη που ορίζονται από απλές συναρτησιακές σχέσεις μετρούμενων ποσοτήτων.

Παραδείγματα

1. Η σχέση της κλίμακας βαθμών Baumé (ρ_B) με την αντίστοιχη σε gr/cm^3 (ρ) για την πυκνότητα υγρού είναι: $\rho = \frac{145}{145 - \rho_B}$. Το σφάλμα διακριτικής ικανότητας για την

κλίμακα Baumé είναι : 0,5 βαθμοί. Μέτρηση της πυκνότητας ενός υγρού με το πυκνόμετρο κλίμακας Baumé δίνει:

$$\rho_B = (28,0 \pm 0,5) \text{ βαθμοί Baumé}$$

Το σφάλμα $\delta \rho$ της πυκνότητας ρ (σε gr/cm^3) είναι :

$$\delta\rho = \left| \frac{\partial\rho}{\partial\rho_B} \right| \delta\rho_B = \frac{145}{(145 - \rho_B)^2} \delta\rho_B = \frac{145}{(145 - 28)^2} 0,5 = 0,00529 \frac{g}{cm^3}$$

Επομένως, η πυκνότητα σε g/cm^3 εκφράζεται ως:

$$\rho = (1,239 \pm 0,005) \text{ βαθμοί Baumé}$$

2. Η πυκνότητα σφαιριδίου μάζας m και διαμέτρου d , υπολογίζεται ως:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \\ V &= \frac{4}{3} \pi R^3 \xrightarrow{d=2R} V = \frac{\pi}{6} d^3 \end{aligned} \right\} \boxed{\rho = \frac{6m}{\pi d^3}} \quad (1.6)$$

Από τις μετρήσεις μας προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές:

- Μέτρηση μάζας

1 μέτρηση με ζυγό διακριτικής ικανότητας 0,01 gr (επομένως, $\delta m = 0,01 \text{ gr} / 2 = 0,005 \text{ gr}$)

δίνει εκτιμώμενη τιμή μάζας $m = 0,09 \text{ gr}$. Γράφουμε:

$$m = (0,090 \pm 0,005) \text{ gr}$$

- Μέτρηση διαμέτρου

5 μετρήσεις (μετρήσεις για 5 διαφορετικά ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων ή μετρήσεις διαμέτρου σε 5 όμοιες σφαίρες) δίνει μέση τιμή $\bar{d} = 4,12 \text{ mm}$ και τυπική

απόκλιση μέσης τιμής (σφάλμα μέσης τιμής) $\delta\bar{d} = \sigma\bar{d} = 0,033 \text{ mm}$. Γράφουμε:

$$d = (4,12 \pm 0,03) \text{ mm}$$

Η εκτιμώμενη τιμή της πυκνότητας είναι:

$$\rho = \frac{6m}{\pi d^3} = \frac{6 \cdot 0,09}{3,1415 \cdot 4,12^3} \frac{gr}{mm^3} = 0,002458 \frac{gr}{mm^3}$$

Το σφάλμα $\delta\rho$ προκύπτει από τη μετάδοση των σφαλμάτων $\sigma\bar{d}$ και δm από τη σχέση:

$$\delta\rho = \left| \frac{\partial\rho}{\partial d} \right| \sigma\bar{d} + \left| \frac{\partial\rho}{\partial m} \right| \delta m$$

$$\delta\rho = \left| -\frac{18m}{\pi d^4} \right| \sigma\bar{d} + \left| \frac{6}{\pi d^3} \right| \delta m = \left(\frac{18 \cdot 0,09}{3,1415 \cdot 4,12^4} \cdot 0,03 + \frac{6}{3,1415 \cdot 4,12^3} \cdot 0,005 \right) \frac{gr}{mm^3} = 0,00019 \frac{gr}{mm^3}$$

Η σχέση αυτή για τον υπολογισμό του $\delta\rho$ μπορεί να απλοποιηθεί (χρησιμοποιώντας την 1.7) στην ακόλουθη μορφή η οποία ασφαλώς καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα:

$$\delta\rho = \rho \left(\frac{\delta m}{m} + 3 \frac{\sigma\bar{d}}{d} \right) = 0,002458 \left(\frac{0,005}{0,09} + 3 \frac{0,03}{4,12} \right) \frac{gr}{mm^3} = 0,00019 \frac{gr}{mm^3}$$

Το τελικό αποτέλεσμα γράφεται ως:

$$\rho = (0,0025 \pm 0,0002) \text{ gr/mm}^3 \quad \text{ή} \quad \rho = (2,5 \pm 0,2) \text{ gr/cm}^3$$

1.4.1 Ανεξάρτητα Σφάλματα

Ας πάρουμε την πιο απλή απ' όλες τις περιπτώσεις που εξετάσαμε ως τώρα για την μετάδοση των σφαλμάτων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $q = x + y$ δύο ποσοτήτων που μετρήθηκαν με σφάλματα δx και δy .

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η καλύτερη εκτίμηση για την ποσότητα q θα προκύπτει από το άθροισμα των καλύτερων εκτιμήσεων για τις ποσότητες x και y , ενώ το σφάλμα της ποσότητας q θα είναι $\delta q = \delta x + \delta y$. Σύμφωνα με αυτά η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το q είναι $x + y + \delta x + \delta y$ ενώ η μικρότερη $x + y - \delta x - \delta y$.

Πότε όμως και με ποιά πιθανότητα είναι δυνατόν να συμβεί κάτι τέτοιο; Προφανώς αυτό θα συμβεί, όταν έχουμε ταυτόχρονα υπερεκτιμήσει ή υποεκτιμήσει

τόσο το x όσο και το y με την μέγιστη τιμή των σφαλμάτων τους δx και δy . Μία τέτοια περίπτωση έχουμε όταν, για παράδειγμα το $q = x + y$ είναι το άθροισμα δύο διαστάσεων x και y , τα οποία έχουν μετρηθεί με την ίδια ελαττωματική μετρητική ταινία. Αν υποθέσουμε ότι κάθε μέτρηση με αυτήν την ταινία εισάγει ένα σφάλμα, είναι σίγουρο ότι τόσο η μέτρηση του x όσο και του y θα εμπεριέχουν αυτό το σφάλμα, και μάλιστα θα είναι υπερεκτιμημένες ή υποεκτιμημένες κατά την ίδια ποσότητα.

Όταν όμως το x και το y εκφράζουν μετρήσεις που αντιπροσωπεύουν διαφορετικά μεγέθη και έχουν γίνει από διαφορετικά όργανα, είναι δηλαδή ανεξάρτητες μετρήσεις, και τα σφάλματα τους είναι τυχαία στην φύση τους, η περίπτωση που εξετάζουμε είναι μάλλον απίθανο να συμβεί. Κι αυτό γιατί τότε η περίπτωση το x να είναι υπερεκτιμημένο συνοδεύεται από μια πιθανότητα 50% το y να είναι υποεκτιμημένο και αντίστροφα. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η πιθανότητα να έχουμε υπερεκτιμήσει ή υποεκτιμήσει το x και το y ταυτόχρονα με την μέγιστη ποσότητα δx και δy είναι πάρα πολύ μικρή και επομένως το $\delta q = \delta x + \delta y$ υπερεκτιμά το πιθανό μας σφάλμα.

Για να αποφύγουμε σ' αυτήν την περίπτωση το υπερεκτιμημένο σφάλμα για το τελικό μέγεθος χρησιμοποιούμε από τη θεωρία σφαλμάτων τη σχέση:

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (1.7)$$

Η σχέση αυτή δίνει πάντα μικρότερη τιμή για το σφάλμα της q απ' ότι η $\delta q = \delta x + \delta y$ και η μορφή της εφαρμόζεται στον υπολογισμό των σφαλμάτων για όλες τις περιπτώσεις εμμέσως υπολογισμένων μεγεθών, που συναντήσαμε έως τώρα.

Αν λοιπόν έχουμε ανεξάρτητα σφάλματα τότε η βασική σχέση (1.5) γίνεται:

$$\delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)^2 + \dots} \quad (1.8)$$

Η μελέτη μετάδοσης ανεξαρτήτων σφαλμάτων για απλές συναρτησιακές σχέσεις γίνεται στο Παράρτημα Ι.

Η τιμή που υπολογίζεται από τη σχέση (1.5) αποτελεί άνω όριο της δυνατής τιμής των σφαλμάτων τα οποία ονομάζονται γι' αυτό όπως ορίσαμε: **“μέγιστα σφάλματα σύνθετης μετρήσεως”**.

Η νέα σχέση (1.8) υπολογίζει πάντα μικρότερη τιμή για το τελικό σφάλμα απ' ότι η αντίστοιχη (1.5) και γι' αυτό θα πρέπει πάντα να χρησιμοποιείται όταν είναι εφαρμόσιμη, δηλαδή όταν τα σφάλματα των μετρουμένων μεγεθών είναι **ανεξάρτητα και τυχαία**. Σημειώνουμε εδώ ότι σχεδόν ΟΛΕΣ οι μετρήσεις που γίνονται στο Εργαστήριο εμπεριέχουν ανεξάρτητα και τυχαία σφάλματα.

Εφαρμογή : Για τα δυο παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω (μετά τη σχέση 1.5) υπολογίστε τα σφάλματα και με τη βοήθεια της σχέσης (1.8) και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

1.5 ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Αφού είδαμε διάφορους τρόπους για την εκτίμηση των σφαλμάτων θα δούμε τώρα πόσο σημαντικό είναι να τα γνωρίζουμε και τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από τις μετρήσεις μας.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα ανάλογο με αυτό που είχε αντιμετωπίσει ο Αρχιμήδης δηλ. να βρούμε αν ένα κόσμημα αποτελείται από χρυσό ($\rho_{\text{χρυσ}} = 15.5 \text{ gm/cm}^3$) ή από ένα άλλο μείγμα ($\rho_{\text{μείγμα}} = 13.8 \text{ gm/cm}^3$).

Δύο φοιτητές Α και Β μετρούν την πυκνότητα του κοσμήματος και βρίσκουν αντίστοιχα: $(15 \pm 2) \text{ gm/cm}^3$ και $(13.9 \pm 0.2) \text{ gm/cm}^3$.

Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι αν και η μέτρηση του Β είναι πολύ πιο ακριβής από την μέτρηση του Α, μπορεί και οι δύο μετρήσεις να είναι εξίσου σωστές αφού τα διαστήματα που δίνουν επικαλύπτονται σε ένα μέρος τους. Η μέτρηση του Α όμως είναι χωρίς πρακτική σημασία, καθώς το διάστημα που δίνει (από 13 έως 17) περιλαμβάνει εντός της τόσο την πυκνότητα του χρυσού όσο και την πυκνότητα του ύποπτου μείγματος. Από την άλλη πλευρά η μέτρηση του Β μας δείχνει ότι το κόσμημα είναι φτιαγμένο από το μείγμα και όχι από καθαρό χρυσό, αφού το διάστημα που δίνει (από 13.7 έως 14.1) περιέχει την πυκνότητα του ύποπτου μείγματος αλλά όχι την πυκνότητα του χρυσού.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι, προκειμένου να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα από ένα πείραμα, θα πρέπει τα εκτιμώμενα σφάλματα να μην είναι πολύ μεγάλα. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα σφάλματα θα πρέπει να είναι πάρα πολύ μικρά (σχετικά). Για να καταλάβουμε το σημείο αυτό, ας ξαναθυμηθούμε το παράδειγμα της πρώτης παραγράφου με τον ξυλουργό. Στον ξυλουργό προφανώς αρκεί η δεύτερη μέτρηση. Η πρώτη μέτρηση δεν είναι αρκετά ακριβής ενώ η τελευταία περιέχει περιττή πληροφορία που ο ξυλουργός δεν θα χρησιμοποιήσει ποτέ.

Αρα λοιπόν θα πρέπει πάντα να έχουμε κατά νου σε τι θα χρησιμοποιήσουμε τις μετρήσεις μας ώστε να μην επιδιώκουμε παραπάνω από την απαιτούμενη ακρίβεια. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε κόπο αλλά και έξοδα που ουσιαστικά δεν χρειάζονται.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε φορά που υπολογίζουμε κάποιο μέγεθος και το σφάλμα του, πρέπει να γράφουμε το τελικό αποτέλεσμα στη μορφή: $x \pm \delta x$.

ΕΠΙΜΥΘΙΟ...

- *Τρία και δύο κάνουν πέντε. Πέντε κι εφτά δώδεκα. Δώδεκα και τρία δεκαπέντε. Καλημέρα. Δεκαπέντε κι εφτά είκοσι δύο. Είκοσι δύο κι έξι είκοσι οχτώ. Είκοσι έξι και πέντε τριάντα ένα. Ουφ! Μας κάνει λοιπόν πεντακόσια ένα εκατομμύρια εξακόσιες είκοσι δύο χιλιάδες εφτακόσια τριάντα ένα.*
 - *Πεντακόσια εκατομμύρια τι;*
 - *Ε; Εδώ είσαι ακόμα; Πεντακόσια εκατομμύρια ... δε θυμάμαι τι. Έχω τόση δουλειά. Εγώ είμαι σοβαρός, δεν ασχολούμαι με σαχλαμάρες. Δύο και πέντε εφτά ...*
 - *Πεντακόσια ένα εκατομμύρια τι; επανέλαβε ο μικρός πρίγκιπας, που, όταν έβαζε μια ερώτηση, δεν είχε συμβεί ποτέ στην ζωή του να την ξεχάσει.*
- Ο επιχειρηματίας ανασήκωσε το κεφάλι:*
- *...Έλεγα λοιπόν πεντακόσια ένα εκατομμύρια ...*
 - *Εκατομμύρια τι;*
- Ο επιχειρηματίας κατάλαβε πως δεν υπήρχε ελπίδα να τον αφήσουν στην ησυχία του.*
- *Εκατομμύρια πραγματάκια απ' αυτά που βλέπουμε καμιά φορά στον ουρανό.*
 - *Μύγες;*
 - *Όχι, κάτι πραγματάκια που λάμπουν.*

- Μέλισσες;
- Όχι, όχι. Κάτι πραγματάκια χρυσαφένια, που κάνουν τους τεμπέληδες να ονειροπολούν. Εγώ, όμως, είμαι σοβαρός. Δεν έχω χρόνο για ονειροπολήσεις.
- Α, αστέρια;
- Ναι, το βρήκες. Αστέρια...

(Απόσπασμα από: “Ο μικρός πρίγκιπας” του Antoine de Saint-Exupéry)

ΔΙΔΑΓΜΑ: Ποτέ, μα ποτέ, μην ξεχνάτε τις μονάδες που χαρακτηρίζουν τα φυσικά μεγέθη των μετρήσεων σας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Μέτρησα τη χρονική στιγμή έναρξης του 1^{ου} εργαστηρίου Φυσικής
 - (i) Η μέτρηση μου υπόκειται σε
 - A. τυχαίο σφάλμα
 - B. σφάλμα ανάγνωσης
 - Γ. σφάλμα διακριτικής ικανότητας
 - Δ. Συστηματικό σφάλμα
 - (ii) αν το ρολόι έχει μόνο το μικρό δείκτη (ώρες), το σφάλμα μέτρησης μου είναι:
 - A. 1 ώρα
 - B. περίπου 1 τέταρτο
 - Γ. ½ ώρα
 - Δ. 10 λεπτά
 - (iii) αν το ρολόι έχει μόνο μικρό δείκτη (ώρες) και λεπτοδείκτη, το σφάλμα μέτρησης μου είναι:
 - A. μισό λεπτό
 - B. ένα λεπτό
 - Γ. πολλά λεπτά
 - Δ. κανένα
 - (iv) αν το ρολόι έχει και δείκτη για τα δευτερόλεπτα, το σφάλμα μέτρησης μου είναι:
 - A. μηδέν
 - B. ένα δευτερόλεπτο
 - Γ. ασήμαντο
 - Δ. μισό δευτερόλεπτο
 - (v) αν το ρολόι είναι ηλεκτρονικό με ακρίβεια σε δέκατο του δευτερολέπτου, το σφάλμα της μέτρησης μου είναι:
 - A. αμελητέο
 - B. 0,5 του δευτερολέπτου
 - Γ. 0,1 του δευτερολέπτου
 - Δ. 0.05 του δευτερολέπτου
2. 10 φοιτητές μέτρησαν τη χρονική στιγμή έναρξης του 1^{ου} εργαστηρίου Φυσικής
 - (i) Αν η μέτρηση με χρονόμετρα ακρίβειας 0,1 sec, η εκτίμηση της χρονικής στιγμής έναρξης του 1^{ου} εργ. Φυσικής θα υπόκειται κυρίως σε:

- (Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)
- A. σφάλματα ανάγνωσης των ρολογιών
 - B. σφάλματα βαθμονόμησης των ρολογιών
 - Γ. τυχαία σφάλματα
 - Δ. σφάλματα διακριτικής ικανότητας των ρολογιών
- (ii) Αν η μέτρηση έγινε με ρολόγια που έχουν μόνο μικρό δείκτη (ώρες) τότε η εκτίμηση της χρονικής στιγμής έναρξης θα υπόκειται κυρίως σε:
- (Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)
- A. σφάλματα ανάγνωσης των ρολογιών
 - B. σφάλματα βαθμονόμησης των ρολογιών
 - Γ. τυχαία σφάλματα
 - Δ. σφάλματα διακριτικής ικανότητας των ρολογιών
- (iii) Το σφάλμα εκτίμησης της χρονικής στιγμής έναρξης δίνεται ως εξής:
- A. υπολογίζουμε τη μέση τιμή (\bar{t}) και τυπική της απόκλιση (σ) εξαιτίας των τυχαίων σφαλμάτων. Συγκρίνουμε το σ με το σφάλμα διακριτικής ικανότητας των ρολογιών και κρατάμε το μικρότερο.
 - B. υπολογίζουμε το σφάλμα κάθε μέτρησης και βρίσκουμε τη μέση τιμή του
 - Γ. υπολογίζουμε τα σφάλματα ανάγνωσης και βαθμονόμησης των ρολογιών και κρατάμε το μεγαλύτερο
 - Δ. υπολογίζουμε τη μέση τιμή (\bar{t}) και τυπική της απόκλιση (σ) εξαιτίας των τυχαίων σφαλμάτων. Συγκρίνουμε το σ με το σφάλμα διακριτικής ικανότητας των ρολογιών και κρατάμε το μεγαλύτερο
3. (i) Αν μετρήσω 7 φορές το χρόνο πτώσης μιας σφαίρας από τα 20m χρησιμοποιώντας ένα ελαττωματικό χρονόμετρο που χάνει 1 sec κάθε λεπτό τότε η εκτίμηση μου θα υπόκειται σε:
- (Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)
- A. τυχαία σφάλματα
 - B. σφάλματα ανάγνωσης
 - Γ. συστηματικά σφάλματα
 - Δ. σφάλματα διακριτικής ικανότητας
4. Ένας φυσικός μετά από σειρά μετρήσεων υπολογίζει τη σταθερά $g = (9,81 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$. Ένας γεωλόγος εκτιμά ότι ένα σημαντικό γεωλογικό φαινόμενο έλαβε χώρα πριν από ένα εκατομμύριο χρόνια, έναν αιώνα πάνω-κάτω. Ποια εκτίμηση έχει τη μεγαλύτερη ακρίβεια;
- A. του φυσικού αφού αναφέρεται σε sec.
 - B. του φυσικού αφού το σφάλμα της εκτίμησης του είναι μικρότερο ($0,05 < 100$)
 - Γ. του φυσικού αφού αναφέρεται σε μέγεθος $9,81 < 1.000.000$
 - Δ. του γεωλόγου αφού σχετικό σφάλμα $100/1.000.000 < 0,05/9,81$
5. Δύο φοιτητές A και B μέτρησαν τη διάμετρο d σφαιριδίων και οι μετρήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα ($v = \text{πολλαπλότητα της μέτρησης}$)

A		B	
v	d(mm)	v	d (mm)
1	1.01	1	1.01
3	1.02	1	1.03
6	1.03	1	1.04
8	1.04	1	1.05

(i) Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;

$$A. \bar{d}_A = \frac{1 \cdot 1.01 + 3 \cdot 1.02 + 6 \cdot 1.03 + 8 \cdot 1.04}{18}$$

$$B. \bar{d}_B = \frac{1 \cdot 1.01 + 1 \cdot 1.03 + 1 \cdot 1.04 + 1 \cdot 1.05}{4}$$

$$C. \bar{d}_A = \frac{1.01 + (3 \cdot 1.02) + (6 \cdot 1.03) + (8 \cdot 1.04)}{4}$$

$$D. \bar{d}_A = \frac{1.01 + (3 \cdot 1.02) + (6 \cdot 1.03) + (8 \cdot 1.04)}{18}$$

(ii) Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;

$$A. \delta \bar{d}_A = \sigma \bar{d}_A = \sqrt{\frac{(1.01 - \bar{d}_A)^2 + (1.02 - \bar{d}_A)^2 + (1.03 - \bar{d}_A)^2 + (1.04 - \bar{d}_A)^2}{4(4-1)}}$$

$$B. \delta \bar{d}_A = \sigma \bar{d}_A = \sqrt{\frac{(1.01 - \bar{d}_A)^2 + 3 \cdot (1.02 - \bar{d}_A)^2 + 6 \cdot (1.03 - \bar{d}_A)^2 + 8 \cdot (1.04 - \bar{d}_A)^2}{4(4-1)}}$$

$$Γ. \delta \bar{d}_B = \sigma \bar{d}_B = \sqrt{\frac{(1.01 - \bar{d}_B)^2 + (1.03 - \bar{d}_B)^2 + (1.04 - \bar{d}_B)^2 + (1.05 - \bar{d}_B)^2}{4(4-1)}}$$

$$Δ. \delta \bar{d}_A = \sigma \bar{d}_A = \sqrt{\frac{(1.01 - \bar{d}_A)^2 + 3 \cdot (1.02 - \bar{d}_A)^2 + 6 \cdot (1.03 - \bar{d}_A)^2 + 8 \cdot (1.04 - \bar{d}_A)^2}{18(18-1)}}$$

(iii) Τι περιμένετε ότι θα ισχύει για τα δύο σετ μετρήσεων;

A. Η μέση τιμή του A διαφέρει κατά πολύ αυτής του B

B. Το απόλυτο σφάλμα του A είναι μεγαλύτερο του B

Γ. Το σχετικό σφάλμα του A είναι μικρότερο του B

Δ. Η κατανομή Gauss «στενότερη» για το B

6. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι λανθασμένες; Γράψτε δίπλα τις διορθωμένες.

(9,47 ± 0,03) sec

(5,6 ± 0,8) κρούσεις/min

(45,378 ± 0,8·10⁻¹) cm²

(0,55 ± 0,0038) cal/gr grad

(598 ± 28) φοιτητές

7. (i) Αν μετράτε κάποια μεγέθη (π.χ. x, y) και από αυτά θέλετε να υπολογίσετε ένα άλλο μέγεθος (π.χ. S) μέσω μιας συναρτησιακής σχέσης που συνδέει το ζητούμενο με τα μετρούμενα μεγέθη (π.χ. S = x/y), τότε

(Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)

A. Η μέση τιμή του ζητούμενου μεγέθους S θα προκύπτει από την εφαρμογή της σχέσης που το προσδιορίζει στις μέσες τιμές των μετρούμενων μεγεθών ($\bar{S} = \bar{x} / \bar{y}$)

B. Δεν υπάρχει σφάλμα για το ζητούμενο μέγεθος αφού δεν μετρήθηκε άμεσα

Γ. Υπάρχει σφάλμα για το ζητούμενο μέγεθος και υπολογίζετε από την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής του

Δ. Υπάρχει σφάλμα για το ζητούμενο μέγεθος το οποίο προκύπτει από τη μετάδοση των σφαλμάτων των μετρούμενων μεγεθών.

(ii) Αν για τον υπολογισμό της S (βλέπε 5i) δίνεται σφάλμα δx μόνο για το μετρούμενο μέγεθος x (οι οδηγίες της άσκησης μας λένε να θεωρήσουμε το y χωρίς σφάλμα, δy=0)

A. $\bar{S} = \bar{x} / y$ και το S δεν έχει σφάλμα

B. $\bar{S} = \bar{x} / y$ και δS = δx ώστε τελικά $S = \bar{S} \pm \delta S$

Γ. $\bar{S} = \bar{x} / y$ και δS = δx/y ώστε τελικά $S = \bar{S} \pm \delta S$

Δ. $\bar{S} = \bar{x}$ και δS = δx ώστε τελικά $S = \bar{S} \pm \delta S$

(ii) Αν για τον υπολογισμό της S (βλέπε 5i) δίνεται σφάλμα δx για το μετρούμενο μέγεθος x και δy για το μετρούμενο μέγεθος y

A. $\bar{S} = \bar{x} / \bar{y}$ και το S δεν έχει σφάλμα

B. $\bar{S} = \bar{x} / \bar{y}$ και δS = δx / δy ώστε τελικά $S = \bar{S} \pm \delta S$

Γ. $\bar{S} = \bar{x} / \bar{y}$ και δS = δx + δy ώστε τελικά $S = \bar{S} \pm \delta S$

$$\Delta. \bar{S} = \bar{x} / \bar{y} \text{ και } \delta S = \frac{\delta x}{\bar{y}} + \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} \delta y \text{ ώστε τελικά } S = \bar{S} \pm \delta S$$

8. (i) Η ένταση ακτινοβολίας γ που διέρχεται από υλικό πάχους x και συν/στη γραμμικής απορρόφησης μ , είναι: $I = I_0 e^{-\mu x}$ (I_0 ένταση προσπίπτουσας ακτινοβολίας). Μετρήθηκαν:

$$I_0 \pm \delta I_0 = (520 \pm 10) \frac{\text{κρ.}}{\text{min}}, \quad I \pm \delta I = (310 \pm 5) \frac{\text{κρ.}}{\text{min}} \text{ και } x \pm \delta x = (4,74 \pm 0,02) \text{mm} .$$

(Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)

A. Ο υπολογισμός της εκτιμώμενης μέσης τιμής του μ θα είναι το αποτέλεσμα

$$\text{της πράξης } \mu = \frac{1}{4,74} \ln \frac{520}{310} \text{ mm}^{-1}$$

$$\text{B. Το σφάλμα } \delta \mu = \frac{1}{0,02} \ln \frac{10}{5} \text{ mm}^{-1}$$

$$\text{Γ. } \delta \mu = (10 + 5 + 0,02) \text{ mm}^{-1}$$

$$\Delta. \delta \mu = \frac{1}{4,74^2} \left(\ln \frac{520}{310} \right) 0,02 + \frac{1}{4,74} \frac{10}{520} + \frac{1}{4,74} \frac{5}{310} \text{ mm}^{-1}$$

- (ii) Αν για την βί δίνεται το x χωρίς σφάλμα μέτρησης ($\delta x = 0$), δηλ. $x = 4,74$ mm

(Ποια/ες από τις παρακάτω είναι σωστές;)

A. Ο υπολογισμός της εκτιμώμενης μέσης τιμής του μ θα είναι το αποτέλεσμα

$$\text{της πράξης } \mu = \frac{1}{4,74} \ln \frac{520}{310} \text{ mm}^{-1}$$

$$\text{B. Το σφάλμα } \delta \mu = \ln \frac{10}{5} \text{ mm}^{-1}$$

$$\text{Γ. } \delta \mu = (10 + 5 + 0,02) \text{ mm}^{-1}$$

$$\Delta. \delta \mu = \frac{1}{4,74} \frac{10}{520} + \frac{1}{4,74} \frac{5}{310} \text{ mm}^{-1}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books 1982.

2) *Εργαστήριο Φυσικής Εισαγωγικά μαθήματα για τα σφάλματα*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής 1988.

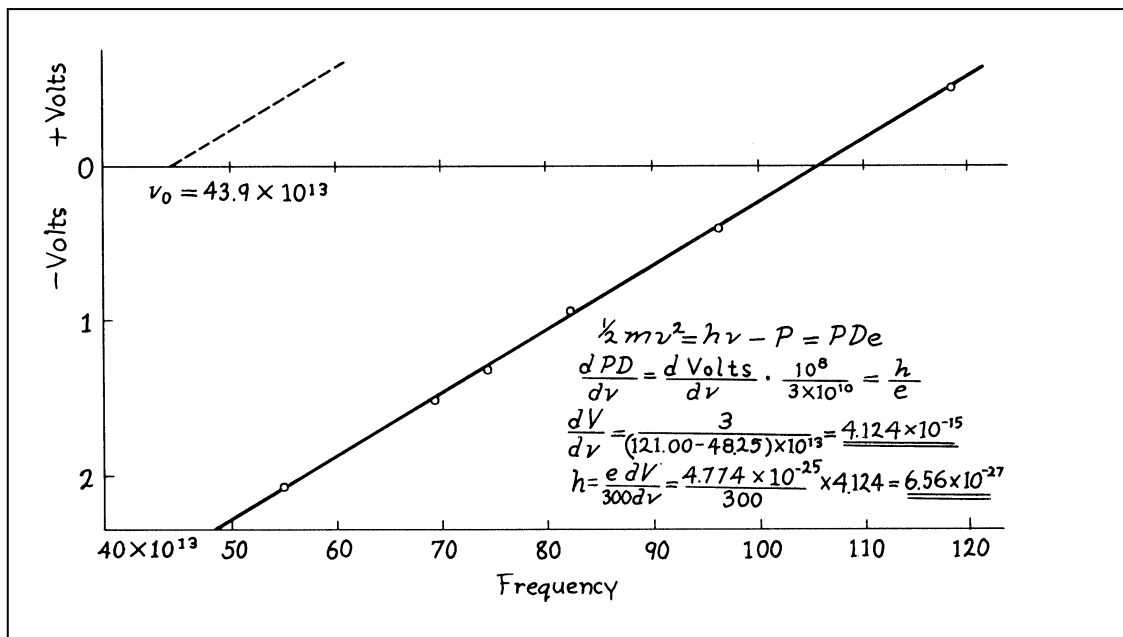
4) Χ. Δαμιανού, Μ. Κούτρας, *Εισαγωγή στη Στατιστική Μέρος Ι*. Εκδόσεις Αίθρα.

5) L. Kirkup, *Experimental Methods*. J. Wiley & Sons 1994.

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Πειραματικά αποτελέσματα και
υπολογισμοί του R.A. Millikan πάνω
στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
[Physical Review 7, 355 (1916)]



2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο εργαστήριο γίνεται συχνά η μέτρηση ενός μεγέθους y καθώς μεταβάλλεται άλλο φυσικό μέγεθος x . Το μέγεθος x θεωρείται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη ενώ το ζεύγος τιμών (x,y) είναι αυτό που αποκαλούμε **μέτρηση**. Κατά την επεξεργασία των πειραματικών αυτών δεδομένων “κατασκευάζεται”, σχεδόν πάντα, γραφική απεικόνιση των μετρήσεων (x,y) που μας επιτρέπει να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα ως προς:

- την εξέλιξη του φαινομένου. Από τη μορφή της γραφικής παράστασης διαπιστώνεται ποιά σχέση συνδέει την y με την x . Ποιού βαθμού π.χ είναι η συνάρτηση $y = f(x)$ ως προς x .

- τη συμφωνία των πειραματικών μετρήσεων με τις θεωρητικά αναμενόμενες. Μπορούμε δηλαδή να ελέγχουμε κατά πόσο η πειραματική καμπύλη συμπίπτει με την θεωρητικά αναμενόμενη, για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων ως προς την πιστότητα του πειράματος ή της θεωρίας.

- την τιμή ενός τρίτου φυσικού μεγέθους που υπολογίζεται έμμεσα από τη γραφική παράσταση των μετρούμενων μεγεθών όπως π.χ. μεγέθη που είναι ίσα ή ανάλογα της κλίσεως της καμπύλης σε δεδομένο σημείο της, δηλαδή της παραγώγου : $\frac{dy(x)}{dx}$ ή του εμβαδού ανάμεσα στην καμπύλη και τον άξονα x , δηλαδή του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} y(x)dx$ (α, β οι οριακές τιμές του x).

2.2 ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων γίνεται συνήθως σε χιλιοστομετρικό χαρτί (millimétré). Σε μερικές όμως περιπτώσεις απαιτείται ημιλογαριθμικό ή (πολύ σπάνια) λογαριθμικό χαρτί.

2.2.1 Γραμμική Κλίμακα

Η γραμμική κλίμακα είναι η πιο συνηθισμένη μορφή κλίμακας, που θα συναντήσουμε στις εργαστηριακές ασκήσεις. Για την ορθή απεικόνιση των μετρήσεων, η οποία παρέχει τη δυνατότητα εξαγωγής χρήσιμων συμπερασμάτων, θα πρέπει να ακολουθούνται προσεχτικά οι ακόλουθοι (καθολικά αποδεκτοί) κανόνες:

- Οι κλίμακες των αξόνων εκλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η απεικόνιση να είναι ευδιάκριτη και η γραφική παράσταση να αναπτύσσεται σε τετραγωνικό περίπου τμήμα του μιλλιμετρέ.

- Κάθε κλίμακα πρέπει να είναι οπωσδήποτε ισοδιάστατη. Τα μοναδιαία διαστήματα των δύο κλιμάκων δεν είναι απαραίτητο να είναι ίδια.

- Ως μοναδιαίο διάνυσμα εκλέγεται απλός ακέραιος ή δεκαδικός αριθμός, π.χ. 0,2, 0,5, 1, 10 κ.λ.π. Κλασματικοί αριθμοί, όπως $1/14$ ή $1/3=0,3333$ δεν αποτελούν κατάλληλα μοναδιαία διαστήματα.

- Παράλληλα με κάθε άξονα σχεδιάζεται βέλος που η κορυφή του δείχνει τη φορά αυξήσεως της τιμής του αντίστοιχου μεγέθους. Στην αρχή του βέλους τοποθετείται το σύμβολο του μεγέθους (π.χ. U ή i ή t) και κοντά στην κορυφή του η αντίστοιχη μονάδα μετρήσεως (V ή A ή sec), αν υπάρχει.

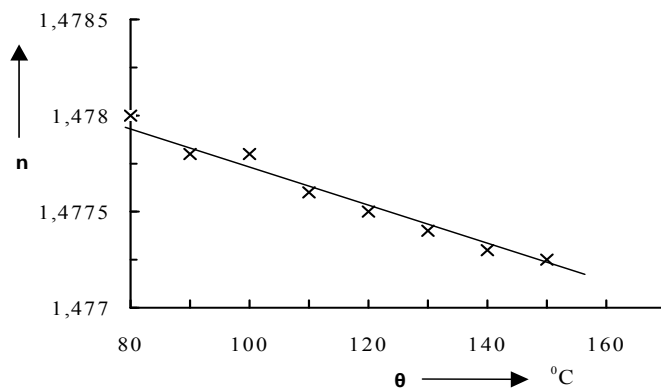
• Για να σχηματισθούν οι κλίμακες σημειώνονται δίπλα στους άξονες μόνο πολλαπλάσια των μοναδιαίων διαστημάτων και ποτέ οι ίδιες οι μετρήσεις.

Στο ακόλουθο παράδειγμα περιγράφεται η διαδικασία για τη γραφική απεικόνιση δεδομένων μετρήσεων ώστε να κατανοηθεί ο τρόπος χάραξης μιας καμπύλης σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Έστω ότι, κατά τη μέτρηση του δείκτη διαθλάσεως n υγρού, διαπιστώθηκε πως η τιμή του μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών: 1,478 και 1,4772, όταν η θερμοκρασία παίρνει αντίστοιχα τιμές απο 80° μέχρι 150° C, σύμφωνα με τις μετρήσεις του πίνακα 2.1

Πίνακας 2.1

α/α	θ ($^{\circ}$ C)	n
1	80	1,4785
2	90	1,4778
3	100	1,4778
4	110	1,4776
5	120	1,4775
6	130	1,4774
7	140	1,4773
8	150	1,4772

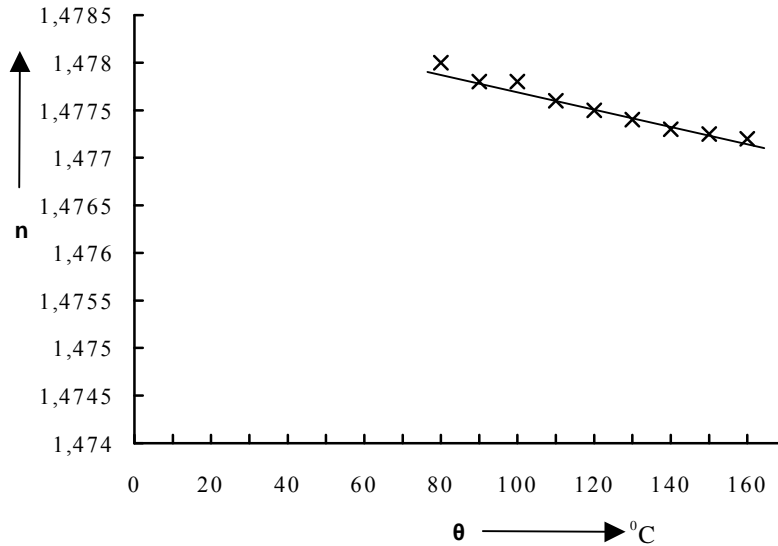
Στον άξονα της θερμοκρασίας (θ) λαμβάνεται ως μοναδιαίο διάστημα ίσο με 10° C, που αντιστοιχούν σε 1 cm του χαρτιού (Σχήμα 2.1). Για τον άξονα του δείκτη διάθλασης (n) λαμβάνεται ως μοναδιαίο διάστημα το 0,00025 που αντιστοιχεί επίσης σε 1 cm του χαρτιού και η γραφική παράσταση αναπτύσσεται σε τετραγωνική περίπου επιφάνεια . Στο διάγραμμα έχουν σημειωθεί στον άξονα της θ οι τιμές 80, 100, 120, 140, 160 ($^{\circ}$ C) και στον άξονα του n οι τιμές 1.4770, 1.4775, 1.478, 1.4785. Η μέτρηση π.χ. (90° C, 1.4778) έχει εντοπισθεί μεταξύ των ενδείξεων 80° C – 100° C και 1.4775 – 1.4780 αλλά δεν έχουν σημειωθεί τα σημεία 90° C και 1.4778 στους άξονες.



Σχήμα 2.1

Παρατηρούμε ακόμη ότι, στο παράδειγμα που εξετάζουμε, οι τιμές του n βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή μεταξύ του 1,4772 και του 1,4780. Η κλίμακα του άξονα αυτού δεν πρέπει να επεκτείνεται πέρα από αυτήν την περιοχή και όπως παρατηρούμε στο διάγραμμα 2.1 έχει περιορισθεί μεταξύ των τιμών 1,4770 και 1.4785.

Το ίδιο συμβαίνει και με την κλίμακα του άξονα της θερμοκρασίας η οποία περιορίζεται μεταξύ των 80° C και 160° C. Αν ξεφύγουμε από τις περιορισμένες αυτές περιοχές, προσπαθώντας ίσως να συμπεριλάβουμε το “0” ως αρχή του άξονα, το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 2.2 και δεν αποτελεί σωστή μορφή διαγράμματος. Το να προσπαθήσουμε επιλέον να συμπεριλάβουμε το 0 ως κοινή αρχή των αξόνων, μας οδηγεί στο σχεδιασμό ενός διαγράμματος ακατάλληλου να μας οδηγήσει σε οποιοδήποτε συμπέρασμα. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το 0 λαμβάνεται ως κοινή αρχή των αξόνων μόνο όταν μεταξύ των μετρήσεων περιλαμβάνεται και η (0,0).



Σχήμα 2.2

2.2.2 Λογαριθμική κλίμακα

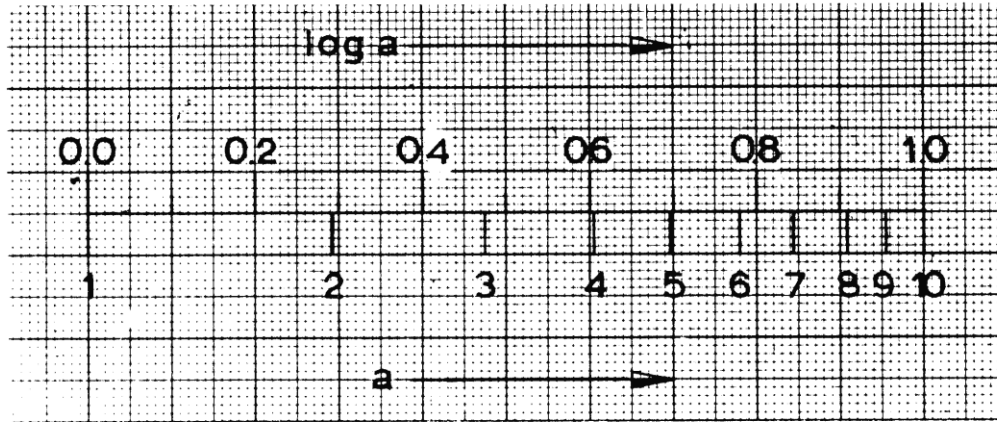
Μερικές φορές το ένα από τα δύο μεγέθη (ή και τα δύο) μεταβάλλεται μέσα σε τόσο μεγάλη περιοχή και με τέτοιο τρόπο, ώστε δεν είναι δυνατή η ευκρινής απεικόνιση της μεταβολής με την βοήθεια γραμμικής κλίμακας. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν τα δύο φυσικά μεγέθη συνδέονται με εκθετικές συναρτήσεις. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται συχνά η *λογαριθμική κλίμακα*.

Η κλίμακα αυτή χαράζεται ως εξής: Έστω ότι ο λογάριθμος ενός μεγέθους α μεταβάλλεται από 0 έως 1. Τότε το μέγεθος α μεταβάλλεται από 1 έως 10. Οι τιμές του logα, για ακέραιες τιμές του α, δίνονται στον Πίνακα 2.2:

Πίνακας 2.2

α	logα	α	logα
1	0,000	6	0,779
2	0,301	7	0,846
3	0,478	8	0,904
4	0,603	9	0,955
5	0,699	10	1,000

Σε μια γραμμική κλίμακα παίρνουμε μόνο τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές του $\log a$ του Πίνακα 2.2 και στις θέσεις αυτών σημειώνουμε τις αντίστοιχες τιμές του a . Με τον τρόπο αυτό έχει κατασκευαστεί μία κλίμακα στην οποία σημειώνονται τα a , αλλά οι αντίστοιχες αποστάσεις από την αρχή είναι ανάλογες του $\log a$ (Σχήμα 2.3). Η κλίμακα αυτή ονομάζεται λογαριθμική και παρουσιάζει χαρακτηριστικές διαφορές με την γραμμική κλίμακα:



Σχήμα 2.3

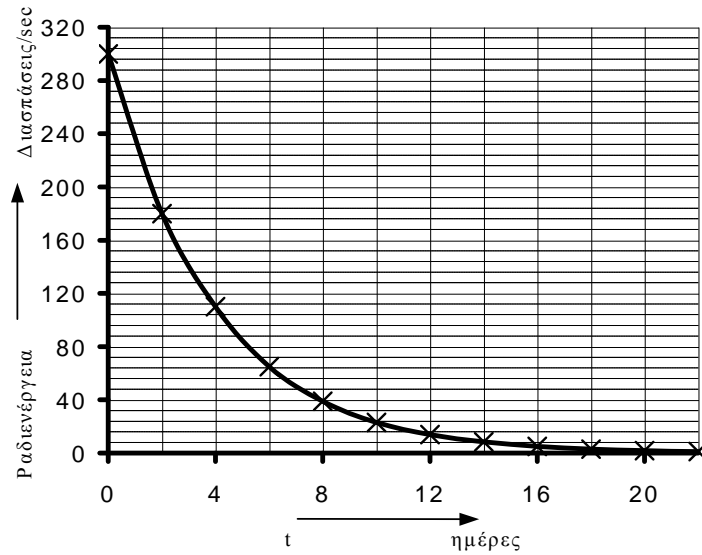
- Δε σημειώνεται ποτέ η ένδειξη 0, μία και ο αντίστοιχος λογάριθμος τείνει προς το $-\infty$.
- Η χάραξη είναι ανισοδιαστατη, με χαρακτηριστική πύκνωση στις μεγάλες ενδείξεις. Η απόσταση μεταξύ των αριθμών 2 και 3 π.χ. είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των 8 και 9 γιατί και οι αντίστοιχες διαφορές μεταξύ των λογαρίθμων είναι πολύ μεγαλύτερες.
- Μία εκθετική καμπύλη, με την βοήθεια της λογαριθμικής κλίμακας, μετατρέπεται σε ευθεία.

Για παράδειγμα, έστω σειρά μετρήσεων που δίνουν τη μεταβολή της ραδιενέργειας υλικού σε συνάρτηση του χρόνου. Στον πίνακα 2.3 σημειώνονται οι μετρήσεις αυτές για το ισότοπο $Au - 192$. Η ραδιενέργεια εκφράζεται σε διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο και ο χρόνος σε ημέρες.

Πίνακας 2.3

t (ημέρες)	Ραδιενέργεια (Διασπάσεις / sec)	t (ημέρες)	Ραδιενέργεια (Διασπάσεις / sec)
0	$300 = 3,0 \cdot 10^2$	12	$14 = 1,4 \cdot 10^1$
2	$180 = 1,8 \cdot 10^2$	14	$8,4 = 8,4 \cdot 10^0$
4	$110 = 1,1 \cdot 10^2$	16	$5 = 5,0 \cdot 10^0$
6	$65 = 6,5 \cdot 10^1$	18	$3 = 3,0 \cdot 10^0$
8	$39 = 3,9 \cdot 10^1$	20	$1,8 = 1,8 \cdot 10^0$
10	$23 = 2,3 \cdot 10^1$	22	$1,1 = 1,1 \cdot 10^0$

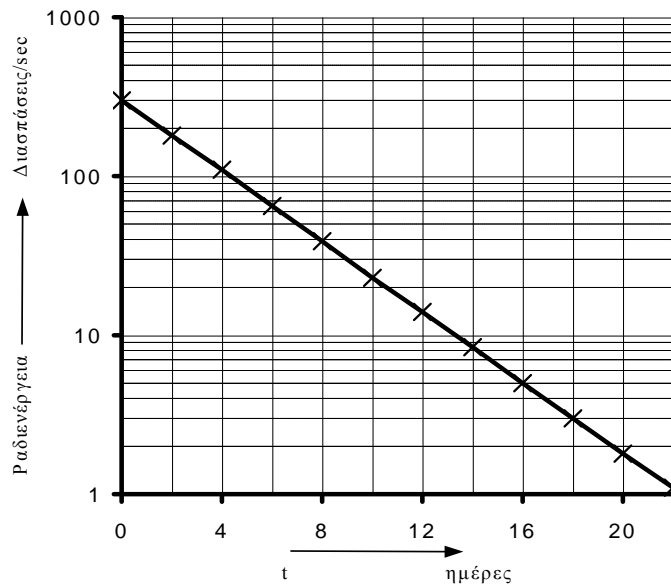
Παρατηρείται ότι, εάν για τη γραφική παράσταση του φαινομένου αυτού χρησιμοποιηθεί γραμμική κλίμακα (Σχήμα 2.4), θα σημειωθούν με την ίδια ακρίβεια οι μετρήσεις και των τριών περιοχών που διακρίνονται στον πίνακα 2.3. Δηλ. η σχετική ακρίβεια με την οποία σημειώνονται οι τελευταίες χρονικά μετρήσεις είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη για τις πρώτες.



Σχήμα 2.4

Αν όμως οι τιμές της ραδιενέργειας σημειωθούν σε λογαριθμική κλίμακα (Σχήμα 2.5) η σχετική ακρίβεια των μετρήσεων είναι πάντα η ίδια.

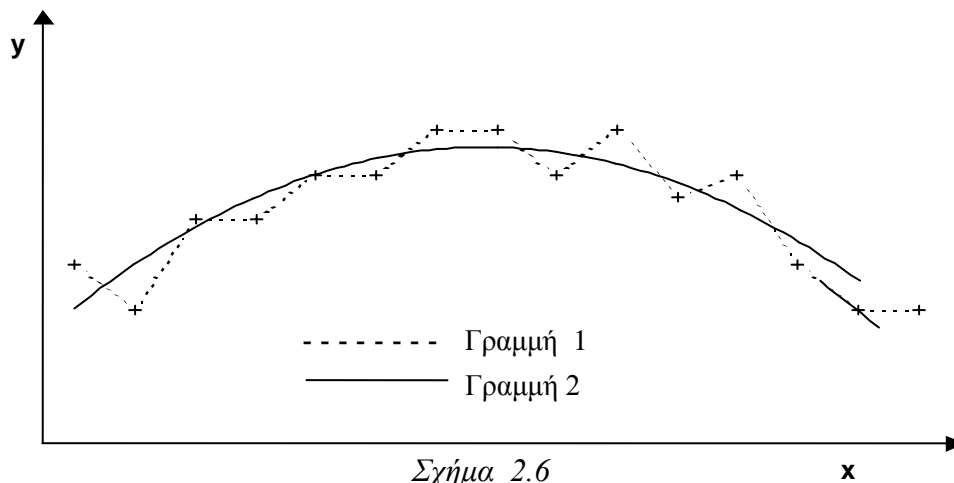
Το χαρτί που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό (Σχήμα 2.5), δηλ. το χαρτί με τη μία κλίμακα λογαριθμική και την άλλη γραμμική, ονομάζεται **ημιλογαριθμικό**.



Σχήμα 2.5

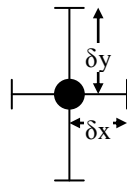
2.2.3 ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατά την χάραξη της γραφικής απεικόνισης για τη συνάρτηση: $y = f(x)$ δεν είναι απαραίτητο η καμπύλη να διέρχεται από όλες τις μετρήσεις. Συνήθως τα πειραματικά αποτελέσματα, ακόμα και τα κατά το δυνατόν πιο αξιόπιστα, δε βρίσκονται ακριβώς πάνω σε μια ομαλή καμπύλη. Αν π.χ. χαράξουμε τη καμπύλη που περνά από όλα τα σημεία του σχήματος 2.6, θα προκύψει η εστιγμένη γραμμή (1). Η εστιγμένη καμπύλη είναι εντελώς λάθος γιατί δείχνει ότι, στα σημεία αυτά, το μετρούμενο μέγεθος αλλάζει αλματωδώς κάποιες ιδιότητες του με αποτέλεσμα το διάγραμμα τελικά να μην αντιπροσωπεύει κανένα νόμο (π.χ. το μέγεθος που αντιπροσωπεύει η κλίση της καμπύλης αλλάζει ασυνεχώς). Η σωστή καμπύλη φαίνεται στο ίδιο διάγραμμα και είναι η γραμμή (2). Η γραμμή αυτή δε διέρχεται ακριβώς από τις μετρήσεις αλλά ανάμεσά τους έτσι ώστε να είναι συνεχής και ομαλή.



Σχήμα 2.6

Εξάλλου φέροντας τα σημεία στο σχήμα μας δεν αναφερθήκαμε καθόλου στα σφάλματα που όπως είπαμε στην άσκηση 1 συνοδεύουν κάθε μέτρηση και κάθε πειραματικό αποτέλεσμα. Τα σφάλματα πρέπει πάντα να χαράσσονται στο διάγραμμα για κάθε σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 όπου τα δx και τα δy είναι τα σφάλματα (ανάγνωσης, μεσης τιμής η σύνθετα) ενώ το μέγεθος των γραμμών ανταποκρίνεται στο μέγεθος των σφαλμάτων σύμφωνα με τις χρησιμοποιούμενες για τα x και y κλίμακες.



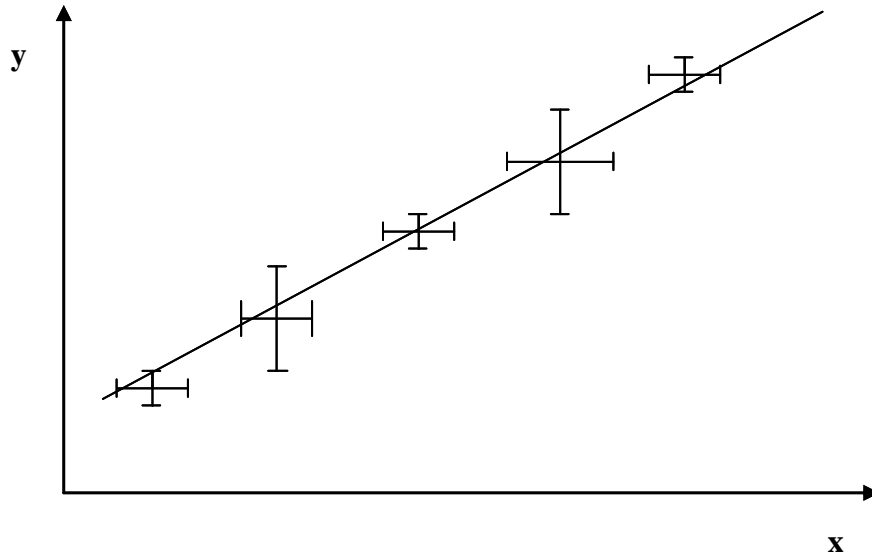
Σχήμα 2.7

Για τη χάραξη της καμπύλης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι εξής βασικές αρχές:

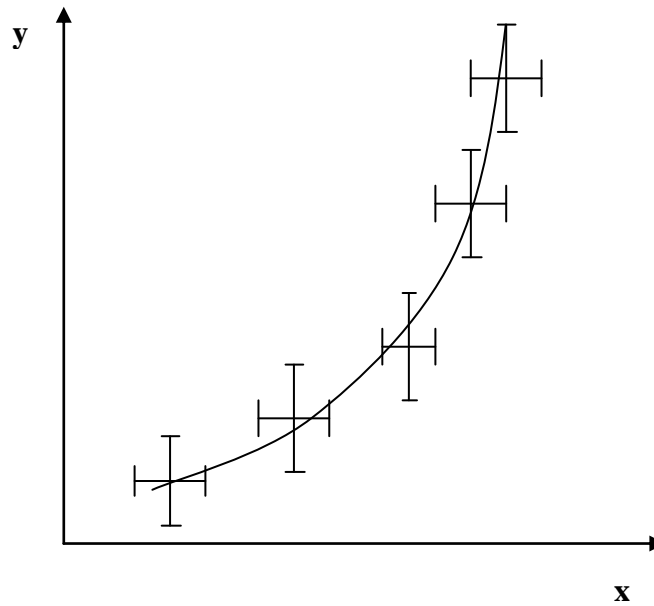
- Η καμπύλη $y=f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής και ομαλή.
- Η καμπύλη χαράσσεται έτσι ώστε, όσες μετρήσεις δε βρίσκονται πάνω σε αυτή, να φαίνονται και από τις δύο πλευρές της κατά το δυνατόν συμμετρικά.

- Η καμπύλη πρέπει να διέρχεται όσο το δυνατόν μέσα από τις περιοχές σφαλμάτων των μετρήσεων. Σε περίπτωση που μία μέτρηση δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες, επειδή βρίσκεται πολύ μακριά από αυτές και από την πιθανή καμπύλη, δεν λαμβάνεται υπόψη κατά τη χάραξη παρά το γεγονός ότι σημειώνεται.

Έτσι οι καμπύλες χαράσσονται όπως φαίνονται στα σχήματα 2.8 και 2.9



Σχήμα 2.8



Σχήμα 2.9

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

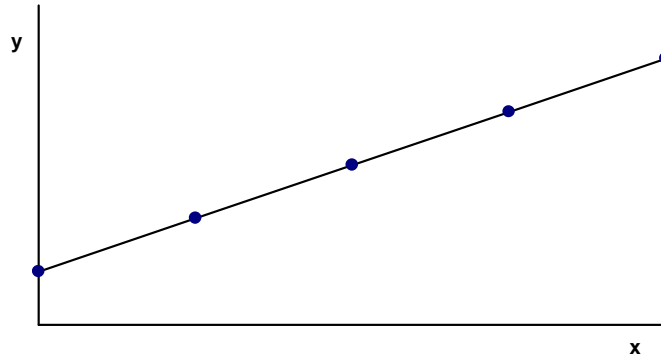
Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως μπορούμε να χαράξουμε γραφική παράσταση έχοντας ένα πίνακα τιμών. Θα ασχοληθούμε τώρα με την χάραξη ευθειών, αφού πολύ συχνά στο Εργαστήριο οι σχέσεις που έχουμε είναι ή τις κάνουμε γραμμικές.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο ποσότητες x, y οι οποίες γνωρίζουμε ότι συνδέονται με μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$y = A + Bx \tag{2.1}$$

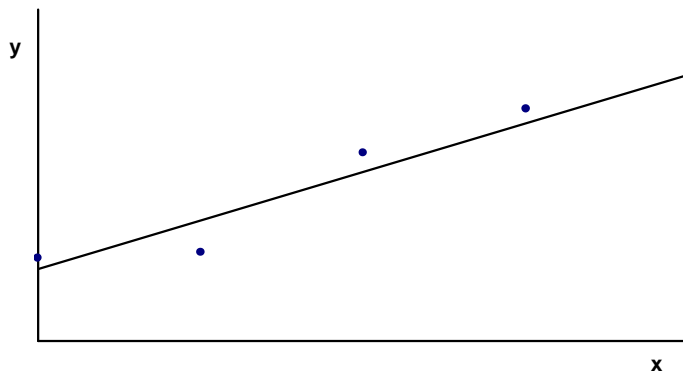
όπου τα A και B είναι σταθερές (το B είναι η κλίση της ευθείας ενώ το A είναι η τεταγμένη επί την αρχή). Ένα παράδειγμα δύο τέτοιων ποσοτήτων που συνδέονται με γραμμική σχέση είναι η ταχύτητα u (εξαρτημένη μεταβλητή) και ο χρόνος t (ανεξάρτητη μεταβλητή) στην ελεύθερη πτώση σώματος, αφού ως γνωστό ισχύει η σχέση: $u = u_0 + gt$

Αν τώρα καταφέραμε να μετρήσουμε για τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_N της ανεξάρτητης μεταβλητής τις αντίστοιχες τιμές y_1, y_2, \dots, y_N της εξαρτημένης μεταβλητής με απόλυτη ακρίβεια, τότε θα περιμέναμε ότι τα σημεία (x_i, y_i) θα βρίσκονταν ακριβώς πάνω σε μία ευθεία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.10

Επειδή, όμως, οι μετρήσεις δεν μπορεί να είναι «τέλειες» τα σημεία (x_i, y_i) θα κατανέμονται κατά τρόπο που μοιάζει περισσότερο με αυτόν του σχήματος που ακολουθεί:



Σχήμα 2.11

Υπάρχουν τώρα δύο ερωτήματα στα οποία θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε.

A) Γνωρίζοντας ότι οι μεταβλητές μας y και x συνδέονται με γραμμική σχέση, ποιά είναι η ευθεία γραμμή που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα; (δηλ. ποιές είναι οι τιμές των σταθερών A και B);

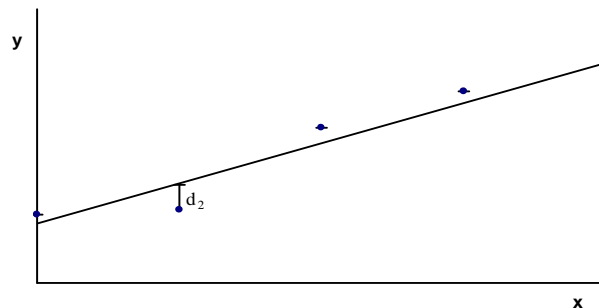
B) Πόσο καλά “συμμορφώνονται” οι μετρήσεις (x_i, y_i) με την γραμμική σχέση που περιμέναμε να έχουν;

2.3.1 Χάραξη της καλύτερης ευθείας

Ένας πρακτικός τρόπος για να αντιμετωπίσουμε το πρώτο ερώτημα είναι να χαράξουμε τη ζητούμενη ευθεία κατ’ εκτίμηση έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις αρχές χάραξης καμπύλης που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Ο τρόπος αυτός φέρει το προφανές μειονέκτημα εισαγωγής σφαλμάτων από την εκτίμηση του σχεδιαστή. Για να αποφύγουμε αυτά τα σφάλματα εισάγουμε έναν αναλυτικό τρόπο για την χάραξη αυτών των ευθειών.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για την μετρούμενη ποσότητα x τα σφάλματα είναι αμελητέα, ενώ για την y εμφανίζεται παντού το ίδιο σφάλμα δy . Τα πειραματικά σημεία που ορίζουν τις μετρήσεις (x_i, y_i) απεικονίζονται στο σχήμα (2.12). Η βέλτιστη ευθεία θα πρέπει να διέρχεται όσο πιο κοντά γίνεται από τα πειραματικά σημεία. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εκφράζεται από τέτοια A και B ώστε να ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα οι κατακόρυφες αποστάσεις (d_i) των πειραματικών σημείων από αυτήν. Τούτο επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$q = \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2 \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.12

Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο μιας συνάρτησης βρίσκεται απο τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου και επειδή εδώ έχουμε δύο μεταβλητές (τις A και B) πρέπει να μηδενιστούν ταυτόχρονα οι μερικές παράγωγοι δηλ.:

$$\frac{\partial q}{\partial A} = 0 \Rightarrow AN + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\frac{\partial q}{\partial B} = 0 \Rightarrow A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Από αυτό το σύστημα παίρνουμε σαν λύσεις των A και B τα:

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (2.3)$$

$$B = \frac{N \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (2.4)$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν τις καλύτερες εκτιμήσεις για τις σταθερές A και B με βάση τις μετρήσεις (x_i, y_i) που έχουμε. Επειδή ο υπολογισμός βασίστηκε στην ελαχιστοποίηση ενός αθροίσματος τετραγώνων γι' αυτό και η μέθοδος ονομάζεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**.

2.3.2 Σφάλματα των σταθερών A και B

Είναι φυσικό τώρα να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα σφάλματα στις σταθερές A και B. Χρησιμοποιώντας τη διάδοση των σφαλμάτων και έχοντας κατά νου τη βασική υπόθεση της προηγούμενης παραγράφου ότι δηλ. τα σφάλματα στις μετρήσεις της ποσότητας x είναι αμελητέα ενώ όλες οι μετρήσεις της ποσότητας y έχουν το ίδιο σφάλμα δy αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\delta A = \delta y \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}} \quad (2.5)$$

$$\delta B = \delta y \sqrt{\frac{N}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}} \quad (2.6)$$

Αυτό που απομένει τώρα είναι να εκτιμήσουμε το σφάλμα δy . Αφού έχουμε βρει τις τιμές των A και B μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τις διαφορές των πειραματικών από τις θεωρητικές τιμές του y και επομένως το σφάλμα θα είναι:

$$\delta y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2} \quad (2.7)$$

2.3.3 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Αρχικά, μπορούμε να απαντήσουμε ποιοτικά στο δεύτερο ερώτημα, δηλ. το κατά πόσο καλά οι μετρήσεις μας (x_i, y_i) συμμορφώνονται με την γραμμικότητα που περιμέναμε, εξετάζοντας πόσο μακριά ή κοντά είναι τα σημεία μας στην ευθεία που έχουμε χαράξει με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Εκτός όμως από αυτό το ποιοτικό κριτήριο υπάρχει και ένα ποσοτικό κριτήριο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και είναι ο αριθμός:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right]}} \tag{2.8}$$

Ο δείκτης r είναι μια αδιάστατη ποσότητα που ονομάζεται **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** και οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι ανάμεσα στο -1 και στο +1. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι όσο πιο κοντά στο +1 ή στο -1 είναι η τιμή του r τόσο καλύτερα ταιριάζουν οι μετρήσεις στην ευθεία και άρα υποστηρίζουν γραμμική σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Αντίθετα, όσο πιο κοντά πηγαίνουμε στο μηδέν, τόσο τα πειραματικά σημεία είναι μακριά από την ευθεία που χαράξαμε. Αναρωτηθείτε, με τη βοήθεια και της σχέσης (2.8), γιατί το “±1” και το “0” θεωρούνται κριτήρια για τις ακραίες περιπτώσεις.

Αριθμητικό παράδειγμα

Για παράδειγμα, ας υποθεθεί ότι στα άκρα ωμικής αντίστασης εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού U και μετράται το ρεύμα i που τη διαρρέει. Λαμβάνονται 11 διαφορετικές μετρήσεις καταγεγραμμένες στον Πίνακα 2.4. Η γραφική παράσταση των μετρήσεων αυτών δίνεται στο Σχ. 2.13. Πριν χαραχθεί η καμπύλη, η θεωρητική επεξεργασία μπορεί να έχει δώσει μια σχέση γραμμική ή μη γραμμική μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Πίνακας 2.4

α/α	U (Volt)	i (A)	U^2 (Volt) ²	i^2 (A) ²	U_i (Volt.A)
1	0,00	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,32	0,020	0,1024	0,0040	0,0064
3	0,83	0,030	0,6889	0,0090	0,0249
4	1,00	0,040	1,0000	0,0016	0,0400
5	1,20	0,048	1,4400	0,0023	0,0576
6	1,48	0,054	2,1904	0,0029	0,0799
7	1,50	0,060	2,2500	0,0036	0,0900
8	1,70	0,067	2,8900	0,0045	0,1139
9	1,85	0,070	3,4225	0,0049	0,1295
10	1,90	0,078	3,6100	0,0061	0,1482
11	2,40	0,090	5,7600	0,0081	0,2160
ΣU=14.18 Volt Σi=0.557 A (Σi) ² =0.3103 A ² ΣU ² =23.3542 Volt ² Σi ² =0.03532 A ² Σ(U.i)=0.9064 Volt.A					

Στην περίπτωση γραμμικής σχέσης, ($U=A+Bi$ για το παράδειγμα) υπολογίζονται με βάση τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα χαρακτηριστικά της ευθείας (κλίση B και τετμημένη A) από τις σχέσεις (2.4) και (2.3).

$$A = -0.0551 \text{ Volts}$$

$$B = 26,5654 \Omega \quad (= 26,5654 \text{ V/A})$$

Από τις σχέσεις (2.7), (2.5) και (2.6) βρίσκονται τα σφάλματα υπολογισμού των μεγεθών, τα οποία στο παράδειγμα αυτό είναι:

$$\delta U = 0,1 \text{ Volt}, \quad \delta A = 0,2 \text{ Volt} \quad \text{και} \quad \delta B = 1 \Omega$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η μέτρηση της τάσης έχει γίνει με σφάλμα 0.1 V και έχει υπολογισθεί ότι η ωμική αντίσταση R είναι ίση προς:

$$R = (27 \pm 1) \Omega.$$

2.7 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ

Συχνά σχέσεις μη γραμμικές μεταξύ δύο μεταβλητών, μετατρέπονται σε γραμμικές με κάποιο τέχνασμα για να είναι ευκολότερη η μελέτη των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Ως παράδειγμα εξετάζεται η σχέση μεταξύ της έντασης I της ακτινοβολίας γ (που διέρχεται από μεταλλικό φύλλο υλικού με γραμμικό συντελεστή απορρόφησης μ) με το πάχος x του φύλλου. Ισχύει:

$$I_x = I_0 e^{(-\mu x)}$$

όπου I_0 και I_x είναι η ένταση της ακτινοβολίας πριν και μετά την έξοδο της από το υλικό. Η σχέση αυτή είναι εκθετική και με τη χάραξή της δεν μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής απορροφήσεως μ . Αντίθετα, αν η σχέση αυτή μετατραπεί στην:

$$y = \ln \frac{I_0}{I_x} = \mu x$$

και ληφθεί ως νέα εξαρτημένη μεταβλητή y ο φυσικός λογάριθμος $\ln(I_0/I)$ και ως ανεξάρτητη μεταβλητή το πάχος x , προκύπτει γραμμική σχέση μεταξύ των x και y της οποίας η κλίση είναι ίση με μ .

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η σχέση $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$ που μας δίνει την περίοδο ταλάντωσης (T) μιάς μάζας (M) αναρτημένης σε ελατήριο σταθεράς k . Αν μετατρέψουμε τη σχέση αυτή στην $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sqrt{M}$ έχουμε μια γραμμική σχέση με εξαρτημένη μεταβλητή

$$y = T, \text{ ανεξάρτητη μεταβλητή } x = \sqrt{M} \text{ και κλίση τη σταθερά } B = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Σημείωση : Ισοδύναμη επιλογή είναι να μετατρέψουμε τη σχέση σε $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} M$ και να επιλέξουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το M και εξαρτημένη το T^2 , οπότε η κλίση αυτής της νέας γραμμικής σχέσης θα ορίζεται από τη σταθερά: $B = \frac{4\pi^2}{k}$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- 1) Στις γραφικές παραστάσεις πρέπει να σημειώνονται οπωσδήποτε τα πειραματικά σημεία και τα αντίστοιχα σφάλματά τους αν το επιτρέπει η κλίμακα των αξόνων.
- 2) Η κλίση και η τεταγμένη επι την αρχή, όταν πρόκειται για ευθεία, υπολογίζονται πάντα σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Δεδομένων των τιμών αυτών των σταθερών (A και B), η χάραξη της βέλτιστης ευθείας γίνεται διαλέγοντας αυθαίρετα δύο τιμές π.χ. των ανεξάρτητων μεταβλητών x_1 και x_2 οι οποίες βρίσκονται μέσα στην περιοχή των μετρήσεων και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες εξαρτημένες μεταβλητές $y_1 = A+Bx_1$ και $y_2 = A+Bx_2$. Βρίσκουμε τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) στη γραφική παράσταση από τα οποία φέρουμε τελικά την βέλτιστη ευθεία.
- 2) Όταν χρησιμοποιούμε τα A, B που υπολογίζουμε απο τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να βρούμε μια φυσική ποσότητα, θα υπολογίζουμε πάντα τα σφάλματα δA και δB ώστε απο τη θεωρία της διάδοσης σφαλμάτων να βρίσκουμε και το σφάλμα της ζητούμενης φυσικής ποσότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μέτρηση της Επιτάχυνσης της Βαρύτητας (g) σε ένα συγκεκριμένο τόπο με τη βοήθεια του Εκκρεμούς

ΜΕΘΟΔΟΣ

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι η περίοδος T και το μήκος L ενός απλού εκκρεμούς συνδέονται με τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Εάν το μήκος L θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή και η περίοδος T ως εξαρτημένη, είναι δυνατό να γίνει σειρά μετρήσεων (T, L) μετρώντας την περίοδο καθώς μεταβάλλεται το μήκος ενός εκκρεμούς. Η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε γραμμική και τότε από τη γραφική της παράσταση ο υπολογισμός της κλίσης της ευθείας θα μας οδηγήσει στον υπολογισμό της σταθεράς g.

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Μια μικρή σφαίρα προσαρτημένη σε νήμα αποτελεί το υπό εξέταση εκκρεμές. Το εκκρεμές αναρτάται σε σταθερό σημείο και στη συνέχεια εκτρέπεται σε μικρές γωνίες (<50) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μετριέται η περίοδος του 3 φορές με χρονόμετρο ακριβείας.

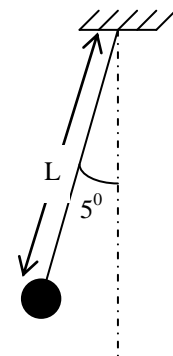
Στη συνέχεια το εκκρεμές αναρτάται από διαφορετικά σημεία έτσι ώστε να μεταβάλλεται το μήκος του και η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται άλλες τρεις φορές.

Κάθε μέτρηση του μήκους του εκκρεμούς φέρει το σφάλμα διακριτικής ικανότητας της μετρικής ταινίας που είναι $\delta L = 0.05$ m.

Το σφάλμα μέσης τιμής για την περίοδο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta \bar{T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\delta T_i)^2}{3-1}}$$

. Όλες οι τιμές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

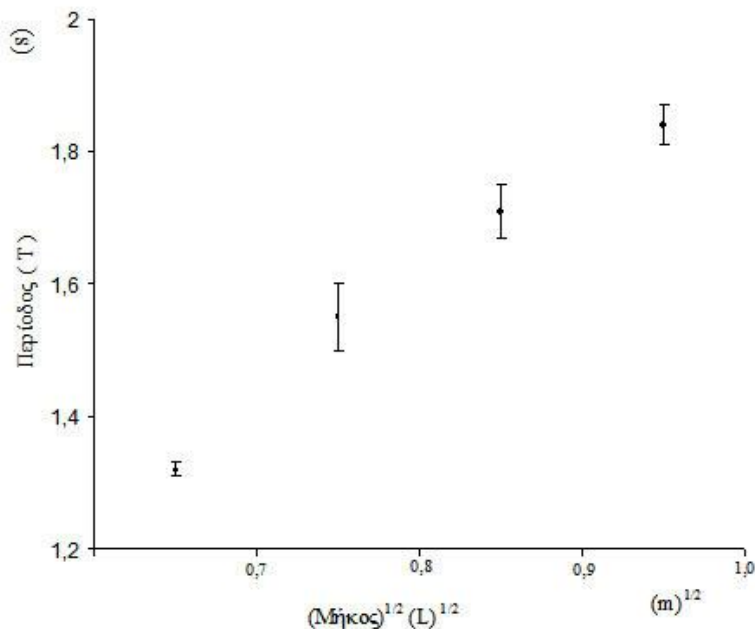


$L \pm \delta L$ (m)	T_i (s)	\bar{T} (s)	$\delta T_i = \bar{T} - T_i$ (s)	$(\delta T_i)^2$ (s) ²	$\delta \bar{T}$ (s)	$\bar{T} \pm \delta \bar{T}$ (s)
0.41±0.05	1.31	1.32	0.01	0.0001	0.01	1.32±0.01
	1.33		-0.01	0.0001		
	1.32		0	0		
0.57±0.05	1.50	1.5567	0.056667	0.003211	0.04933	1.55±0.05
	1.58		-0.02333	0.000544		
	1.59		-0.03333	0.001111		
0.70±0.05	1.74	1.71	-0.03	0.0009	0.036056	1.71±0.04
	1.67		0.04	0.0016		
	1.72		-0.01	0.0001		
0.82±0.05	1.81	1.8433	0.03333	0.001111	0.030551	1.84±0.03
	1.87		-0.02667	0.000711		
	1.85		-0.00667	0.000044		

Η σχέση μεταξύ της περιόδου T, της κίνησης ενός απλού εκκρεμούς, και του μήκους του L είναι:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Η γραφική παράσταση $T(\sqrt{L})$ θα είναι ευθεία με κλίση ίση με $B = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$.



Η ευθεία $T=A+B\sqrt{L}$ είναι της μορφής $y=A+Bx$ με:

$x \rightarrow \sqrt{L} \text{ (m)}^{1/2}$	$y \rightarrow T \text{ (sec)}$
0,64	1,32
0,75	1,55
0,83	1,71
0,91	1,84

Η μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων μας δίνει:
 (Οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν εύκολα με τη χρήση ενός Excel Workbook που μπορείτε να κατεβάσετε από: <http://www.aua.gr/~bethanis/calcs.xls>)

$$A = 0.0871 \text{ s}$$

$$B = 1.9398 \text{ s/m}^{1/2}$$

$$\delta y = 0.0151 \text{ s}$$

$$\delta A = 0.0596 \text{ s}$$

$$\delta B = 0.0756 \text{ s/m}^{1/2}.$$

Η κλίση δηλαδή της παραπάνω ευθείας είναι $B = (1.94 \pm 0.08) \text{ s/m}^{1/2}$

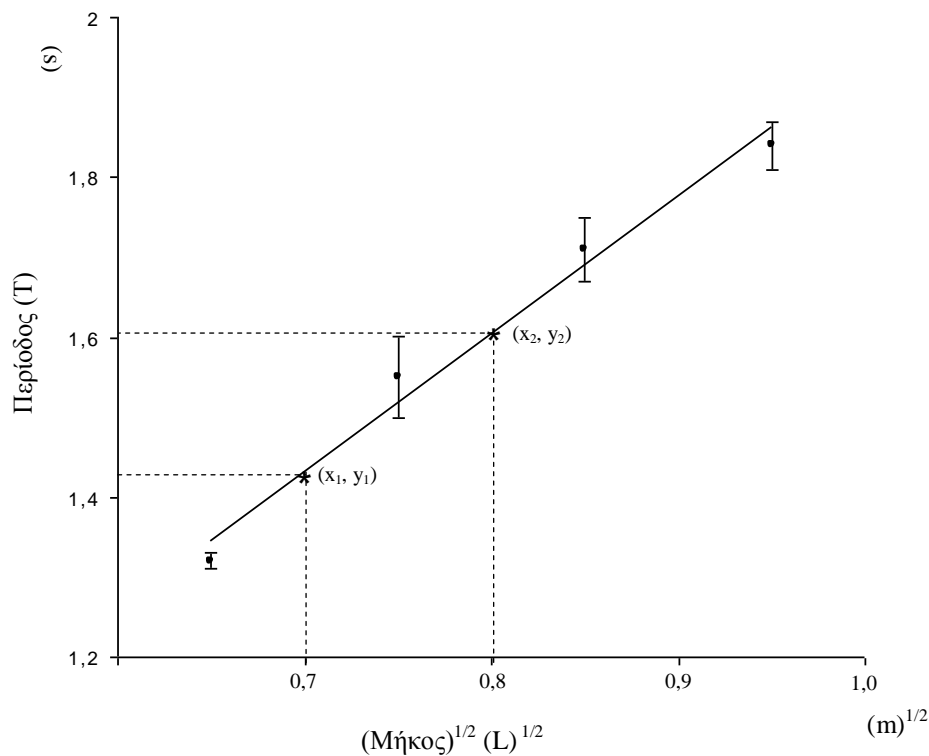
Για να χαράξουμε τη βέλτιστη ευθεία ανάμεσα στα σημεία των μετρήσεων (x_i, y_i) επιλέγουμε αυθαίρετα δύο τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x μέσα στην περιοχή μετρήσεων (δηλ. $0,64 < x < 0,91$) π.χ.:

$$x_1 = 0,7 \text{ (m)}^{1/2} \quad \text{και} \quad x_2 = 0,8 \text{ (m)}^{1/2}$$

για τις οποίες βρίσκουμε τις αντίστοιχες εξαρτημένες μεταβλητές y_1 και y_2 μέσω των σταθερών A και B που υπολογίστηκαν από τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων:

$$y_1 = 0,087 \text{ s} + 1,94 \cdot 0,7 \text{ s} = 1,44 \text{ s} \quad \text{και} \quad y_2 = 0,087 \text{ s} + 1,94 \cdot 0,8 \text{ s} = 1,62 \text{ s}$$

Βρίσκουμε τα σημεία $(x_1, y_1) = (0,7, 1,44)$ και $(x_2, y_2) = (0,8, 1,62)$ στη γραφική παράσταση και από αυτά φέρουμε τελικά την βέλτιστη ευθεία:



$$\text{Αφού όμως } B = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2}{B^2} = 10,489 \text{ m/s}^2$$

$$\text{και } \delta g = \left| \frac{\partial \left(\frac{4\pi^2}{B^2} \right)}{\partial B} \right| \cdot \delta B = \left| 4\pi^2 (-2) B^{-3} \right| \cdot \delta B = 0,792 \text{ m/s}^2$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις δίνεται τελικά ο υπολογισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας, με τη μέθοδο του απλού εκκρεμούς και για 4 διαφορετικές μετρήσεις όπως εκτελέστηκαν στο εργαστήριο, που είναι:

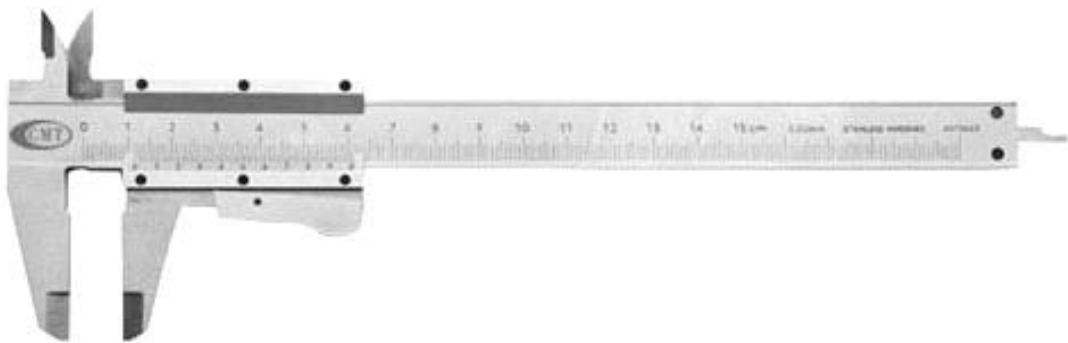
$$g = (10,5 \pm 0,8) \text{ m/s}^2$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books 1982
- 2) Δ. Μεντζαφός, Ι. Γαροφαλάκης, Ν. Τσαμπουράκης, Ν. Γ. Χρυσοχοΐδης, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανώτατη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1982.
- 3) Δ. Μεντζαφός, Α. Χούντας, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανώτατη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1997.
- 4) *Εργαστήριο Φυσικής Εισαγωγικά μαθήματα για τα σφάλματα*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής 1988.
- 5) L. Kirkup, *Experimental Methods*. J. Wiley & Sons 1994.

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΚΛΙΜΑΚΑ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΟΜΕΤΡΟ - ΜΙΚΡΟΜΕΤΡΟ



3.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Η εξοικείωση με όργανα μέτρησης μήκους και ο υπολογισμός μεγεθών και αντίστοιχων σφαλμάτων που προκύπτουν από αυτές τις μετρήσεις.

3.2 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Διαστημόμετρο.
- 2) Μικρόμετρο.
- 3) Κυλινδρικοί σωλήνες διαφόρων μηκών.
- 4) Σφαίρες με διαφορετικές διαστάσεις.

3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ

Ένα μήκος μπορεί, κατ' αρχήν, να μετρηθεί με ένα "μέτρο". Όταν όμως το μήκος αυτό είναι μικρό, της τάξεως του εκατοστομέτρου (cm), για να επιτευχθεί ακριβέστερη μέτρηση, χρησιμοποιείται το **διαστημόμετρο** (ή **παχύμετρο**), ενώ για μήκη της τάξεως του χιλιοστομέτρου (mm) και ακόμη μικρότερα το **μικρόμετρο**. Αξιοποιώντας την μέτρηση του μήκους, μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια άλλα βασικά μηχανικά μεγέθη, όπως διατομή, όγκο, πυκνότητα κ.λπ.

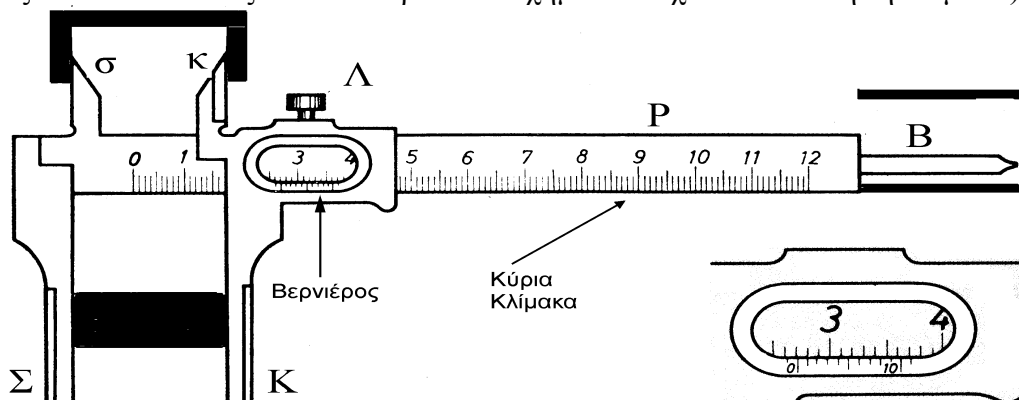
3.4 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑ ΟΡΓΑΝΑ.

3.4.1 Το διαστημόμετρο.

Περιγραφή

Το διαστημόμετρο (Σχήμα 3.1) αποτελείται από μία ράβδο P, επάνω στην οποία είναι χαραγμένες δύο κλίμακες:

- α) μία χιλιοστομετρική δηλ. σε mm και
- β) μία σε ίντσες την οποία δεν θα χρησιμοποιήσετε (ορισμένα απο τα όργανα, όπως αυτό που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα δεν έχουν καν αυτή τη κλίμακα).



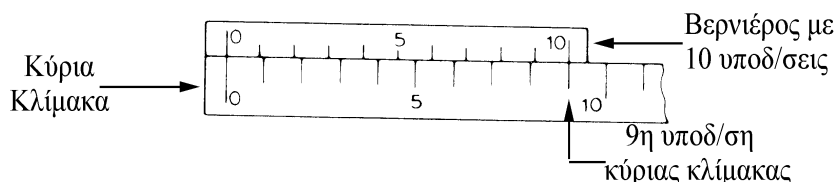
Σχήμα 3.1

Η ράβδος P καταλήγει σε δύο σταθερές σιαγόνες Σ και σ και ένα στέλεχος μπορεί να κινείται πάνω της. Το στέλεχος αυτό καταλήγει σε δύο κινητές σιαγόνες Κ και κ και έχει χαραγμένη επάνω του κλίμακα που ονομάζεται **βερνιέρος** και η οποία φαίνεται σε μεγέθυνση στο ίδιο σχήμα. Στην κλίμακα αυτή οφείλει το μικρόμετρο την ακρίβεια του. Η μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου ή της εξωτερικής διαμέτρου ενός σωλήνα γίνεται τοποθετώντας το αντικείμενο ανάμεσα στις σιαγόνες Σ και Κ. Οι δύο άλλες, σιαγόνες σ και κ, χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των διαστάσεων οπής, ή της εσωτερικής διαμέτρου σωλήνων. Υπάρχει, τέλος, και ένας λεπτός βραχίονας Β,

που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του βάθους μιάς οπής. Ο μοχλός Λ χρησιμοποιείται για τη σταθεροποίηση του βερνιέρου.

Σταθερά του Βερνιέρου – Υπολογισμός για το διαστημόμετρο

Έστω ότι η κλίμακα του βερνιέρου αποτελείται από 10 υποδιαίρεσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε 9 υποδιαίρεσεις της κυρίας κλίμακας όπως φαίνεται στο απλοποιημένο Σχήμα 3.2



Σχήμα 3.2

Αυτό σημαίνει ότι κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου είναι ίση με τα 9/10 της υποδιαίρεσης της κυρίας κλίμακας, δηλ αν η κύρια κλίμακα είναι χαραγμένη σε mm τότε η κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου είναι 9/10 mm, οπότε κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου είναι μικρότερη κατά 1/10 mm από την υποδιαίρεση της κυρίας κλίμακας. Ο αριθμός αυτός (1/10 mm/υποδ.), δηλ. η διαφορά μεταξύ των δύο μηκών, ονομάζεται **σταθερά του βερνιέρου** και συμβολίζεται με **C**.

Γενικότερα η σταθερά C οργάνου που φέρει κλίμακα Βερνιέρου υπολογίζεται ως εξής: Έστω ℓ το μήκος μιάς υποδιαίρεσεως της κλίμακας του βερνιέρου και n οι υποδιαίρεσεις του βερνιέρου. Αν s είναι το μήκος των υποδιαίρεσεων της κύριας κλίμακας και η τελευταία υποδιαίρεση του βερνιέρου συμπίπτει με τη m υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας τότε προφανώς θα πρέπει:

$$n\ell = ms \tag{3.1}$$

Η διαφορά μεταξύ των μηκών s και ℓ είναι η **σταθερά του βερνιέρου C**:

$$C = s - \ell \tag{3.2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση αυτή της τιμής του ℓ από την (3.1) προκύπτει:

$$C = s - \frac{ms}{n} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)s \tag{3.3a}$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν $m < n$. Στην αντίθετη περίπτωση, η σταθερά του Βερνιέρου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C = 1 - \left| \left(1 - \frac{m}{n}\right) \right| s \tag{3.3\beta}$$

Επειδή, στις περισσότερες των περιπτώσεων τα m και n συνδέονται με μια σχέση της μορφής $m = n - 1$ (δηλ. όπως στο σχήμα 3.2 όπου η 10η υποδιαίρεση του Βερνιέρου συμπίπτει με την $10 - 1 = 9$ η υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας) οι σχέσεις (3.3a και β)

γίνονται:

$$C = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)s = \frac{s}{n}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην ακόλουθη τελική σχέση για τον υπολογισμό της σταθεράς C των οργάνων που φέρουν κλίμακα Βερνιέρου:

$$C = \frac{s}{n} \tag{3.4}$$

όπου: s = το μήκος (συνήθως σε mm) κάθε υποδιαίρεσης της κύριας κλίμακας
 n = ο αριθμός των υποδιαίρεσεων της κλίμακας Βερνιέρου.

Η σταθερά του βερνιέρου C έχει μονάδες μήκους/υποδιαίρεσεις (π.χ. mm/υποδιαίρεσεις)

Επομένως για το παράδειγμα του οργάνου που απεικονίζεται στο σχήμα 3.2 υπολογίζεται ότι: $C = \frac{s}{n} = \frac{1mm}{10 \text{ υποδ.}} = 0,1 \frac{mm}{\text{υποδ.}}$.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι όταν τα “0” των δύο κλιμάκων (βερνιέρου και κύριας κλίμακας) συμπίπτουν, τότε:

- η πρώτη χαραγή του βερνιέρου απέχει από την αντίστοιχη της κύριας κλίμακας κατά 1/10 (δηλ. C)
- η δεύτερη απέχει κατά 2/10 (δηλ. 2C)
- η τρίτη κατά 3/10 (δηλ. 3C) κ.ο.κ.
- η δέκατη υποδιαίρεση του βερνιέρου απέχει από την αντίστοιχη της κύριας κλίμακας κατά 10C, δηλαδή κατά 1mm. Δηλαδή η δέκατη υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου συμπίπτει με την ένατη υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας.

Χρήση του Βερνιέρου

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα όργανο με βερνιέρο όπως αυτός της προηγούμενης παραγράφου για τις μετρήσεις.

Εστω λοιπόν ότι ο βερνιέρος του Σχήματος 3.2 μετακινείται λίγο προς τα δεξιά, έτσι ώστε το “0” του βερνιέρου να βρίσκεται μεταξύ των υποδιαίρεσεων “2” και “3” της κύριας κλίμακας, ενώ η 4η υποδιαίρεση του βερνιέρου συμπίπτει με μία υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

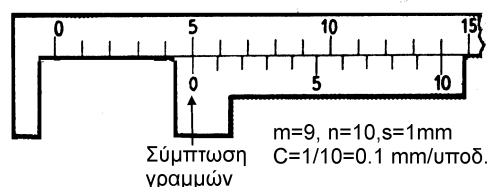


Σχήμα 3.3

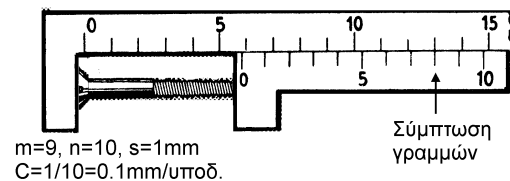
Στην κύρια κλίμακα, λοιπόν, διαβάζονται 2 υποδιαίρεσεις ενώ στην κλίμακα του βερνιέρου 4 υποδ. Αυτό σημαίνει ότι το ολικό μήκος θα είναι ίσο με 2 + 4 C όπου C η σταθερά του βερνιέρου. Επειδή ο βερνιέρος του σχήματος 3.2 έχει σταθερά 0,1 mm/υποδ. η μέτρηση θα είναι:

$$2 \text{ mm} + 4 \text{ υποδ.} \times 0,1 \text{ mm/υποδ.} = 2,4 \text{ mm}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο γίνεται η ανάγνωση των ενδείξεων που φαίνονται στα Σχήματα 3.4 και 3.5.



Σχήμα 3.4



Σχήμα 3.5

Γενικά σε κάθε περίπτωση πρέπει να προσδιορίζουμε τη σταθερά του βερνιέρου οπότε στη συνέχεια η ένδειξη του μήκους είναι:
ΕΝΔΕΙΞΗ ΚΥΡΙΑΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ + (ΕΝΔΕΙΞΗ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ) x (ΣΤΑΘΕΡΑ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ)

Σφάλματα Μετάθεσης

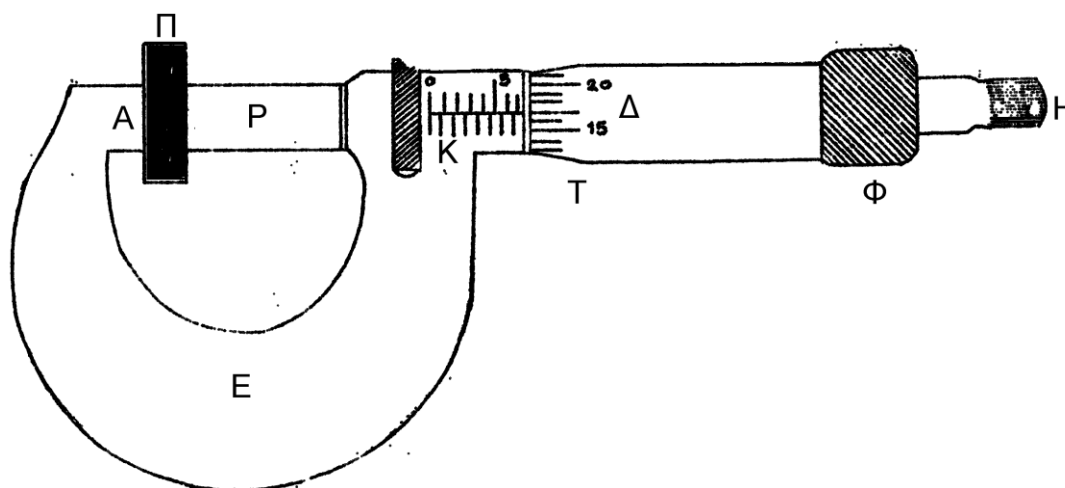
Συχνά, όταν οι σιαγόνες Σ και Κ έρθουν σε επαφή, οι χαραγές “0” των δύο κλιμάκων δεν συμπίπτουν. Αυτό μπορεί να συμβαίνει γιατί το όργανο παρουσιάζει ατέλειες, ή επειδή παραμορφώθηκε κατά τη χρήση του. Η μετατόπιση αυτή της χαραγής του βερνιέρου ονομάζεται **μετάθεση του μηδενός**, και πρέπει να λαμβάνεται υπ’ όψη κατά τις μετρήσεις. Η διόρθωση θα είναι **προσθετική αν το “0” της κλίμακας του βερνιέρου βρίσκεται αριστερά από το “0” της κύριας κλίμακας** ενώ θα είναι **αφαιρετική αν βρίσκεται προς τα δεξιά**. Οποσδήποτε η διόρθωση αυτή είναι κλάσμα της υποδιαρέσεως της κύριας κλίμακας. Αν, όταν έρθουν σε επαφή οι δύο σιαγόνες, η χαραγή (ν) του βερνιέρου συμπίπτει με μία χαραγή της κύριας κλίμακας, η διόρθωση που πρέπει να γίνει στη μέτρηση είναι:

$$\mu = C\nu \quad (3.5)$$

Ερωτήσεις

- 1) Ποιά είναι η ένδειξη του διαστημομέτρου του Σχήματος 3.1;
- 2) Κάποιος φοιτητής χρησιμοποιώντας ένα διαστημόμετρο με σταθερά $C=0.05 \text{ mm/υποδ.}$ παίρνει μία μέτρηση για ένα μήκος 22,16 mm. Γιατί η μέτρηση αυτή δεν είναι έγκυρη; Ποια ακρίβεια έχει ένα τέτοιο διαστημόμετρο;

3.4.2 ΜΙΚΡΟΜΕΤΡΟ



Το μικρόμετρο (Σχ. 3.6) αποτελείται από ορθογώνιο ή ημι-κυκλικό μεταλλικό πλαίσιο E, του οποίου το ένα άκρο καταλήγει στον άκμονα A. Στο άλλο άκρο έχει στερεωθεί κυλινδρική ράβδος P, επάνω στην οποία είναι χαραγμένες: διαμήκης (κύρια) κλίμακα K, με υποδιαρέσεις του 1mm ή του 0.5 mm, και διαμήκης ευθεία. Γύρω από τη ράβδο βιδώνει το τύμπανο T, στο οποίο είναι χαραγμένη μία εγκάρσια κλίμακα Δ που έχει 100 ή 50 υποδιαρέσεις. Το τύμπανο καταλήγει στην κεφαλή Φ και είναι μόνιμα στερεωμένο επάνω στη ράβδο P. Η ράβδος P καταλήγει σε ένα κοχλία H. Το τύμπανο T περιστρέφεται ή με τη βοήθεια της κεφαλής Φ ή του κοχλία H. Ανάλογα με τη φορά περιστροφής, η ράβδος P πλησιάζει, ή απομακρύνεται προς τον άκμονα A.

Σχήμα 3.6

Προκειμένου να μετρηθεί το πάχος ενός αντικειμένου, π.χ. μιάς πλάκας Π τοποθετούμε τη πλάκα μεταξύ του άκμονα A και της άκρης της ράβδου P. Το τύμπανο T περιστρέφεται μέχρι να σφίξει η ράβδος P την πλάκα. Η **περιστροφή**

γίνεται με τη βοήθεια του κοχλία Η και όχι της κεφαλής του τυμπάνου Φ για τον εξής λόγο: η περιστροφή της κεφαλής Φ προκαλεί πάντοτε μετακίνηση της ράβδου Ρ, και γιαυτό η περιστροφή του τυμπάνου με τη βοήθεια της κεφαλής Φ μπορεί, από κάποια στιγμή και έπειτα, να προκαλέσει τέτοια σύσφιξη της πλάκας, ώστε να προκληθεί παραμόρφωση της ράβδου. Αντίθετα, η περιστροφή με τη βοήθεια του κοχλία Η δεν προκαλεί μετακίνηση της ράβδου Ρ προς τον άκμονα Α, όταν το σώμα έχει σφίχτεί αρκετά, οπότε ακούγεται χαρακτηριστικός ήχος. Δηλαδή ο κοχλίας Η, από κάποια στιγμή και πέρα, γυρίζει χωρίς να σφίγγει. Έτσι αποφεύγεται παραμόρφωση του σώματος ή της ράβδου του μικρόμετρου.

Σταθερά του Βερνιέρου – Υπολογισμός για το μικρόμετρο

Στο Σχήμα 3.6 η διαμήκης κλίμακα Κ έχει υποδιαίρεσεις ανά 0.5 mm, ενώ η εγκάρσια κλίμακα Δ φέρει n=50 υποδιαίρεσεις (δεν μπορούν να φανούν όλες). Μια πλήρης περιστροφή του τυμπάνου Τ έχει σαν αποτέλεσμα μετατόπιση στην κύρια κλίμακα κατά s=0,5 mm δηλαδή το βήμα του κοχλία Η είναι s=0,5 mm.

Γενικά αν s είναι το βήμα του κοχλία και n ο αριθμός των υποδιαίρεσεων που φέρει το τύμπανο, τότε η σταθερά του οργάνου ορίζεται ως:

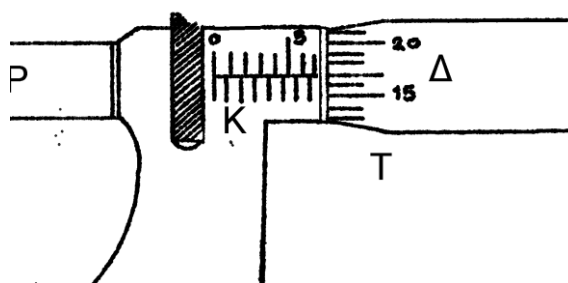
$$C = \frac{s}{n} \tag{3.6}$$

Οι μονάδες της σταθεράς είναι mm/υποδ. ή cm/υποδ.
 (Η σχέση αυτή είναι όμοια με τη 3.4 για τη σταθερά διαστημόμετρου).

Επομένως, στο παράδειγμά του σχήματος (3.6), η σταθερά θα είναι ίση με:
 $C = 0,5/50 = 0,01 \text{ mm/υποδ.}$

Χρήση του Μικρόμετρου

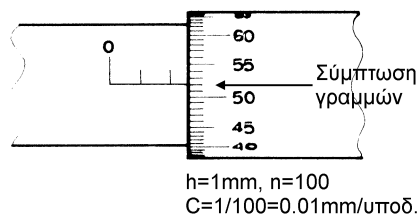
Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε σφίξει τη πλάκα ανάμεσα στις σιαγόνες του μικρόμετρου. Η ανάγνωση του πάχους γίνεται με τη βοήθεια και των δύο κλιμάκων Κ και Δ.



Σχήμα 3.7

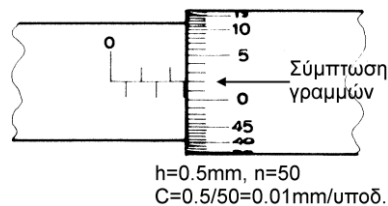
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται μόνο η περιοχή των δύο κλιμάκων του Σχήματος 3.6. Η σταθερά του οργάνου υπολογίστηκε στη προηγούμενη παράγραφο ίση με 0,01 mm/υποδ. Παρατηρούμε τώρα, ότι για τη δεδομένη πλάκα το τύμπανο έχει σταματήσει μετά το έβδομο mm της κύριας κλίμακας Κ, ενώ η διαμήκης γραμμή συμπίπτει με την 17η ένδειξη της εγκάρσιας κλίμακας. Το πάχος της πλάκας θα είναι: $7 \text{ mm} + 17 \text{ υποδ.} \times C = 7 \text{ mm} + 17 \text{ υποδ.} \times 0,01 \text{ mm/υποδ.} = 7.17 \text{ mm}$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αφού προσδιοριστεί η σταθερά του μικρομέτρου, παίρνουμε τις ενδείξεις που φαίνονται στα σχήματα 3.8 και 3.9.



Ένδειξη=2mm+52C=2.52mm

Σχήμα 3.8



Ένδειξη=2.5mm+2C=2.52mm

Σχήμα 3.9

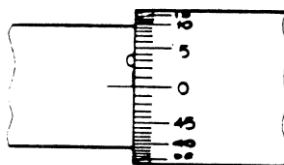
Οι ενδείξεις των δύο παραπάνω μικρομέτρων είναι οι ίδιες απλά τα δύο όργανα έχουν διαφορετικές υποδιαίρέσεις στη κύρια και στη κλίμακα του τυμπάνου.

Βλέπουμε ότι και στο μικρόμετρο εφαρμόζεται ο ίδιος κανόνας με το διαστημόμετρο δηλ.:

Αφού προσδιορίσουμε τη σταθερά του μικρόμετρου, η ένδειξη θα προκύπτει ως:
ΕΝΔΕΙΞΗ ΚΥΡΙΑΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ + (ΕΝΔΕΙΞΗ ΤΥΜΠΑΝΟΥ)×(ΣΤΑΘΕΡΑ ΜΙΚΡΟΜΕΤΡΟΥ)

Σφάλματα Μετάθεσης

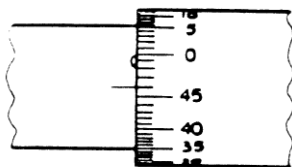
Τα μικρόμετρα, όπως ακριβώς και τα διαστημόμετρα, παρουσιάζουν προσθετική ή αφαιρετική μετάθεση μηδενός. Η διόρθωση που πρέπει να γίνεται στις μετρήσεις υπολογίζεται ως εξής: Το τύμπανο T περιστρέφεται, με τη βοήθεια του κοχλία H, μέχρι που ο άκμονας A και η ράβδος P να έρθουν σε επαφή. Είναι δυνατό τότε το "0" της εγκάρσιας κλίμακας να συμπίπτει με τη διαμήκη ευθεία, οπότε δεν υπάρχει μετάθεση μηδενός, όπως στην περίπτωση του Σχήματος 3.10.



Σχήμα 3.10

Είναι όμως επίσης δυνατό η διαμήκης ευθεία να συμπίπτει με μία ένδειξη, που απέχει β υποδιαίρέσεις της εγκάρσιας κλίμακας από το "0", όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.11 και 3.12. Τότε η μετάθεση μηδενός είναι, κατ' αναλογία με το διαστημόμετρο:

$$\mu = \beta C \tag{3.8}$$



Σχήμα 3.11



Σχήμα 3.12

Η μετάθεση αυτή μπορεί να είναι προσθετική (Σχ. 3.11), ή αφαιρετική (Σχ. 3.12). Στην πρώτη περίπτωση η μετάθεση υπολογίζεται:

$$\mu = +4 \text{ υποδ.} \times 0,01 \text{ mm/υποδ.} = +0,04 \text{ mm}$$

και στη δεύτερη:

$$\mu = -2 \text{ υποδ.} \times 0,01 \text{ mm/υποδ.} = -0,02 \text{ mm}$$

Ερωτήσεις

1) Με τι ακρίβεια μπορεί να μετρήσει το μικρόμετρο του σχήματος 3.6; Γενικά με ποια ακρίβεια γίνονται οι μετρήσεις με ένα οποιοδήποτε μικρόμετρο;

3) Προσπαθήστε να μετρήσετε με κατάλληλο όργανο το πάχος μιας σελίδας του παρόντος εργαστηριακού φυλλαδίου. Προτείνετε τρόπο για να γίνει η μέτρηση με όσο το δυνατό μικρότερο σφάλμα.

3.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

3.5.1 Για το διαστημόμετρο

1) Να προσδιορισθεί η σταθερά του Βερνιέρου C.

$$C = \dots\dots\dots$$

2) Να “μηδενισθεί” το όργανο και να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το σφάλμα μ μεταθέσεως του μηδενός.

$$\mu = \dots\dots\dots$$

3) Να μετρηθεί με το διαστημόμετρο για πέντε διαφορετικά ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων η εξωτερική διάμετρος του σωλήνα. Τα αποτελέσματα να γραφούν σε πίνακα της μορφής του Πίνακα 3.1.

4) Να γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις για τη μετάθεση μηδενός και να γραφούν τα αποτελέσματα σε πίνακα της μορφής του Πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1

	Εξωτερική διάμετρος		Εσωτερική διάμετρος	
	$D_i^{\text{αρχικά}}$	$D_i = D_i^{\text{αρχικά}} + \mu$	$D_i^{\text{αρχικά}}_{(\text{εσωτ.})}$	$D_i(\text{εσωτ.}) = D_i^{\text{αρχικά}}_{(\text{εσωτ.})} + \mu$
1				
2				
3				
4				
5				

5) Να επαναληφθούν οι εργασίες 3 έως 6 για πέντε εσωτερικές διαμέτρους $D_{\text{εσωτ.}}$ του σωλήνα και να καταχωρηθούν τα αποτελέσματα σε Πίνακα αντίστοιχο του Πίνακα 3.1.

3.5.2 Για το μικρόμετρο

1) Να προσδιορισθεί η σταθερά C του τυμπάνου.

$$C = \dots\dots\dots$$

2) Να “μηδενισθεί” το όργανο και να υπολογιστεί (άν υπάρχει) το σφάλμα μεταθέσεως του μηδενός μ.

$$\mu = \dots\dots\dots$$

3) Να μετρηθεί με το μικρόμετρο η διάμετρος d πέντε σφαιρών. Τα αποτελέσματα γράφονται σε Πίνακα αντίστοιχο με τον Πίνακα 3.2.

4) Να γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις για τη μετάθεση μηδενός και τα αποτελέσματα να γραφούν στον ίδιο Πίνακα.

Πίνακας 3.2

i	$d_i^{\text{αρχικά}}$ (mm)	$d_i = d_i^{\text{αρχικά}} + \mu$ (mm)
1		
2		
3		
4		
5		

3.5.3 Για το ζυγό (*)

1) Να προσδιορισθεί η σταθερά C του βερνιέρου του ζυγού.

$$C = \dots\dots\dots$$

2) Να “μηδενισθεί” το όργανο και να υπολογιστεί (άν υπάρχει) το σφάλμα μεταθέσεως του μηδενός μ.

$$\mu = \dots\dots\dots$$

3) Να μετρηθεί η συνολική μάζα $M^{\text{αρχική}}$ των πέντε σφαιριδίων του 3.5.2. Τα αποτελέσματα γράφονται σε Πίνακα αντίστοιχο με τον Πίνακα 3.3.

4) Να γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις για τη μετάθεση μηδενός

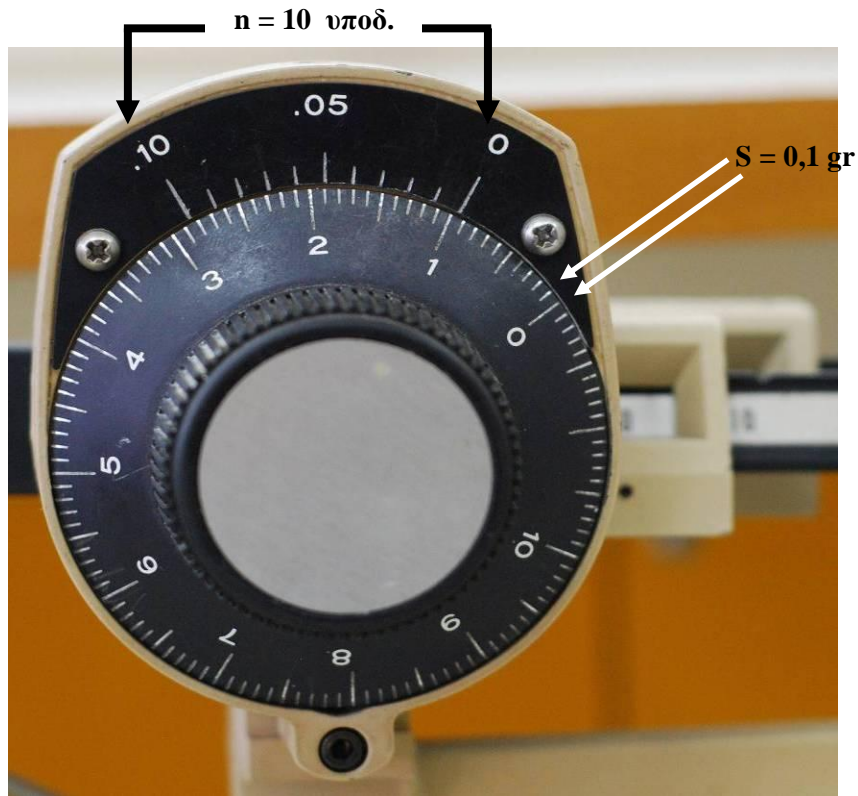
$$M = M^{\text{αρχική}} + \mu \text{ και τα αποτελέσματα να γραφούν στον ίδιο Πίνακα.}$$

5) Σημειώστε στον Πίνακα 3.2 το σφάλμα στη μέτρηση της μάζας δM που προέρχεται από την διακριτική ικανότητα του ζυγού.

Πίνακας 3.3

$M^{\text{αρχική}}$ (gr)	μ (gr)	$M = M^{\text{αρχική}} + \mu$ (gr)	δM (gr)

* Στο τέλος της άσκησης 3 δίνεται βοηθητική φωτογραφία για την ανάγνωση της ένδειξης ζυγού με κλίμακα βερνιέρου



Στο βερνιέρο του ζυγού της φωτογραφίας:

$$C = S/n = 0,01\text{gr}/\text{υποδ.} \text{ αφού } S = 0,1\text{gr} \text{ και } n = 10\text{υποδ.}$$

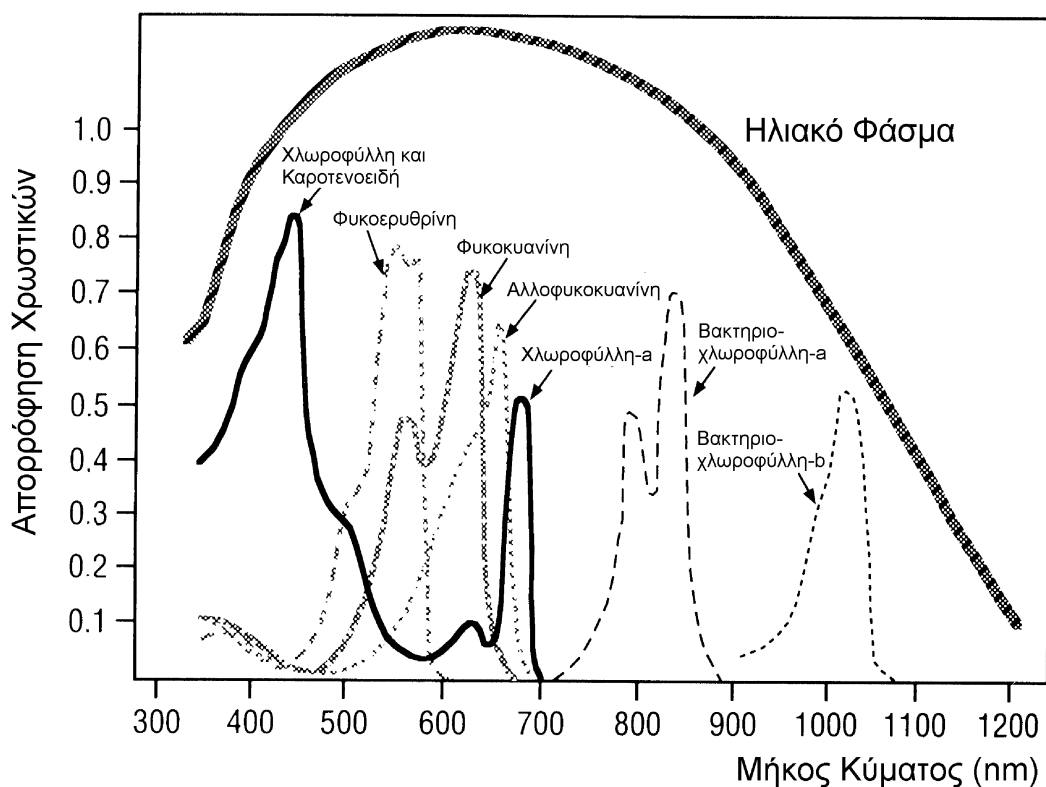
Η τελική ανάγνωση της ένδειξης ζύγισης είναι:

$$M = 0,9\text{gr} + 5\text{ενδ.} \times C = 0,9\text{gr} + 5\text{ενδ.} \times 0,01\text{gr}/\text{ενδ} = 0,95\text{gr}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΦΑΣΜΑΤΑ ΕΚΠΟΜΠΗΣ - ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΟΡΑΤΟΥ

Η χλωροφύλλη και τα καροτενοειδή είναι χρωστικές ουσίες υπεύθυνες για τη φωτοσύνθεση στα περισσότερα φυτά. Απορροφούν τόσο στο κόκκινο όσο και στο μπλέ. Οι φυκοερυθρίνη, φυκοκυανίνη και αλλοφυκοκυανίνη είναι οι χρωστικές που εκτελούν τη φωτοσύνθεση στα ωκεάνια φύκη. Τέλος οι βακτηριοχλωροφύλλη *a* και *b* είναι οι χρωστικές που υπάρχουν σε ορισμένα βακτήρια που φωτοσυνθέτουν.



4.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Η μελέτη φασμάτων εκπομπής διαφόρων αερίων και φασμάτων απορρόφησης ορισμένων διαλυμάτων και πλακών στην περιοχή του ορατού φωτός.

4.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Στην πρώτη φάση της άσκησης μελετούμε το γραμμικό **φάσμα εκπομπής** ενός αγνώστου αερίου (Υδρογόνου (H), Ηλίου (He) ή Υδραργύρου (Hg)). Τα μήκη κύματος λ των φασματικών γραμμών του αερίου μετρούνται με **πρότυπο** φασματοσκόπιο και υπολογίζεται η ενέργεια ΔE που αντιστοιχεί σε κάθε μετάπτωση. Στη συνέχεια το παρατηρούμενο φάσμα συσχετίζεται με γνωστά φάσματα ώστε να τακτοποιηθεί το άγνωστο αέριο και διατυπώνονται υποθέσεις για τις πιθανές ενεργειακές μεταπτώσεις ατόμων που παράγουν τα συγκεκριμένα μήκη κύματος.

Στη δεύτερη φάση της ασκήσεως άσκησης μελετούμε το **φάσμα απορρόφησης** διαφόρων διαλυμάτων και πλακών. Για το σκοπό αυτό, αντικαθίσταται η λυχνία εκπομπής με λυχνία πυρακτώσεως, η οποία δίνει λευκό φως. Στην πορεία των ακτίνων παρεμβάλλονται διάφορα διαλύματα τα οποία απορροφούν κάποιες περιοχές του συνεχούς φάσματος. Σημειώνονται οι ενδείξεις της αρχής και του τέλους των περιοχών απορρόφησης. Τέλος, σχεδιάζονται τα φάσματα απορρόφησης για όλα τα υλικά, επιχειρείται ταυτοποίηση αγνώστων διαλυμάτων με βάση τις γνωστές καμπύλες απορρόφησης ουσιών, διατυπώνονται συμπεράσματα για τις ομοιότητες και διαφορές τους και ερμηνεύουμε το χρώμα των υλικών που αντιλαμβανόμαστε σε σχέση με τις φασματικές περιοχές απορρόφησης.

4.3 ΘΕΩΡΙΑ

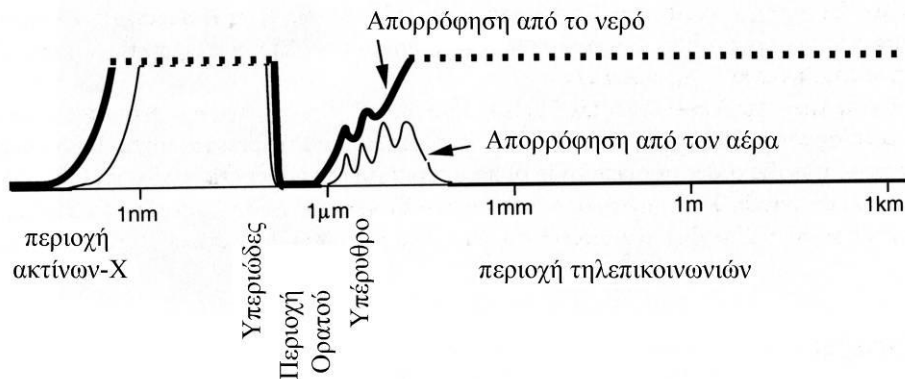
4.3.1 Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

Όλα τα ηλεκτρομαγνητικά (H/M) κύματα διαδίδονται στο κενό με την ίδια ταχύτητα. Διαφέρουν μεταξύ τους μόνο στη συχνότητα (f) και το μήκος κύματος, (λ). Η συχνότητα του H/M κύματος, με την οποία πάλλεται στο χώρο, είναι η ίδια με τη συχνότητα του δονούμενου ηλεκτρικού φορτίου που το δημιούργησε. Η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη είναι:

$$c = f \cdot \lambda \quad (4.1)$$

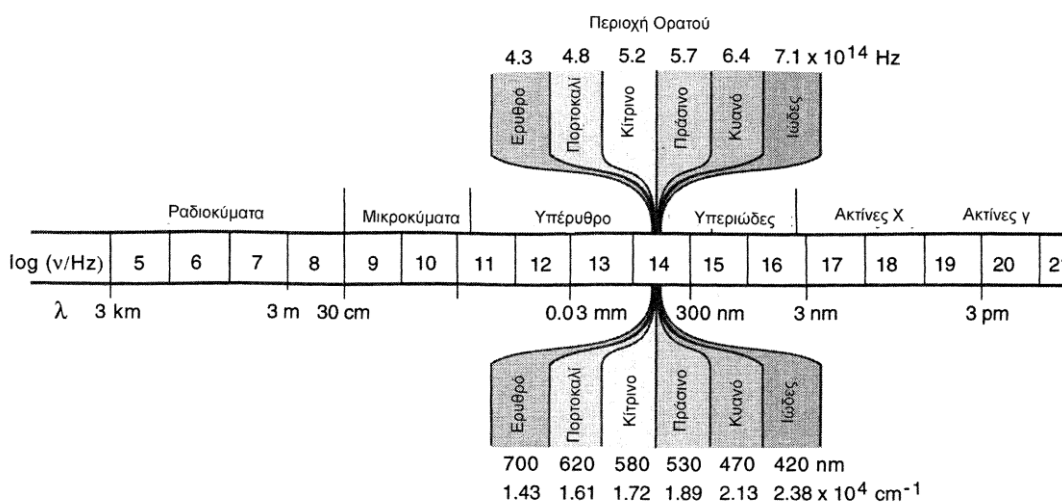
όπου $c = 3 \cdot 10^8$ m/s είναι η ταχύτητα του κύματος στο κενό.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν θεωρητικά να έχουν οποιαδήποτε συχνότητα, από το μηδέν ως το άπειρο. Η ταξινόμηση τους σύμφωνα με τη συχνότητα ή το μήκος κύματος ονομάζεται *Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα*. Η περιοχή του H/M φάσματος που αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο μάτι ονομάζεται περιοχή του ορατού φάσματος και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι δεν απορροφάται ούτε από το νερό ούτε από τον ατμοσφαιρικό αέρα όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1

Συνηθίζουμε να διαιρούμε το φάσμα του ορατού σε έξι, λίγο έως πολύ, διακριτές περιοχές. Μεταξύ τους δεν υπάρχουν σαφή όρια και στην πραγματικότητα υπερκαλύπτονται. Οι περιοχές αυτές ουσιαστικά δεν αντιπροσωπεύουν κάποια φυσική αναγκαιότητα. Δημιουργήθηκαν ιστορικά καθώς ο άνθρωπος προσπάθησε να κατανοήσει πρώτα τη φύση του φωτός και ακολούθως την υπέρυθη ακτινοβολία (1800), την υπεριώδη (1801), τα ραδιοκύματα (1888), τις ακτίνες-X (1895), τις ακτίνες γ (1900) και τέλος τα μικροκύματα (1930) (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2

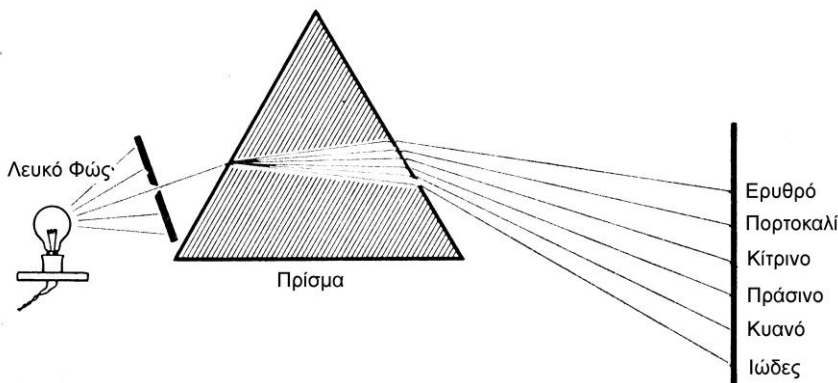
Στην κατανομή του Η/Μ φάσματος που σημειώνεται στο σχήμα 4.2, η στενή περιοχή μεταξύ 700 nm και 420 nm όπου λειτουργεί η φυσική όραση του ανθρώπου, αποτελεί το φάσμα στην περιοχή του ορατού και είναι αυτή που αναφέρεται ως *φως*.

4.3.2 Ανάλυση του Φωτός με Πρίσμα

Όταν κάποια Η/Μ ακτινοβολία διέρχεται μέσα από ένα διαφανές (για την ακτινοβολία αυτή) μέσο, η μέση ταχύτητα της είναι μικρότερη από *c*. Το πόσο μικρότερη είναι εξαρτάται από τη φύση του μέσου και από τη συχνότητα της ακτινοβολίας.

Διαφορετικές συχνότητες του φωτός διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες στα διαφανή υλικά, γι' αυτό και οι φωτεινές ακτίνες διαθλώνται και διαφορετικά,

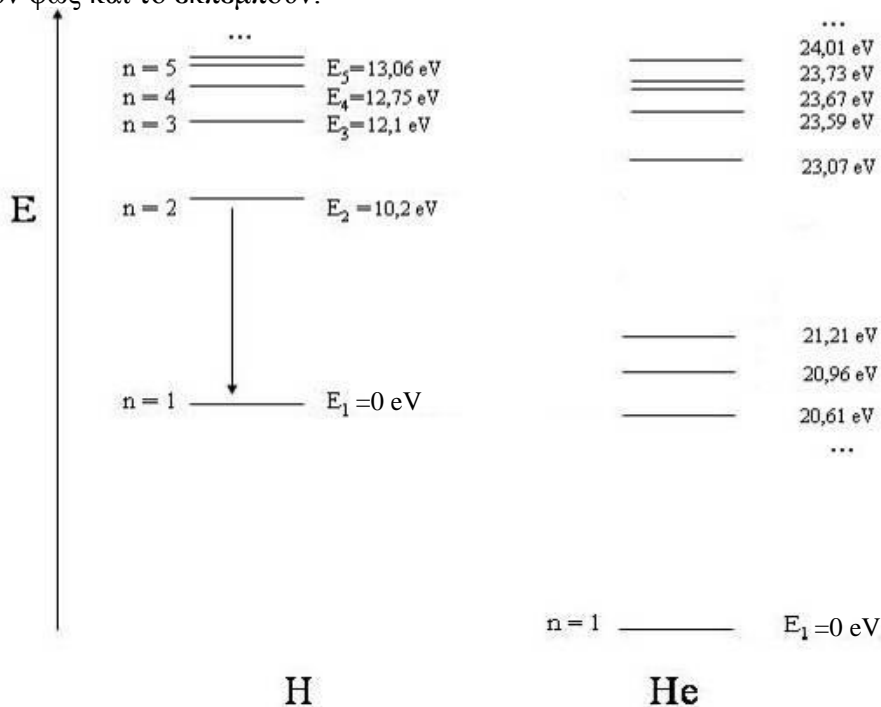
εκτρέπονται δηλαδή κατά διαφορετικές γωνίες (Διασκεδασμός). Όταν το φως εκτρέπεται δύο φορές, όπως σε ένα πρίσμα, ο διαχωρισμός των διαφόρων χρωμάτων είναι σαφής. Ο διαχωρισμός του φωτός στα χρώματα του, που διατάσσονται σύμφωνα με τις συχνότητές τους, ονομάζεται **ανάλυση του φωτός**. (Σχήμα 4.3)



Σχήμα 4.3

4.3.3 Γραμμικά-Συνεχή Φάσματα Εκπομπής

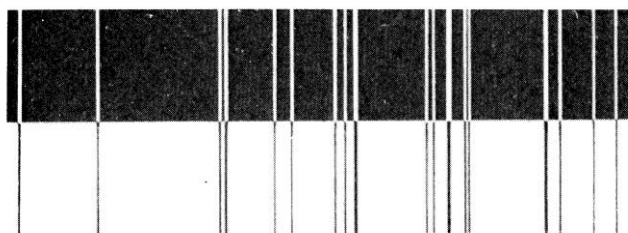
Κάθε στοιχείο έχει τη δική του *χαρακτηριστική* δομή ενεργειακών επιπέδων των ηλεκτρονίων του, γι' αυτό και εκπέμπει χαρακτηριστικό φάσμα φωτεινών συχνοτήτων όταν διεγείρεται (π.χ σε μια λάμπα αερίου σαν αυτών που θα χρησιμοποιήσουμε στο εργαστήριο). Στο Σχήμα 4.4 βλέπουμε ενεργειακές στάθμες για τα αέρια υδρογόνου (H) και ηλίου (He) για διαφορετικούς τροχιακούς κβαντικούς αριθμούς n. Τα άτομα και απορροφούν φως και το εκπέμπουν.



Σχήμα 4.4

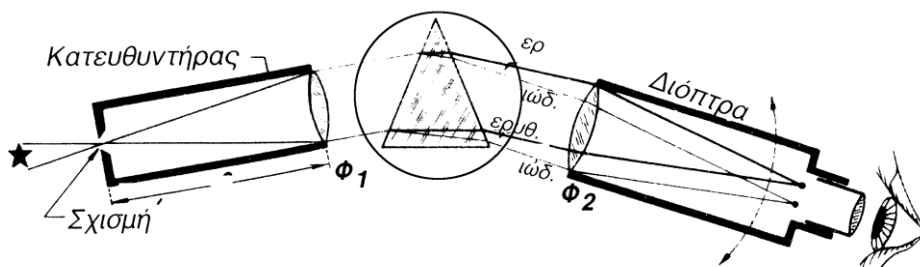
Ένα άτομο θα απορροφήσει έντονα το φως που έχει τις συχνότητες, στις οποίες αυτό είναι «συντονισμένο» με άλλα λόγια, τις ίδιες συχνότητες που εκπέμπει. Κατά την αποδιέγερση, η ενέργεια του απορροφώμενου ή εκπεμπόμενου φωτονίου είναι ίση με τη διαφορά ενέργειας της αρχικής E_{n2} και τελικής ενεργειακής στάθμης E_{n1} και δίνεται από τη σχέση $\Delta E = E_{n2} - E_{n1} = h \cdot f = hc/\lambda$, όπου $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$ είναι η σταθερά του Planck.

Όταν μια δέσμη λευκού φωτός περνά μέσα από αέριο, τα άτομα του αερίου απορροφούν επιλεγμένες συχνότητες που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες ενέργειες ΔE . Αν το φως που μένει στη δέσμη αναλυθεί, οι συχνότητες που απορροφήθηκαν παρουσιάζονται ως σκοτεινές γραμμές στο φάσμα, που, χωρίς αυτές, θα ήταν συνεχές. Οι σκοτεινές γραμμές αντιστοιχούν ακριβώς στις θέσεις των γραμμών του φάσματος εκπομπής του ίδιου αερίου (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5

Μπορούμε να δούμε αυτό το φάσμα περνώντας το φως από ένα πρίσμα ή, καλύτερα, πρώτα από μια λεπτή σχισμή και εστιάζοντας το μετά μέσα από ένα πρίσμα σε μια οθόνη που βρίσκεται πίσω του. Μια τέτοια διάταξη σχισμής, συγκεντρωτικών φακών και πρίσματος ονομάζεται **φασματοσκόπιο**, ένα από τα χρησιμότερα όργανα της συγχρονής επιστήμης. (Σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6

Το φως που εκπέμπει κάθε στοιχείο σε κατάσταση **ατμού** ή αερίου παράγει το δικό του **χαρακτηριστικό** σύνολο γραμμών και το φάσμα λέγεται **γραμμικό**. Οι γραμμές αυτές αντιστοιχούν στις μεταβάσεις των ηλεκτρονίων στις διάφορες ενεργειακές στάθμες των ατόμων και χαρακτηρίζουν το κάθε στοιχείο (όπως τα δακτυλικά αποτυπώματα, το DNA, οι αρμονικές συχνότητες της φωνής και η οδοντοστοιχία χαρακτηρίζουν κάθε άνθρωπο). Γι' αυτό ακριβώς το φασματοσκόπιο έχει ευρύτατη εφαρμογή στη χημική ανάλυση.

Αντίθετα, το φως που παράγεται από ένα κοινό λαμπτήρα πυρακτώσεως είναι λευκό και δίνει ένα διαφορετικό τύπο φάσματος το οποίο **δεν αποτελείται από χαρακτηριστικές γραμμές** αλλά χαρακτηρίζεται από μια συνέχεια στην οποία συμμετέχουν όλα τα χρώματα. Το φάσμα αυτό ονομάζεται **συνεχές φάσμα**. Τα συνεχή φάσματα είναι **χαρακτηριστικά της θερμοκρασίας** του στερεού αλλά όχι της φύσης τους. Η διαφορά, ανάμεσα στα γραμμικά και τα συνεχή φάσματα, οφείλεται στο ότι τα άτομα σ' ένα αέριο απέχουν αρκετά μεταξύ τους και τα ηλεκτρόνια των ατόμων πραγματοποιούν τις μεταβάσεις τους στις επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες εντελώς ανεπηρέαστα από την παρουσία των γειτονικών ατόμων. Σε ένα υλικό όπου τα άτομα βρίσκονται κοντά, όπως σε ένα στερεό σώμα, αντίθετα, τα ηλεκτρόνια των εξωτερικών τροχιών δεν μεταβαίνουν μόνο στις ενεργειακές στάθμες των «μητρικών τους ατόμων», αλλά και σε εκείνες των γειτονικών ατόμων. Οι μεταβάσεις τους δεν καθορίζονται με σαφήνεια, αλλά μεταβάλλονται με τις αλληλεπιδράσεις των γειτονικών ατόμων και καταλήγουν σε μια ατέλειωτη ποικιλία μεταβάσεων. Οι πιθανές συχνότητες ακτινοβολίας είναι θεωρητικά άπειρες και τελικά εμφανίζεται συνεχές φάσμα.

4.3.4 Φάσματα Απορρόφησης

Όταν λοιπόν παρατηρούμε το λευκό φως μιας πυρακτωμένης πηγής με το φασματοσκόπιο βλέπουμε ένα συνεχές φάσμα. Αν όμως βάλουμε ένα αέριο ανάμεσα στη πηγή και το φασματοσκόπιο, θα δούμε ότι στο φάσμα του υπάρχουν σκοτεινές γραμμές διάσπαρτες. Οι σκοτεινές αυτές γραμμές πάνω στο συνεχές φάσμα, που λέγονται **γραμμές απορρόφησης**, μοιάζουν σαν «αντίστροφες» γραμμές εκπομπής (αντιστοιχούν δηλαδή στα ίδια μήκη κύματος οι σκοτεινές γραμμές του φάσματος απορρόφησης με τις φωτεινές γραμμές του φάσματος εκπομπής του). Τα φάσματα απορρόφησης μορίων (π.χ. χλωροφύλλης) δεν είναι γραμμικά άλλα χαρακτηρίζονται από περιοχές μεγάλης και μικρής απορρόφησης εξαιτίας της μεγάλης πληθώρας και τύπων δυνατών ενεργειακών μεταπτώσεων λόγω της πολυπλοκότητας των δυνατών ενεργειακών σταθμών των μορίων.

Όλα τα παραπάνω βρίσκουν σημαντική εφαρμογή στην ανάλυση της χημικής σύνθεσης, διαλυμάτων αλλά και της ατμοσφαιρικής σύστασης μακρινών αστερίων όπως και του Ήλιου. Όταν έγιναν φασματοσκοπικές μετρήσεις του Ήλιου, βρέθηκαν φασματικές γραμμές διαφορετικές από αυτές που είχαν μετρηθεί στα εργαστήρια. Οι γραμμές αυτές ταυτίστηκαν με ένα νέο στοιχείο που ονομάστηκε ήλιο (από τον Ήλιο). Το ήλιο έτσι ανακαλύφθηκε στον Ήλιο, πριν βρεθεί στη Γη.

4.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Πρότυπο Φασματοσκόπιο.
- 2) Λυχνία Υδρογόνου (H), Ηλίου (He) η Υδραργύρου (Hg), (πηγή γραμμικού φάσματος).
- 3) Κοινός λαμπτήρας πυρακτώσεως (πηγή συνεχούς φάσματος).
- 4) Τροφοδοτικό για το λαμπτήρα πυρακτώσεως
- 5) Δοκιμαστικοί σωλήνες, καθένας από τους οποίους περιέχει διαφορετικό διάλυμα.
- 6) Γυάλινες πλάκες διαφόρων χρωμάτων

4.5 ΤΟ ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΟ

Η λειτουργία του φασματοσκοπίου βασίζεται στην αρχή που προκύπτει από το Σχήμα 4.5. Μια δέσμη παραλλήλων ακτίνων αναλύεται με πρίσμα και, στη συνέχεια, ένας φακός σχηματίζει το φάσμα. Για τη δημιουργία της παράλληλης δέσμης χρησιμοποιείται ο **κατευθυντήρας**. Αυτός είναι στερεωμένος σταθερά στη βάση του φασματοσκοπίου και αποτελείται από ένα σωλήνα που στο ένα άκρο του φέρει μια σχισμή, ενώ στο άλλο υπάρχει ένας φακός Φ_1 , του οποίου η εστιακή απόσταση είναι ίση με το μήκος του σωλήνα. Αν η φωτεινή πηγή είναι μονοχρωματική, όλες οι παράλληλες ακτίνες που βγαίνουν από τον κατευθυντήρα, αφού μπουν στο πρίσμα, θα διαθλασθούν αλλά θα εξακολουθήσουν να είναι παράλληλες. Κατά την έξοδό τους από το πρίσμα, θα υποστούν ξανά διάθλαση, χωρίς να πάψουν να είναι παράλληλες. Συνεπώς, ο φακός Φ_2 θα δημιουργήσει στο εστιακό του επίπεδο ένα πραγματικό είδωλο της σχισμής του κατευθυντήρα, δηλ., μία (έγχρωμη) φωτεινή γραμμή. Το πλάτος της φωτεινής γραμμής ρυθμίζεται με μεταβολή του πλάτους της σχισμής. Η παρατήρηση αυτού του ειδώλου γίνεται, σε μεγέθυνση, με μεγεθυντικό φακό. Ο φακός Φ_2 και ο μεγεθυντικός φακός είναι στερεωμένοι στα άκρα ενός σωλήνα και αποτελούν τη **διόπτρα** του οργάνου.



Σχήμα 4.7

Το πρότυπο φασματοσκόπιο

Αν το φως της πηγής δεν είναι μονοχρωματικό, οι ακτίνες όλων των μηκών κύματος, όπως και προηγουμένως, θα δημιουργούν παράλληλες δέσμες, που κάθε μια θα έχει διαφορετική διεύθυνση. Στο σχήμα 4.6 σχεδιάστηκε η πορεία των ακτίνων που προέρχονται από μια φωτεινή πηγή, η οποία εκπέμπει ακτίνες δύο, μόνο, μηκών κύματος -π.χ., ιώδεις και ερυθρές. Η δέσμη των ιωδών ακτίνων, που παθαίνει μεγαλύτερη εκτροπή, προσπίπτει στο φακό Φ_2 σε άλλο δευτερεύοντα άξονα και, συνεπώς, δημιουργεί πραγματικό είδωλο σε διαφορετικό σημείο από εκείνο των ερυθρών. Οι προσπίπτουσες δύο έγχρωμες γραμμές αποτελούν, στην περίπτωση αυτή, το φάσμα εκπομπής της εξεταζόμενης πηγής.

Επειδή τα φάσματα έχουν γενικά έκταση και, συνήθως, δεν περιλαμβάνονται ολόκληρα στο οπτικό πεδίο της διόπτρας, αυτή μπορεί να στρέφεται και, έτσι, διερευνάται κατά περιοχές ολόκληρο το φάσμα.

Το Εργαστηριακό φασματοσκόπιο που θα χρησιμοποιηθεί φαίνεται στο Σχ.4.7. Ανήκει στην κατηγορία των πρότυπων φασματοσκοπίων και λειτουργεί με εξωτερικό φωτισμό της κλίμακας. Η κλίμακα του πρότυπου φασματοσκοπίου αναφέρει τιμές λ σε nm.

4.6 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

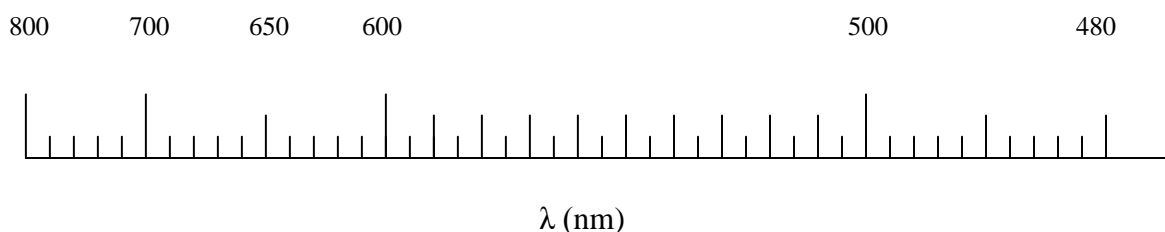
4.6.1 Μελέτη φάσματος εκπομπής

Να τεθεί σε λειτουργία η λυχνία του αγνώστου αερίου και να ρυθμισθεί το οπτικό σύστημα (εστιάστε μετακινώντας το προσοφθάλμιο κατά μήκος του σωλήνα), έτσι ώστε να εμφανισθεί ευκρινές φάσμα στο εστιακό επίπεδο της διόπτρας του **πρότυπου** φασματοσκοπίου.

1) Να καταγραφούν σε πίνακα της μορφής του ακόλουθου Πίνακα 4.1: οι αποχρώσεις των γραμμών εκπομπής, οι τιμές των λ , και το σφάλμα διακριτικής ικανότητας $\delta\lambda$ (ίσο με 0,5 της μικρότερης υποδιαίρεσης της κλίμακας).

ΠΡΟΣΟΧΗ : Η κλίμακα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΙΑΣΤΑΤΗ δηλ. η κάθε υποδιαίρεση δεν εκφράζεται με την ίδια τιμή σε nm για όλη την κλίμακα (όπως φαίνεται από την παρακάτω εικόνα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ μιας τέτοιας κλίμακας δίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Στο παράδειγμα αυτής της εικόνας: παρατηρούμε ότι:

- οι υποδιαίρεσεις στην περιοχή 400-500nm αντιστοιχούν σε 2nm,
- οι υποδιαίρεσεις στην περιοχή 500-600nm αντιστοιχούν σε 5nm
- οι υποδιαίρεσεις στην περιοχή 600-700nm αντιστοιχούν σε 10nm
- οι υποδιαίρεσεις στην περιοχή 700-800nm αντιστοιχούν σε 20nm

2) Να βρεθεί η ταυτότητα του αγνώστου αερίου συγκρίνοντας το παρατηρούμενο φάσμα με τα γνωστά φάσματα Υδρογόνου (Hydrogen-H), Ηλίου (Helium-He) η Υδραργύρου (Mercury-Hg) όπως τα βλέπουμε σε υπολογιστή του εργαστηρίου η στην ιστοσελίδα Spectra of gas discharges.html.

Άγνωστο αέριο:

3) Να υπολογισθούν οι ενέργειες ΔE (και τα αντίστοιχα σφάλματα) που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος λ του φάσματος εκπομπής. Να ληφθεί υπόψη το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του φασματοσκοπίου για κάθε ένδειξη. Τα αποτελέσματα να γραφούν στον Πίνακα 1. **Προσοχή :** η ενέργεια πρέπει να είναι σε ηλεκτρονιοβόλτ eV ($1\text{eV}=1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$).

4) Για τις περιπτώσεις που το άγνωστο αέριο είναι H ή He , να συσχετισθούν τουλάχιστον 3 από τις παρατηρούμενες ενεργειακές μεταπτώσεις με τις θεωρητικές (Σχήμα 4.4) και να προταθεί σε ποια συγκεκριμένα ζεύγη ενεργειακών σταθμών πιθανώς αντιστοιχούν. Για το σκοπό αυτό να συμπληρωθεί ο πίνακας 4.1.

Πίνακας 4.1

Απόχρωση Γραμμής	λ (nm)	$\delta\lambda$ (nm)	ΔE (eV)	$\delta\Delta E$ (eV)	$E_{αρχ}$ (eV)	$E_{τελ}$ (eV)	$\Delta E_{\theta} = E_{αρχ} - E_{τελ}$ (eV)

4.6.2 Μελέτη φασμάτων απορρόφησης

- 1) Να αντικατασταθεί η λυχνία αερίου από πηγή συνεχούς φάσματος.
- 2) Στη διαδρομή των ακτινών να παρεμβληθεί δοχείο με διάλυμα (ανακινείστε το καλά πριν τη χρήση ώστε να διαλυθεί τυχόν ίζημα). Να σημειωθούν οι ενδείξεις λ της αρχής και τέλους των περιοχών απορροφήσεως και το αντίστοιχο σφάλμα διακριτικής ικανότητας. Να γραφούν τα αποτελέσματα σε πίνακα της μορφής του ακόλουθου Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2

Υλικό (Στερεό ή Διάλυμα)	Αρχή απορρόφησης		Τέλος απορρόφησης	
	λ_{α} (nm)	$\delta\lambda$	λ_{τ} (nm)	$\delta\lambda$

λ_α: Ένδειξη της αρχής της περιοχής απορρόφησης
 λ_β: Ένδειξη του τέλους της περιοχής απορρόφησης
 δλ: αντίστοιχα σφάλματα διακριτικής ικανότητας.

- 3) Να αντικατασταθεί το παρεμβλλόμενο διάλυμα με άλλο διάλυμα και να συμπληρωθεί καινούργιος πίνακας της μορφής του 4.2 με τις αντίστοιχες ενδείξεις για το νέο διάλυμα.
- 4) Να αντικατασταθεί το διάλυμα που παρεμβάλλεται ανάμεσα στη λυχνία και τη διόπτρα με γυάλινη πλάκα συγκεκριμένου χρώματος. Να συμπληρωθεί αντίστοιχος πίνακας της μορφής του πίνακα 4.2.
- 5) Να αντικατασταθεί η γυάλινη πλάκα με άλλη πλάκα διαφορετικού χρώματος και να συμπληρωθεί αντίστοιχος πίνακας της μορφής του πίνακα 4.2.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Μπορείτε να προβλέψετε το φάσμα εκπομπής του αερίου, αν γνωρίζετε το φάσμα απορρόφησης του;
- 2) Σε ποιο φυσικό φαινόμενο βασίζεται η ανάλυση του φωτός στα διάφορα χρώματα; Υπάρχει φως που δεν αναλύεται;
- 3) Το νήμα ενός λαμπτήρα είναι από βολφράμιο. Γιατί τότε, όταν βλέπουμε το φως ενός λαμπτήρα πυράκτωσης στο φασματοσκόπιο, βλέπουμε συνεχές φάσμα και όχι το γραμμικό φάσμα του βολφραμίου;
- 4) Τα σχέδια των φασμάτων δεν είναι άμορφα φωτεινά σημάδια, αλλά, αντ' αυτού, αποτελούνται από λεπτές και διακριτές ευθείες γραμμές. Γιατί συμβαίνει αυτό;
- 5) Γιατί δεν παρατηρούμε ορατές φασματικές εκπομπές που να αντιστοιχούν σε αποδιέγερση στην κατώτερη ενεργειακή στάθμη των ατόμων ($n=1$);

Παλιές και σύγχρονες αντιλήψεις για τα χρώματα

Η άποψη που επικρατούσε μέχρι τον 17^{ον} αιώνα “έβλεπε” το (σχεδόν) λευκό φως του Ήλιου σαν το απλούστερο είδος φωτός. Το λευκό φως ήταν το “καθαρό και αμόλυντο” φως, που ήταν αδύνατον να περιέχει και κάτι άλλο. Ήταν και εξακολουθεί να είναι το σύμβολο της αγνότητας και της καθαρότητας, επιβεβαιώνοντας μια αντίληψη που διέσχισε τους αιώνες και έφθασε μέχρι τη δική μας εποχή. Τα χρώματα, αντίθετα, ήταν το αποτέλεσμα της προσθήκης όχι καθαρών προσμίξεων στο αμόλυντο λευκό φως. Καθώς το λευκό φως διέσχιζε ένα κόκκινο γυαλί ή έπεφτε πάνω σε μια αδιαφανή κίτρινη επιφάνεια “μολυνόταν” από την ερυθρότητα ή την κιτρινότητα, μια ιδιότητα που δεν είχε προηγουμένως.

Αυτές τις αντιλήψεις κατάφερε να ανατρέψει για πρώτη φορά ο Νεύτωνας. Στη θεωρία που τελικά δημιούργησε, η κεντρική ιδέα ήταν ότι το λευκό φως αποτελείται από διάφορα χρώματα-ακτινοβολίες, είναι μ' άλλα λόγια ένα μίγμα ακτινοβολιών διαφόρων χρωμάτων οι οποίες “συνταξιδεύουν” με την ίδια ταχύτητα και συνυπάρχουν μέσα στο λευκό φως, εφόσον αυτό διαδίδεται στο κενό. Όταν όμως το σύνθετο αυτό φως προσπέσει στη γυάλινη επιφάνεια του πρίσματος, κάθε ακτινοβολία υφίσταται μια διαφορετική διάθλαση σε σχέση με τις υπόλοιπες και ακολουθεί τη “δική της διαδρομή” τόσο μέσα στο

πρίσμα όσο και ύστερα από την έξοδο απ' αυτό, οπότε προσπίπτει στο λευκό πέτασμα και το χρωματίζει ανάλογα. Η συνύπαρξη διαλύεται, το φως αναλύεται, και πάνω στην οθόνη διακρίνουμε τα "χρώματα της ίριδας".

Το φως λοιπόν αναλύεται κάθε φορά που διαθλάται. Αν όμως πέσει πάνω σ' ένα απλό τζάμι, στην πρώτη του επιφάνεια διαθλάται και αναλύεται, με την δεύτερη όμως διάθλαση στην επόμενη παράλληλη επιφάνεια, το φως επανασυντίθεται. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο στα τζάμια των σπιτιών μας δε δημιουργούνται χρωματικά φαινόμενα ανάλυσης. Αν βέβαια η δεύτερη επιφάνεια δεν είναι παράλληλη προς την πρώτη, όπως συμβαίνει σε ένα πρίσμα, η ανάλυση κατά την πρώτη διάθλαση θα διατηρηθεί.

Με βάση αυτές τις αρχές φτάνουμε ως τις σημερινές μας γνώσεις για το φως. Σύμφωνα μ' αυτές όσα αντιλαμβάνεται η φυσική μας όραση προέρχεται από την ανάμειξη μιας μεγάλης ποικιλίας συχνοτήτων του ορατού φάσματος. Τα χρώματα δεν είναι τίποτα άλλο από την υποκειμενική παρατήρηση που ορίζει η ανθρώπινη φυσιολογία και ψυχολογία και αντιστοιχούν στις διάφορες περιοχές συχνοτήτων από περίπου 430×10^{14} Hz για το κόκκινο, μετά το πορτοκαλί, το κίτρινο, το πράσινο το μπλε, τελικά το ιώδες στα 710×10^{14} Hz περίπου. Είναι λοιπόν προφανές, ότι τα χρώματα δεν αποτελούν μια ιδιότητα του φωτός αλλά είναι μάλλον η αντίληψη που δημιουργείται από το ηλεκτροχημικό σύστημα που ευθύνεται για την όραση: μάτια, νευρώνες, εγκέφαλος.

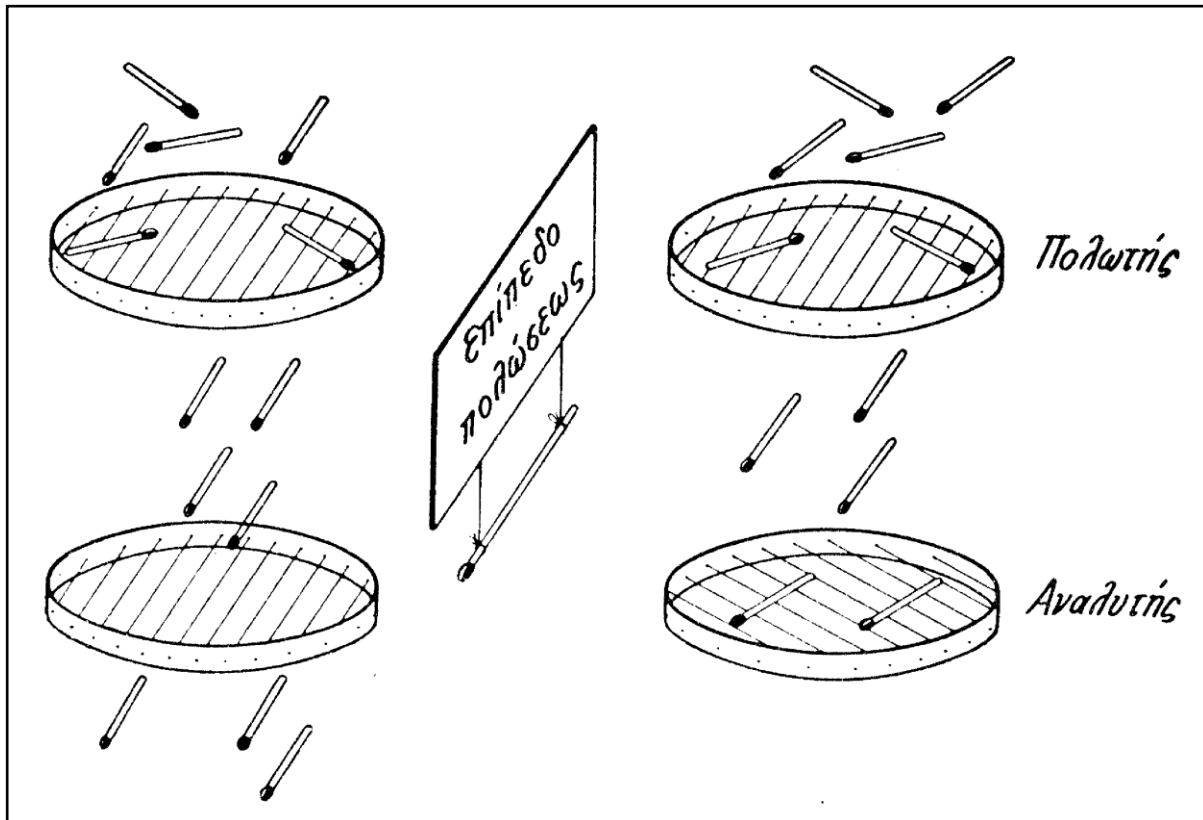
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Δ. Μεντζαφός, Α. Χούντας, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανωτάτη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1997.
- 2) P.G Hewitt, *Οι Έννοιες της Φυσικής Τόμος II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 1997.
- 3) Κ.Δ. Αλεξόπουλος, Δ.Ι. Μαρίνου, *Γενική Φυσική Τόμος V*. Εκδόσεις Ολυμπία 1992.
- 4) E. Hecht, *Physics*. Brooks/Cole Publishing Company 1994.
- 5) E. Boeker, R. van Grondelle, *Environmental Physics*. J. Wiley & Sons 1995.

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΠΟΛΩΣΙΜΕΤΡΟ - ΟΠΤΙΚΩΣ ΕΝΕΡΓΑ ΥΛΙΚΑ

"...Η ανάκλαση σε σώματα διαφανή,
φαινόμενο κοινότοπο και αρχαίο όσο
ο κόσμος, παρουσίαζε πάντοτε την
ίδια ιδιότητα, χωρίς ποτέ κανείς να το
υποψιαστεί..."
E.L. Malus 1808



5.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Ο προσδιορισμός της ειδικής στροφικής ικανότητας σάκχαρου με τη βοήθεια διαλυμάτων γνωστής συγκέντρωσης και η εύρεση της συγκέντρωσης C_x άγνωστου διαλύματος του ίδιου σάκχαρου.

5.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Με τη βοήθεια πολωσίμετρου μετριέται η στροφή του επιπέδου πολώσεως την οποία προκαλούν διαλύματα σάκχαρου γνωστών συγκεντρώσεων. Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ και η συγκέντρωση C συνδέονται με τη σχέση:

$$\Delta\theta = \alpha l C \quad \text{ή} \quad \theta = \theta_0 + \alpha l C$$

όπου: θ και θ_0 οι αντίστοιχες ενδείξεις του οργάνου για αμυδρό ισοφωτισμό με διάλυμα και χωρίς διάλυμα,

l το μήκος του δοχείου που περιέχει το διάλυμα και
 α η ειδική στροφική ικανότητα του σακχάρου.

Επειδή η ειδική στροφική ικανότητα α είναι ανεξάρτητη από τη συγκέντρωση C , η σχέση $\theta = f(C)$ είναι γραμμική της μορφής: $y = A + Bx$ με

- ανεξάρτητες μεταβλητές τις συγκεντρώσεις των διαλυμάτων ($x \rightarrow C$),
- εξαρτημένες μεταβλητές τις γωνίες στροφής θ ($y \rightarrow \theta$) και
- σταθερές της ευθείας: $A = \theta_0$ και $B = \alpha l$.

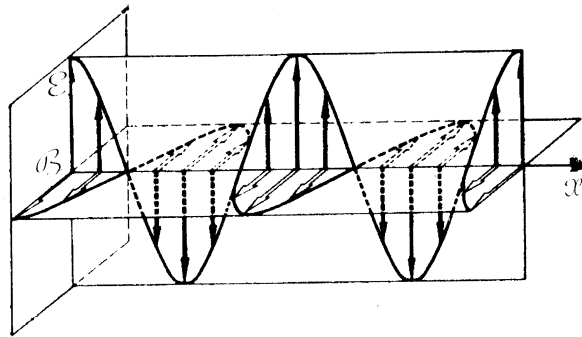
Με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (MET) υπολογίζουμε τις σταθερές A και B και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\theta = f(C)$. Επειδή το l είναι γνωστό, είναι δυνατό από την υπολογισμένη (από MET) τιμή του B να βρεθεί η ειδική στροφική ικανότητα α του διαλύματος.

Επίσης, αφού μετρηθεί η γωνία θ_x , για την οποία παρατηρείται αμυδρός ισοφωτισμός για διάλυμα άγνωστης συγκέντρωσης C_x του ίδιου σάκχαρου και με τη βοήθεια της σχέσης: $\theta_x = \theta_0 + \alpha l C_x$, υπολογίζουμε την άγνωστη συγκέντρωση C_x .

5.3 ΘΕΩΡΙΑ

5.3.1 Από το Φυσικό στο Πολωμένο φως

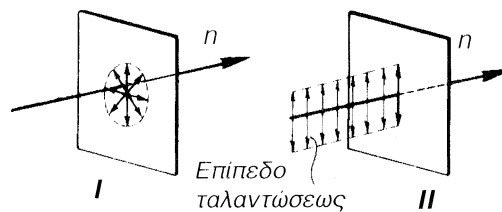
Ως προς τη φύση του φωτός, διατυπώθηκαν διάφορες θεωρίες (υλικά σωματίνα, αιθέρας κ.λ.π), από τις οποίες σήμερα γνωρίζουμε ότι ισχύει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Σύμφωνα μ'αυτή τη θεωρία, που αναπτύχθηκε από τον Maxwell, το φως αποτελείται από ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα οποία ξεκινούν από τη φωτεινή πηγή και προχωρούν κατά τη διεύθυνση διάδοσής του. Όπως είναι γνωστό, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από ένα ηλεκτρικό και από ένα μαγνητικό κύμα. Τα δύο κύματα, στην περίπτωση διαδόσεως του φωτός στο κενό, έχουν την ίδια φάση και διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα c . Τα διανύσματα \vec{E} και \vec{B} των αντιστοίχων εντάσεων είναι κάθετα μεταξύ τους. Στο σχήμα 5.1 απεικονίζεται στιγμιότυπο ενός στοιχειώδους ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Σχήμα 5.1

Για τη μελέτη των φαινομένων που παρουσιάζονται κατά τη διάδοση του φωτός προς ορισμένη κατεύθυνση επιλέγουμε μόνο το ηλεκτρικό κύμα και έτσι από εδώ και πέρα, το διάνυσμα \underline{E} της εντάσεως του θα θεωρείται ως το διάνυσμα του “φωτεινού κύματος”. Η εκλογή του διανύσματος \underline{E} είναι δικαιολογημένη από το γεγονός ότι σε πολλά φαινόμενα του φωτός με την ύλη (διέγερση ατόμων, φωτοχημικές αντιδράσεις) το ηλεκτρικό πεδίο είναι εκείνο που προκαλεί την επίδραση.

Οι διάφορες φωτεινές πηγές αποτελούνται από μεγάλο αριθμό στοιχειωδών φωτεινών πηγών (συνήθως διεγερμένων ατόμων ή μορίων), που η κάθε μία απ' αυτές



Σχήμα 5.2

εκπέμπει ένα στοιχειώδες ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Το επίπεδο (xy) στο οποίο πάλλεται το διάνυσμα \underline{E} του ηλεκτρικού κύματος ονομάζεται **επίπεδο ταλαντώσεως**. Επειδή οι στοιχειώδεις πηγές είναι ασύμφωνες μεταξύ τους, τόσο οι σχέσεις φάσεως όσο και τα επίπεδα ταλαντώσεως μεταβάλλονται διαρκώς. Η ένταση, λοιπόν, του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σ'ένα σημείο του χώρου θα καθορίζεται από την επαλληλία ενός πολύ μεγάλου αριθμού τέτοιων κυμάτων, ενώ το αποτέλεσμα της συνθέσεως θα μεταβάλλεται στατιστικώς. Το φως που προκύπτει με αυτή τη διαδικασία ονομάζεται **φυσικό φως** και συμβολίζεται στο Σχήμα 5.2(I). Όπως παρατηρούμε τα επίπεδα ταλαντώσεως μεταβάλλονται, έτσι ώστε ανά πάσα χρονική στιγμή να θεωρείται πιθανό οποιοδήποτε από αυτά, ενώ το διάνυσμα \vec{n} δηλώνει τη διεύθυνση διαδόσεως του φωτός.

Σε αντίθεση προς το φυσικό φως, κάτω από ορισμένες συνθήκες εμφανίζεται η περίπτωση στην οποία όλα τα στοιχειώδη ηλεκτρικά κύματα πάλλονται διαρκώς σε ένα επίπεδο. Το φως που προκύπτει τότε ονομάζεται **γραμμικά πολωμένο φως** και συμβολίζεται στο σχήμα 5.2(II). Είναι προφανές ότι κάθε στοιχειώδες κύμα του φωτός, που εκπέμπεται από μία στοιχειώδη πηγή είναι γραμμικά πολωμένο, δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Ο όρος “πολωμένο φως” προήλθε από τον Etienne-Louis Malus (1775-1812), ο οποίος για να εξηγήσει τις οπτικές ιδιότητες που προέρχονταν από ένα τέτοιου

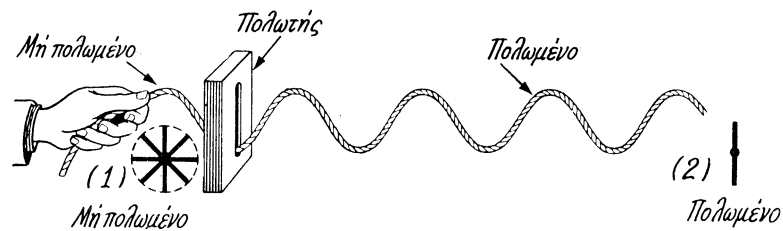
είδους φως, υιοθέτησε την “μοριακή” ερμηνεία του φωτός, που εισήγαγε ο Ισαάκ Νεύτων (1642-1727). Σύμφωνα με τον Malus τα μόρια του φωτός είναι προικισμένα με “πόλους” οι οποίοι μπορούν να προσανατολιστούν σε μία κατεύθυνση. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει, όπως έλεγε, “πόλωση”. Ο όρος διατηρήθηκε, αλλά το νόημα άλλαξε.

5.3.2 Πόλωση

Η κυματική κίνηση, με την οποία συμφωνεί και η φύση του φωτός, μπορεί γενικά να είναι είτε διαμήκης είτε εγκάρσια. Τι είδους κύματα είναι, λοιπόν, τα φωτεινά: διαμήκη ή εγκάρσια; Τα φαινόμενα της συμβολής και της διάθλασης του φωτός που μαρτυρούν την κυματική του φύση δεν μπορούν να μας βοηθήσουν να απαντήσουμε σ' αυτήν την ερώτηση γιατί τόσο τα διαμήκη όσο και τα εγκάρσια κύματα είναι δεκτικά στα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης. Υπάρχει όμως και ένα άλλο φαινόμενο, αυτό της **πόλωσης του φωτός** το οποίο μπορεί να μας δώσει την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

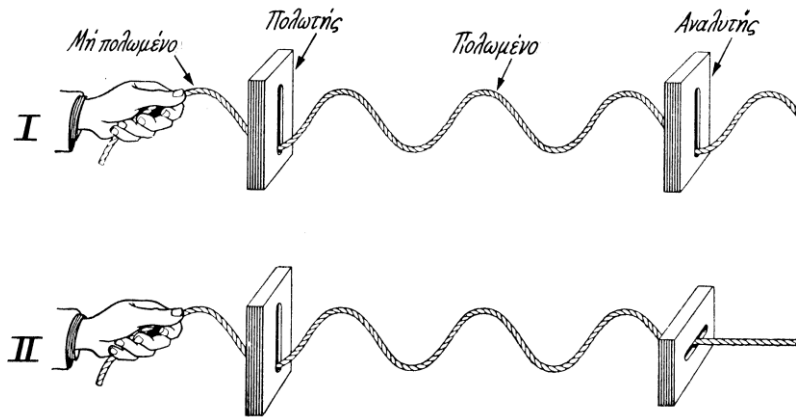
Ένα παράδειγμα διαμήκους κύματος είναι η διάδοση του ήχου στον αέρα, όπου η παλμική κίνηση γίνεται κατά μήκος της διάδοσης του κύματος.

Μια εικόνα εγκάρσιου κύματος μπορούμε να πάρουμε όταν κινούμε κάθετα ένα σχοινί αλλά προς διάφορες διευθύνσεις, η παλμική κίνηση που διαδίδεται κατά μήκος του είναι κάθετη ή εγκάρσια ως προς το σχοινί αλλά επίσης σε διάφορες διευθύνσεις. Εάν αναγκάσουμε το σχοινί να περάσει μέσα από μια σχισμή, αυτή το αναγκάζει να πάλλεται σε ένα μόνο επίπεδο, δηλ. η παλμική κίνηση γίνεται και πάλι κάθετα ως προς το σχοινί αλλά αυτή τη φορά σε μία μόνο διεύθυνση πάνω-κάτω (σχήμα 5.3). Λέμε, τότε, ότι η παρεμβολή της σχισμής είχε ως αποτέλεσμα την **πόλωση του κύματος**, το οποίο πλέον καλείται **πολωμένο**, ενώ η σχισμή που προκαλεί την πόλωση του κύματος ονομάζεται **πολωτής**. Το επίπεδο που ορίζεται από τη σχισμή και το σχοινί ονομάζεται **χαρακτηριστικό επίπεδο του πολωτή**.



Σχήμα 5.3

Εάν σε μικρή απόσταση από την πρώτη σχισμή τοποθετήσουμε και μια άλλη όμοια, με το χαρακτηριστικό επίπεδο της παράλληλο προς αυτό της πρώτης (Σχήμα.5.4, I), τότε το κύμα διαδίδεται πίσω της αναλλοίωτο, ενώ αν το χαρακτηριστικό επίπεδο της δεύτερης σχισμής είναι κάθετο ως προς αυτό της πρώτης, το κύμα δεν διαδίδεται πίσω από τη δεύτερη (Σχήμα.5.4, II). Με τη βοήθεια λοιπόν της δεύτερης σχισμής μπορούμε να καταλάβουμε αν ένα κύμα είναι πολωμένο ή όχι, και γι' αυτό το λόγο αυτή ονομάζεται **αναλυτής**. Είναι προφανές ότι στα διαμήκη κύματα δεν είναι δυνατόν να συμβεί φαινόμενο ανάλογο της πόλωσης των εγκάρσιων κυμάτων, γι' αυτό το λόγο τα ηχητικά κύματα δεν είναι δυνατόν να πολωθούν.

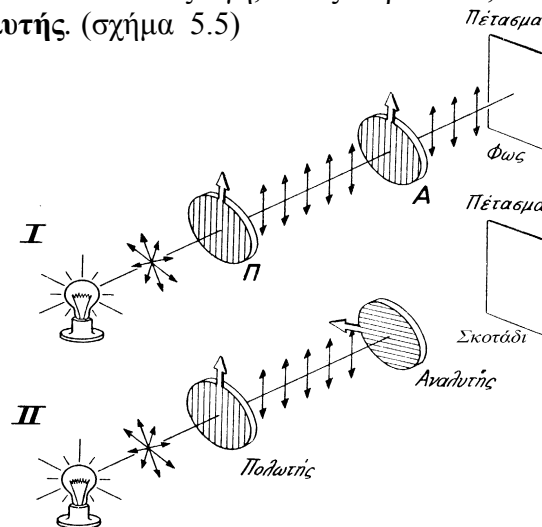


Σχήμα 5.4

Αντίθετα, για το φως είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι παρουσιάζει μια τέτοια συμπεριφορά όταν διέρχεται από τα κατάλληλα υλικά. Τέτοια υλικά είναι π.χ τα φίλτρα πολαρόντ τα οποία αποτελούνται από κάποια ευθυγραμμισμένα μόρια.

Μια κοινή φωτεινή πηγή (όπως μια λάμπα πυράκτωσης, ένας λαμπτήρας φθορισμού, μια φλόγα κεριού ή μια λάμπα τόξου) εκπέμπει φως, που δεν είναι πολωμένο. Και αυτό, επειδή δεν υπάρχουν προτιμώμενες κατευθύνσεις δόνησης για τα επιταχυνόμενα φορτία που παράγουν φως. Αν κοιτάξετε μη πολωμένο φως μέσα από φίλτρο πολαρόντ, μπορείτε να στρέψετε το φίλτρο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, χωρίς να αλλοιωθεί το φως που παρατηρείτε. Αλλά αν το φως είναι πολωμένο, τότε, καθώς θα στρέψετε το φίλτρο, το φως θα ελαττώνεται προοδευτικά, ώσπου θα σβήσει εντελώς. Ένα ιδανικό φίλτρο πολαρόντ διαδίδει το 50% του προσπίπτοντος μη πολωμένου φωτός. Το 50% που περνά είναι βέβαια πολωμένο.

Όταν βάλουμε τα φίλτρα πολαρόντ έτσι, ώστε οι άξονες πόλωσής τους να είναι παράλληλοι, το φως θα περάσει μέσα και από τα δύο. Αν οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, δεν θα περάσει καθόλου φως από το ζευγάρι των φίλτρων. Στην πραγματικότητα θα περάσει κάποια ασήμαντη ποσότητα από τα μικρότερα μήκη κύματος. Όταν τα φίλτρα πολαρόντ χρησιμοποιούνται κατά ζεύγη, όπως παραπάνω, το πρώτο είναι ο **πολωτής** και το δεύτερο ο **αναλυτής**. (σχήμα 5.5)



Σχήμα 5.5

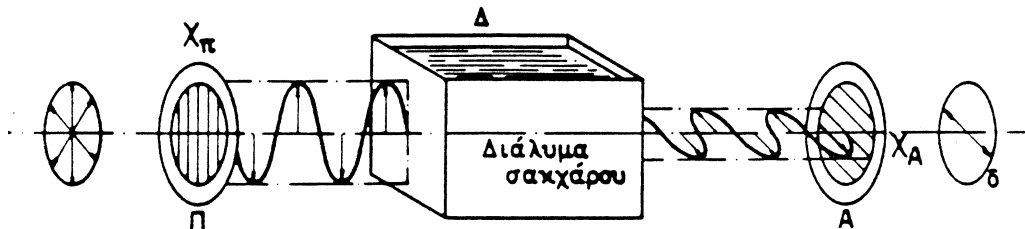
Με βάση αυτή τη διάταξη είναι πολύ εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το φως παρουσιάζει το φαινόμενο της πόλωσης και συνεπώς, απαντώντας στο αρχικό ερώτημα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η διάδοση του γίνεται με εγκάρσια κύματα.

Το φως που ανακλάται σε μη μεταλλικές επιφάνειες είναι, γενικά, πολωμένο. Η λάμψη του γυαλιού ή του νερού είναι καλό παράδειγμα.

5.3.3 Οπτικός Ενεργά Υλικά

Εξετάζουμε σύστημα, που αποτελείται από πολωτή και αναλυτή, των οποίων τα χαρακτηριστικά επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε, όπως είπαμε, μετά απ' τον αναλυτή δεν εμφανίζεται φωτεινή δέσμη γιατί σημειώνεται απόσβεση.

Αν όμως μεταξύ πολωτή και αναλυτή τοποθετηθεί διάλυμα σακχάρου, μετά τον αναλυτή θα εμφανιστεί φωτεινή δέσμη παρά το ότι τα δύο χαρακτηριστικά επίπεδα εξακολουθούν να είναι κάθετα (Σχήμα. 5.6). Αυτό οφείλεται στην στροφή του επιπέδου του πολωμένου φωτός από το διάλυμα του σακχάρου. Τα σώματα που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **οπτικός ενεργά**.



Σχήμα. 5.6

Για να εξαφανιστεί πάλι το φως πρέπει ο αναλυτής να στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta$. Αν η στροφή αυτή γίνει κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, το υλικό ονομάζεται **δεξιόστροφο**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση **αριστερόστροφο**. Το πείραμα απέδειξε ότι η γωνία στροφής $\Delta\theta$ είναι ανάλογη του μήκους ℓ που διανύει το φως μέσα στην ενεργό ουσία:

$$\Delta\theta = \beta \ell$$

Ο συντελεστής β ονομάζεται **στροφική ικανότητα** και εξαρτάται από το μήκος κύματος του φωτός που χρησιμοποιήθηκε και τη φύση της ουσίας. Αν η οπτικά ενεργός ουσία είναι διάλυμα, το β εξαρτάται και από τη συγκέντρωση του διαλύματος. Δηλαδή:

$$\beta = \alpha C$$

Το α ονομάζεται **ειδική στροφική ικανότητα** και εξαρτάται από τη φύση της διαλυμένης ουσίας, το μήκος κύματος του φωτός και τη θερμοκρασία. Αν το β αντικατασταθεί στην προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$\Delta\theta = \alpha \ell C$$

Αν θ_0 και θ είναι οι ενδείξεις του γωνιομετρικού κύκλου του οργάνου για πλήρη απόσβεση του φωτός χωρίς διάλυμα και με διάλυμα, αντίστοιχα, τότε:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

και η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\theta = \theta_0 + \alpha \ell C$$

Επομένως η συνάρτηση $\theta = f(C)$ είναι ευθεία με κλίση $= \alpha \ell$ και τεταγμένη θ_0 . Από την κλίση μπορεί να βρεθεί η ειδική στροφική ικανότητα α , αν είναι γνωστό το ℓ . Επειδή

συνήθως το θ εκφράζεται σε μοίρες, το l σε cm και το C σε M (moles/lit, π.χ. 0.5 M, 1.0 M, κ.λ.π), το α εκφράζεται σε:

$$\frac{\text{μοιρες}}{\text{cm(moles / lit)}}$$

Τα οπτικώς ενεργά υλικά είναι:

- Κρύσταλλοι οργανικών και ανόργανων ενώσεων που οφείλουν τη στροφική τους ικανότητα στην εσωτερική δομή του κρυστάλλου.
- Οργανικές ενώσεις υγρές, ή διαλύματα που οφείλουν τη στροφική τους ικανότητα στην κατασκευή του μορίου.

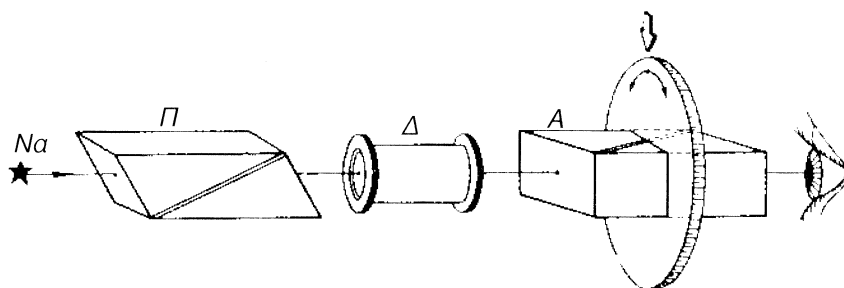
Δεξιόστροφα υλικά είναι π.χ. τα: καλμοσάκχαρο, μαλτόζη, δεξτρόζη, άμυλο, δεξτρίνη, γλυκογόνο, τρυγικό οξύ (δ) και τα άλατά του, μηλικό οξύ κ.λ.π.. Αριστερόστροφα είναι π.χ. τα: λεβουλόζη, μανίτης, τρυγικό οξύ (α) και τα άλατά του, κινίνη, μορφίνη, στρυχνίνη, νικοτίνη κ.λ.π.

5.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Πολωσίμετρο Hartnack
- 2) Τέσσερα δοχεία με διαλύματα σακχάρου γνωστής συγκέντρωσης και ένα δοχείο με διάλυμα του ίδιου σακχάρου αλλά άγνωστης συγκέντρωσης.

5.4.1 ΤΟ ΠΟΛΩΣΙΜΕΤΡΟ

Το πολωσίμετρο είναι όργανο που χρησιμεύει για τη μελέτη της πόλωσης και τη μέτρηση της γωνίας στροφής του επιπέδου ταλάντωσης του πολωμένου φωτός. Στην απλούστερη μορφή του (Σχήμα 5.7) αποτελείται από ένα πολωτή Π, ένα δοχείο Δ στο οποίο βάζουμε το οπτικώς ενεργό υγρό, έναν αναλυτή που φέρει γωνιομετρικό κύκλο και από μία δίοπτρα για την παρατήρηση.

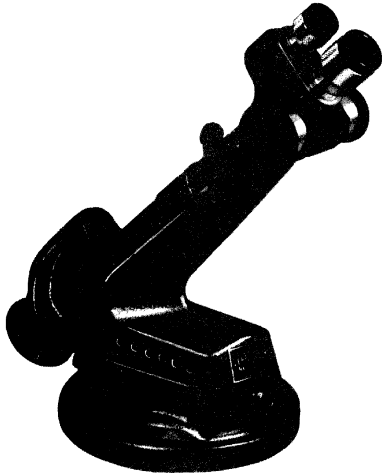


Σχήμα 5.7

Το όργανο ρυθμίζεται αρχικά χωρίς υγρό, για να βρεθεί η θέση του αναλυτή στην οποία αυτός είναι διασταυρωμένος με τον πολωτή. Σ' αυτήν τη θέση, όπου έχουμε απόσβεση του φωτός, διαβάζουμε την ένδειξη στο γωνιομετρικό κύκλο. Κατόπιν, παρεμβάλλεται το δοχείο Δ που περιέχει το υγρό και αναζητείται, ξανά, η θέση απόσβεσης. Σ' αυτήν τη θέση γίνεται ανάγνωση της νέας ένδειξης στο γωνιομετρικό κύκλο. Η διαφορά των δύο ενδείξεων δίνει τη γωνία στροφής του επιπέδου ταλάντωσης του φωτός.

Η παραπάνω διάταξη που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.7 βασίζεται στην αναζήτηση, κάθε φορά, της θέσεως αποσβέσεως του φωτός. Επειδή αυτή επέρχεται κάθε

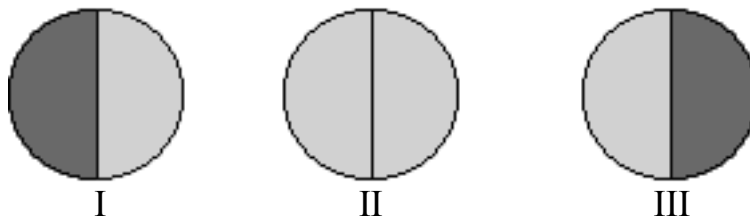
φορά σε αρκετά μεγάλη περιοχή γωνιών περί τη θέση καθετότητας του επιπέδου ταλάντωσης του φωτός και του χαρακτηριστικού επιπέδου του αναλυτή, **η θέση απόσβεσης δεν μπορεί να προσδιορισθεί με μεγάλη ακρίβεια**. Γι' αυτό το λόγο στο εργαστήριο χρησιμοποιούμε Hartnack που απεικονίζεται στην εικόνα 5.1.



Εικόνα 5.1

Το πολωσίμετρο αυτό αποτελείται από τον κατευθυντήρα, επάνω στον οποίο έχει προσαρμοστεί ο πολωτής και την διόπτρα, επάνω στην οποία έχει προσαρμοστεί ο αναλυτής. Από την βάση του οργάνου το φυσικό φως πολώνεται μέσα από τον πολωτή και περνώντας από τον χώρο όπου τοποθετείται το διάλυμα και από τον αναλυτή, φθάνει στον προσοφθάλμιο φακό για την παρατήρηση του οπτικού πεδίου. Η σημαντικότερη διαφορά με το πολωσίμετρο που περιγράφεται στο Σχήμα 5.7 βρίσκεται στον αναλυτή. Εκεί έχει προστεθεί ένας πρόσθετος πολωτής από χαλαζία (Laurent), που καλύπτει το μισό κυκλικό δίσκο που αποτελεί το οπτικό πεδίο του αναλυτή. Αυτός ο βοηθητικός πολωτής έχει ρυθμιστεί, έτσι ώστε το χαρακτηριστικό του επίπεδο να σχηματίζει γωνία μερικών μοιρών με το χαρακτηριστικό επίπεδο του

κύριου πολωτή. Τώρα το οπτικό πεδίο χωρίζεται σε δύο περιοχές (ίσοι ημικυκλικοί δίσκοι), οι οποίες αποτελούνται από φως που το επίπεδο ταλάντωσης του διαφέρει κατά μερικές μοίρες από τη μία στην άλλη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μία να εμφανίζεται φωτεινή (κιτρινο-πορτοκαλί) ενώ η άλλη σκοτεινή. Είναι προφανές ότι, δεν υπάρχει θέση του αναλυτή, για την οποία και οι δύο περιοχές να σβήνουν ταυτόχρονα. Γιατί αν σε κάποια θέση του πετυχαίνεται απόσβεση του αριστερού πεδίου (Σχήμα 5.8, I), το δεξιό πεδίο θα είναι σχετικά φωτεινό. Με στροφή κατά μερικές μοίρες επιτυγχάνεται το αντίθετο (Σχ.5.8, III). Ενδιάμεσα μεταξύ των δύο προηγούμενων θέσεων θα υπάρχει μια θέση που επιτυγχάνεται ισοφωτισμός, κατά τον οποίο τα όρια μεταξύ των πεδίων εξαφανίζονται, οπότε όλο το οπτικό πεδίο παρουσιάζεται ασθενώς και ομοιομόρφως φωτισμένο (Σχ.5.8, II). Σ' αυτή τη θέση του αμυδρού ισοφωτισμού θεωρούμε ότι έχουμε την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια για την περιοχή απόσβεσης.



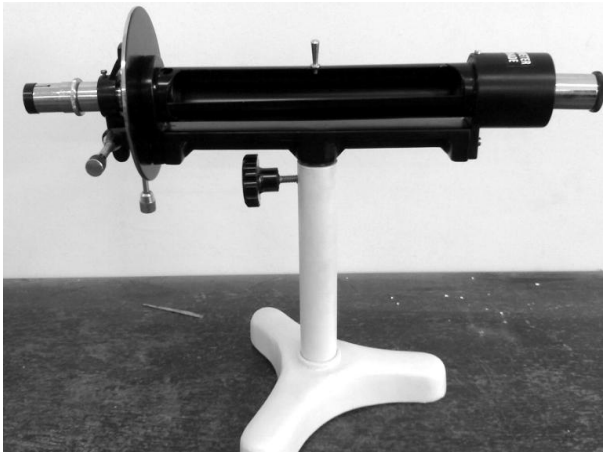
Σχήμα 5.8

Σημειώνουμε την γωνία που παρατηρείται αυτή η περιοχή από την αντίστοιχη κλίμακα μέτρησης. Η κλίμακα μέτρησης κατέχει δύο διαφορετικά τμήματα. Το ανώτερο τμήμα έχει υποδιαιρέσεις ανά $0,1^{\circ}$ και μετράει γωνίες από -25° προς τα αριστερά, μέχρι $+25^{\circ}$ προς τα δεξιά. Αυτή είναι που θα χρησιμοποιείται στην εκτέλεση της άσκησης. Το κατώτερο τμήμα περιλαμβάνει μια περιοχή από -20% προς τα αριστερά, μέχρι $+20\%$

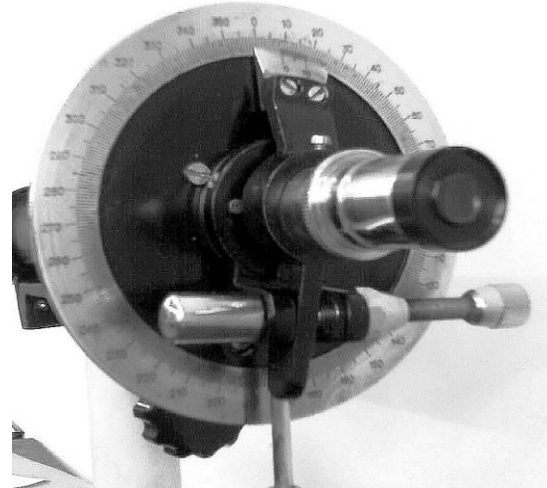
προς τα δεξιά και είναι υποδιαιρεμένο σε 0,2%. Η κλίμακα αυτή δεν χρησιμοποιείται κατά την εκτέλεση της άσκησης.

Το μήκος του δοχείου του πολωσιμέτρου που αντιστοιχεί με την απόσταση που διανύει το πολωμένο φως μέσα στο διάλυμα από τον πολωτή ως τον αναλυτή είναι $\ell=10\text{cm}$

Ένα άλλου τύπου πολωσίμετρο που μπορεί να συναντήσετε στο εργαστήριο Φυσικής απεικονίζεται στις ακόλουθες εικόνες 5.2α και β. Το πολωσίμετρο αυτό διαφέρει από αυτό της Εικόνας 5.1 ως προς το τμήμα με το οποίο μετράμε τις γωνίες θ και το μήκος του δοχείου $\ell=20\text{cm}$.



(α)



(β)

Εικόνα 5.2

Το τμήμα αυτό (Εικόνα 5.2β) αποτελείται από το γωνιομετρικό κύκλο με βερνιέρο, τον μοχλό περιστροφής του δίσκου (κάτω) και τον αντίστοιχο ακινητοποίησής του. Η σταθερά του βερνιέρου είναι (δείτε την Άσκηση 3, σελ. 40) :

$$C = \frac{1}{n} \cdot S = \frac{1}{10 \text{ υποδ.}} \cdot 1^\circ = 0,1 \frac{\text{μοίρες}}{\text{υποδ.}}$$
 και η τιμή μέτρησης στο Σχ.5.10 είναι :

$$\theta = 8^\circ + 6 \text{ υποδ.} \times 0,1 \frac{\text{μοίρες}}{\text{υποδ.}} = 8,6^\circ$$

5.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

1) Να φωτιστεί το πολωσίμετρο. Να ρυθμιστεί ο προσοφθάλμιος φακός της διόπτρας, ώστε να φαίνεται καθαρά το διπλό οπτικό πεδίο.

2) Να στραφεί ο αναλυτής, μέχρι να επιτευχθεί αμυδρός ισοφωτισμός (σχ.5.8). Στην περίπτωση του μεγάλου πολωσιμέτρου, ισοφωτισμός παρατηρείται σε δύο γωνίες: 0 και 90 μοίρες. Συστήνεται η περιοχή γύρω στις 0 μοίρες για τις μετρήσεις σας, λόγω μικρότερων σφαλμάτων. Να βρεθεί η ένδειξη θ_0 του γωνιομετρικού κύκλου. Τα αποτελέσματα να γραφούν σε πίνακα παρόμοιο με τον Πίνακα 5.1.

3) Να απορρυθμιστεί το όργανο και να επιτευχθεί πάλι αμυδρός ισοφωτισμός. Να καταχωρηθεί η καινούργια ένδειξη θ_0 σε πίνακα παρόμοιο με τον Πίνακα 5.1. Το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται τέσσερις φορές. Συνολικά λαμβάνονται 4 ($i = 4$) μετρήσεις της θ_0 .

Πίνακας 5.1

Χωρίς Διάλυμα	i	θ_0^i (°)
	1	
	2	
	3	
	4	

4) Να τοποθετηθεί μέσα στο πολωσίμετρο το δοχείο με το διάλυμα συγκεντρώσεως C_1 . Να επαναληφθούν τα βήματα (2) και (3). Να γραφούν τα αποτελέσματα σε πίνακα παρόμοιο με τον Πίνακα 5.2.

Προσοχή: Το δοχείο συμπληρώνεται ώστε το οριζόντιο τμήμα του να είναι πλήρες υγρού. Πριν την τοποθέτηση ελέγχεται, ώστε να μην υπάρχουν παγιδευμένες φυσαλίδες αέρα στο δοχείο του πολωσιμέτρου. Το υγρό δεν επιστρέφεται στο αρχικό δοχείο αλλά αδειάζεται στην λεκάνη.

5) Να επαναληφθούν τα βήματα (2) και (3) και για τα υπόλοιπα διαλύματα με συγκεντρώσεις C_N ($N=2,3,4$). Πριν τοποθετηθεί νέο διάλυμα στο δοχείο του πολωσιμέτρου, το προηγούμενο χύνεται στη λεκάνη και το δοχείο πλένεται με απεσταγμένο νερό.

6) Να τοποθετηθεί στο πολωσίμετρο το δοχείο με το διάλυμα άγνωστης συγκεντρώσεως C_x . Να επαναληφθούν τα βήματα (2) και (3) και οι μετρήσεις να συμπληρωθούν στον πίνακα της μορφής 5.2

Πίνακας 5.2

N	C _N (Molarity)	θ_N^i (°)
1		
2		
3		
4		
x	C _x	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Ποιό φαινόμενο ξεχωρίζει τα διαμήκη από τα εγκάρσια κύματα;
- 2) Κάντε τη διάκριση μεταξύ πολωμένου και μη πολωμένου φωτός. Πολώνεται ποτέ ο ήχος;
- 3) Σε τι διαφέρει κατασκευαστικά ο πολωτής από τον αναλυτή;

4) Ποιό ποσοστό φωτός μπορεί να περάσει από δύο ιδανικά φίλτρα πολαρόνιτ, που έχουν τοποθετηθεί το ένα πάνω στο άλλο με τους άξονες πόλωσης παράλληλους; Όταν οι άξονες τους σχηματίζουν ορθή γωνία;

5) Γιατί τα γυαλιά ηλίου πολαρόνιτ ελατώνουν τη λάμψη, ενώ τα μη πολωτικά γυαλιά απλώς κόβουν ένα τμήμα του φωτός που φτάνει στα μάτια;

6) Πως μπορούμε, χρησιμοποιώντας ένα μόνο φύλλο φίλτρου πολαρόνιτ, να δείξουμε ότι το φως από τον ουρανό είναι μερικώς πολωμένο;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Κ.Δ. Αλεξόπουλος, Δ.Ι. Μαρίνος, *Γενική Φυσική, Τόμος V, Οπτική*. Εκδόσεις Ολυμπία 1992.

2) Δ.Μεντζαφός, Α.Χούντας, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανωτάτη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1997.

3) Θ.Γ. Κουγιουμζέλη, Σ.Γ. Περιστεράκη, *Στοιχεία Φυσικής, τόμος II, Κυματική*. Εκδόσεις Ν.Κοκοτσάκη 1971

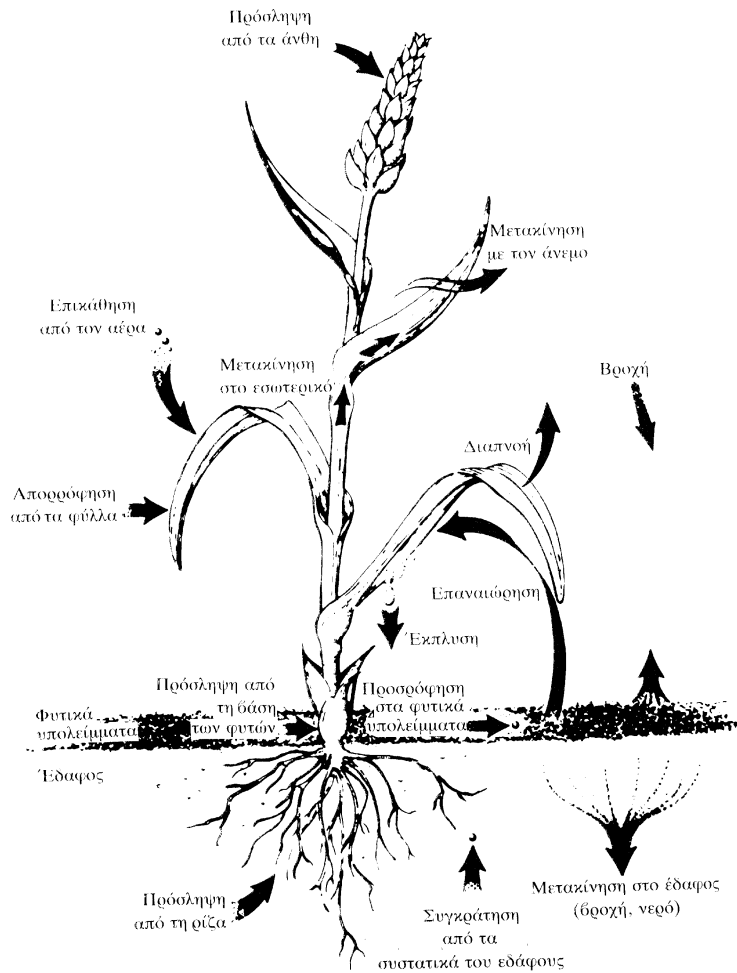
4) P.G. Hewitt, *Οι Έννοιες της Φυσικής, Τόμος II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 1997.

5) J. Jacques, *Το Μόριο στον Καθρέφτη*. Εκδόσεις Κάτοπτρο 1993.

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΤΗΣ γ -ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ

Τα φυτά μπορούν να προσλάβουν ραδιενεργά στοιχεία είτε απευθείας από τον αέρα (άμεση ρύπανση), είτε να τα απορροφήσουν από το έδαφος (έμμεση ρύπανση). Τα ραδιενεργά στοιχεία μέσω της τροφικής αλυσίδας περνούν στους ανώτερους οργανισμούς και φτάνουν μέχρι τον άνθρωπο.



6.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Ο προσδιορισμός του γραμμικού συντελεστή απορρόφησης μ του μολύβδου για την ακτινοβολία γ .

6.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Με τη βοήθεια απαριθμητή καταγράφεται η ένταση I της ακτινοβολίας ραδιενεργού πηγής ως ο αριθμός των κρούσεων τις οποίες δίνει η ραδιενεργός πηγή για ορισμένο χρονικό διάστημα (1 min).

Αρχικά, μετράται η ένταση της γ -ακτινοβολίας $I_0 = \Delta N/\Delta t$ (κρούσεις/min) χωρίς παρέμβαση υλικού. Η μέτρηση επαναλαμβάνεται για λόγους που αναλύονται παρακάτω. Ακολουθώς παρεμβάλλονται μεταξύ της πηγής και του απαριθμητή, διαδοχικά, πλάκες μολύβδου με διάφορα πάχη x και με την ίδια διαδικασία μετράται η ένταση I της γ -ακτινοβολίας μετά την έξοδό της από την πλάκα. Η ένταση I και το πάχος x συνδέονται με την σχέση απορρόφησης: $I = I_0 e^{-\mu x}$ (όπου μ είναι ο συντελεστής απορρόφησης του υλικού για την ακτινοβολία γ). Λογαριθμίζοντας το αριστερό και δεξί μέρος και χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των λογαρίθμων καταλήγουμε στη σχέση:

$$\ln \frac{I_0}{I} = \mu x$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική με ανεξάρτητη μεταβλητή (x) το x και εξαρτημένη (y) το $\ln \frac{I_0}{I}$.

Με χρήση της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων υπολογίζουμε τις σταθερές της γραμμικής αυτής σχέσης και από την τιμή και το σφάλμα της σταθεράς που αντιστοιχεί στην κλίση της ευθείας, υπολογίζεται ο συντελεστής μ και το σφάλμα του $\delta\mu$. Με τη

βοήθεια της σχέσης : $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$ βρίσκεται το πάχος ημιαπορρόφησης $x_{1/2}$ και το σφάλμα του $\delta x_{1/2}$.

6.3 ΘΕΩΡΙΑ

6.3.1 Απορρόφηση ακτινοβολίας γ από την ύλη.

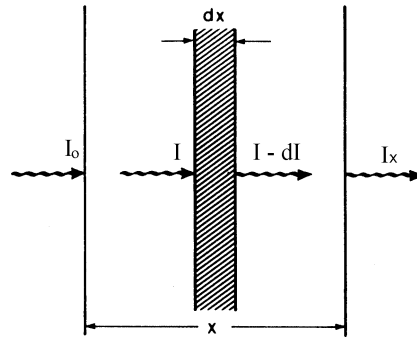
Αν η ένταση ακτινοβολίας γ που πέφτει πάνω σε υλικό πάχους dx είναι I , (σχήμα 6.1), η ελάττωση της εντάσεως της ακτινοβολίας μετά τη διόδό της από το υλικό, θα είναι ανάλογη της αρχικής εντάσεως I και του πάχους dx δηλαδή:

$$dI = -\mu I dx \quad (6.1)$$

όπου: μ = σταθερή ποσότητα που ονομάζεται **συντελεστής απορρόφησης** (absorption coefficient) και εξαρτάται από τον ατομικό αριθμό του υλικού και την ενέργεια της ακτινοβολίας γ .

Το αρνητικό σημείο στη σχέση (6.1) έχει τεθεί γιατί, όταν αυξάνει το πάχος x κατά dx ($dx > 0$), η ένταση I ελαττώνεται κατά dI ($dI < 0$). Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (6.1) έχουμε:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (6.2)$$



Σχήμα 6.1

Αντίστοιχα με το χρόνο υποδιπλασιασμού ορίζουμε για την απορρόφηση της ακτινοβολίας γ το **πάχος ημιαπορρόφησης** $x_{1/2}$ (half-thickness) ως "το πάχος εκείνο, για το οποίο η ένταση της διερχόμενης ακτινοβολίας γ ελαττώνεται στο μισό". Αντικαθιστώντας λοιπόν στην σχέση 6.2 την I με $I_0/2$ προκύπτει:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x_{1/2}} \tag{6.3}$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα, της έντασης I της διερχόμενης ακτινοβολίας σε συνάρτηση με το πάχος x του υλικού, θα έχει τη μορφή του σχήματος 6.4, με άξονες, βέβαια x και I .

Από την λύση της σχέσης (6.3) έχουμε τελικά:

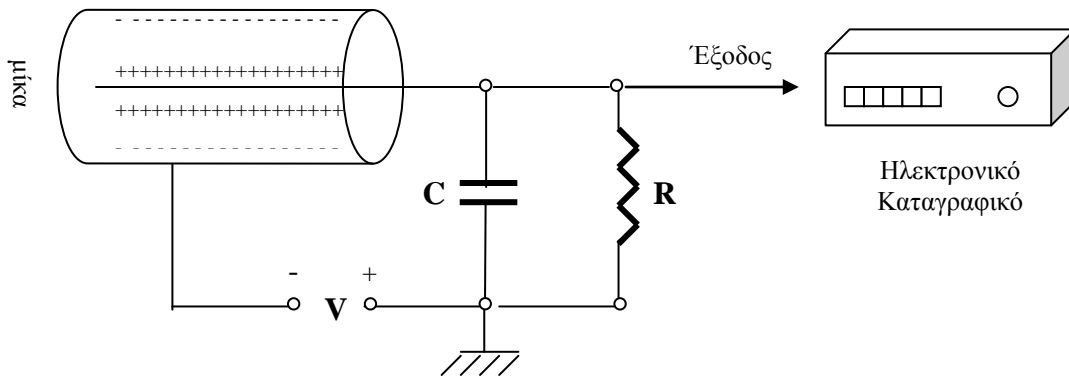
$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \tag{6.4}$$

6.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Διάταξη ανιχνευτή Geiger Müller.
- 2) Ραδιενεργός Πηγή Co^{60} 5μCi (γ)
- 3) Πλάκες μολύβδου
- 4) Μικρόμετρο

6.4.1 Ο ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΗΣ GEIGER-MÜLLER

Για τη μέτρηση της ακτινοβολίας που εκπέμπει μία πηγή χρησιμοποιούνται οι **απαριθμητές** ή μετρητές. Ο απαριθμητής Geiger-Müller είναι ένας κυλινδρικός μεταλλικός σωλήνας (Σχ. 6.2) κατά μήκος του άξονα του οποίου έχει τοποθετηθεί συρμάτινος αγωγός. Η μία βάση β του κύλινδρου κλείνεται από παράθυρο μίκας.



Σχήμα 6.2

Μέσα στο σωλήνα υπάρχει αέριο με ελαττωμένη πίεση. Μεταξύ του κυλινδρικού σωλήνα και του άξονα εφαρμόζεται υψηλή τάση τέτοια, ώστε να είναι έτοιμη να παραχθεί ηλεκτρική εκκένωση. Όταν περάσει ένα φορτισμένο σωματίο (α ή β) ή φωτόνιο (X ή γ) το αέριο ιονίζεται και αρχίζει η εκκένωση, με αποτέλεσμα από τον πυκνωτή C και την αντίσταση R (Σχ. 6.2) να περάσει μικρό ρεύμα. Το μικρό αυτό ρεύμα γρήγορα μηδενίζεται, επειδή η αντίσταση R είναι πολύ μεγάλη και παίρνει τη μορφή παλμού ρεύματος, ενώ ο απαριθμητής γρήγορα είναι έτοιμος να ανιχνεύσει άλλο σωματίο. Ο παλμός οδηγείται σε ηλεκτρονικό καταγραφικό, όπου καταγράφονται τα αποτελέσματα της μετρήσεως.

Κατά την απαρίθμηση σωματιδίων ή φωτονίων γίνονται σφάλματα που οφείλονται σε δύο λόγους:

1) **Στη στατιστικότητα του φαινομένου της ραδιενέργειας.** Δηλ. σε ίσους χρόνους ποτέ δεν εκπέμπεται από την ίδια πηγή ο ίδιος αριθμός σωματιδίων ή φωτονίων. Αυτό ισχύει και μετά από τις διορθώσεις που υπαγορεύονται από την ελάττωση του αριθμού των πυρήνων με το χρόνο.

2) **Στο νεκρό χρόνο του απαριθμητή.** Για την ανίχνευση και καταγραφή ενός σωματίου ή φωτονίου από το μετρητικό σύστημα απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα. Το διάστημα αυτό διαρκεί από τη στιγμή που το σωματίο ή το φωτόνιο πέφτει στο μετρητή, μέχρι τη στιγμή που έχουν αποπερατωθεί όλες οι διαδικασίες παραγωγής και καταγραφής του παλμού. Μόνο μετά από το πέρας αυτών, το σύστημα είναι έτοιμο για την επόμενη μέτρηση. Αν ενδιάμεσα προσπέσει στο μετρητή άλλο σωματίο ή φωτόνιο δεν είναι δυνατό να ανιχνευθεί. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **νεκρός χρόνος** και είναι, για μεν τον Geiger-Müller της τάξεως των $3 \cdot 10^{-4}$ sec, για δε τον σπινθηριστή της τάξεως των 10^{-8} sec. Για το λόγο αυτό ένας απαριθμητής σπινθηρισμών μπορεί να μετρήσει μέχρι το 30% της ακτινοβολίας που δέχεται, ενώ ο G-M καταμετρά πολύ μικρότερο ποσοστό, μόλις 1%.

Για τους λόγους αυτούς δεν είναι σταθερή η τιμή των μετρήσεων, κατά την απαρίθμηση, για δεδομένο χρονικό διάστημα, αλλά **μπορεί να ληφθεί μία ικανοποιητική μέση τιμή αν η διάρκεια μιάς μετρήσεως είναι πολύ μεγάλη, ή αν η ίδια μέτρηση επαναληφθεί όσο το δυνατό περισσότερες φορές και ληφθεί ο μέσος όρος.**

6.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

1) Να τοποθετηθεί ο απαριθμητής G-M απέναντι από τη ραδιενεργό πηγή γ-ακτινοβολίας. ΠΡΟΣΟΧΗ: Η απόσταση πηγής-απαριθμητή να παραμείνει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

2) Να μετρηθεί 5 φορές η ένταση I_0 της πηγής. Κάθε μέτρηση επαναλαμβάνεται για χρονικό διάστημα ενός λεπτού (1 min) και η ένταση δίνεται από τον αριθμό των καταγεγραμμένων κρούσεων ως κρούσεις/min. Τα αποτελέσματα να γραφούν σε Πίνακα της μορφής του Πίνακα 6.1.

Πίνακας 6.1

i-μέτρηση	$I_0^{(i)}$ (κρ./min)
1	
2	
3	
4	
5	

3) Επιλέξτε 4 πλάκες μολύβδου που διαφέρουν ως προς το πάχος τους. Να μετρηθεί με το μικρόμετρο το πάχος x της λεπτότερης πλάκας μολύβδου σε 3 διαφορετικά σημεία και να συμπληρωθούν οι μετρήσεις σε Πίνακα της μορφής του Πίνακα 6.2 (βλέπε επόμενη σελίδα).



Θυμηθείτε: Κατά την μέτρηση με το μικρόμετρο η σύσφιξη των σιαγόνων να γίνεται με τον εξωτερικό κοχλία, ο οποίος περιστρέφεται ελεύθερα μόλις οι σιαγόνες τερματίσουν, ώστε να αποφευχθεί υπερβολική άσκηση πίεσης στην επιφάνεια της πλάκας και ενδεχόμενη παραμόρφωση της επιφάνειάς της. Για τη χρήση του μικρομέτρου συμβουλευθείτε την άσκηση 3.

Στο μικρόμετρο της φωτογραφίας: $C=S/n=0,01\text{mm}/\text{υποδ. αφού } S=0,5\text{mm και } n=50\text{υποδ.}$

Η τελική ανάγνωση ένδειξης είναι:

$$3\text{mm} + 3\text{ενδ.} \times C = 3\text{mm} + 3\text{ενδ.} \times 0,01\text{mm}/\text{ενδ.} = 3,03\text{mm}$$

4) Να τοποθετηθεί η πλάκα στην ειδική υποδοχή, ώστε να παρεμβάλλεται στην πορεία της ακτινοβολίας γ (μεταξύ πηγής και απαριθμητή) και να επαναληφθεί το βήμα (3). Να γραφούν όλα τα αποτελέσματα σε Πίνακα, όπως ο Πίνακας 6.3 (βλέπε επόμενες σελίδα).

5) Να επαναληφθούν τα βήματα (3) και (4) και για τις υπόλοιπες πλάκες μολύβδου.

Πίνακας 6.2

	i-μέτρηση	$x_n^{(i)}$ (mm)
1 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
2 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
3 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
4 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	

Πίνακας 6.3

N-οστή ΠΛΑΚΑ	i-μέτρηση	$I_N^{(i)}$ (κρ./min)
1 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
2 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
3 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
4 ^η ΠΛΑΚΑ	1	
	2	
	3	
	4	
	5	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Υπάρχει περίπτωση ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης μ να είναι αρνητικός; Τι θα σήμαινε αυτό για το υλικό που αυτός χαρακτηρίζει;
- 2) Για την αλληλεπίδραση της ραδιενέργειας με την ζωντανή ύλη αρκεί ο ορισμός του χρόνου υποδιπλασιασμού ή θα έπρεπε να ορίσουμε και κάποιο βιολογικό χρόνο υποδιπλασιασμού; Από τι θα εξαρτάται αυτός;
- 3) Τι ποσοστό της ετήσιας ποσότητας ακτινοβολίας που προσλαμβάνετε πιστεύετε ότι πήρατε κατά την έκθεση σας κοντά στην ραδιενεργό πηγή κατά την διάρκεια του πειράματος;

Ραδιενέργεια

Ραδιενέργεια (radioactivity), ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο ασταθείς πυρήνες διασπώνται μόνοι τους και εκπέμπουν ακτινοβολία. Οι ασταθείς πυρήνες ονομάζονται ραδιενεργοί πυρήνες, η δε διάσπαση ραδιενεργός διάσπαση.

Η απόκλιση της ακτινοβολίας μέσα στα πεδία και η απορρόφησή της από την ύλη έδειξαν ότι τα ραδιενεργά υλικά εκπέμπουν τρεις τύπους ραδιενεργής ακτινοβολίας που ονομάστηκαν αυθαίρετα άλφα, βήτα, γάμμα ακτινοβολίες.

Η ακτινοβολία **άλφα** είναι θετικά φορτισμένα σωμάτια με ταχύτητες περίπου 10^7 m / sec και απορροφώνται από μερικά cm αέρα ή από φύλλο αλουμινίου πάχους περίπου 0,1mm. Φασματοσκοπικές μελέτες απέδειξαν ότι τα σωμάτια άλφα είναι πυρήνες ${}^4_2\text{He}$.

Η ακτινοβολία **βήτα** είναι αρνητικά φορτισμένα σωμάτια, με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός και απορροφώνται περίπου από 1mm Pb. Τα σωμάτια αυτά βρέθηκαν αργότερα ότι είναι ηλεκτρόνια.

Η ακτινοβολία **γάμμα** τέλος είναι ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικής φύσης πολύ διεισδυτική, δεν επηρεάζεται από ηλεκτρομαγνητικά πεδία, απορροφάται σε πάχος μεγαλύτερο των 10cm Pb και έχει μήκος κύματος μικρότερο των ακτίνων X.

Το φαινόμενο της ραδιενέργειας είναι "τυχαίο". Δεν υπάρχει δηλαδή νόμος ο οποίος να καθορίζει τη σειρά διασπάσεων ορισμένου αριθμού ραδιενεργών πυρήνων. Αυτές ακολουθούν τους νόμους της στατιστικής. Ενώ δηλαδή μπορούμε να δώσουμε σε ένα πυρήνα μία πιθανότητα διάσπασης, δεν είναι δυνατό να πούμε με βεβαιότητα πότε ακριβώς αυτή θα συμβεί.

Ο νόμος τον οποίον υπακούουν οι ραδιενεργές διασπάσεις ονομάζεται **νόμος των ραδιενεργών μετατροπών**. Αυτός δηλώνει ότι ο αριθμός των διασπασμένων πυρήνων dN , σε χρονικό διάστημα dt είναι ανάλογος με τον αριθμό των πυρήνων κατά τη στιγμή που έγινε η παρατήρηση, δηλ. :

$$dN = -\lambda N dt$$

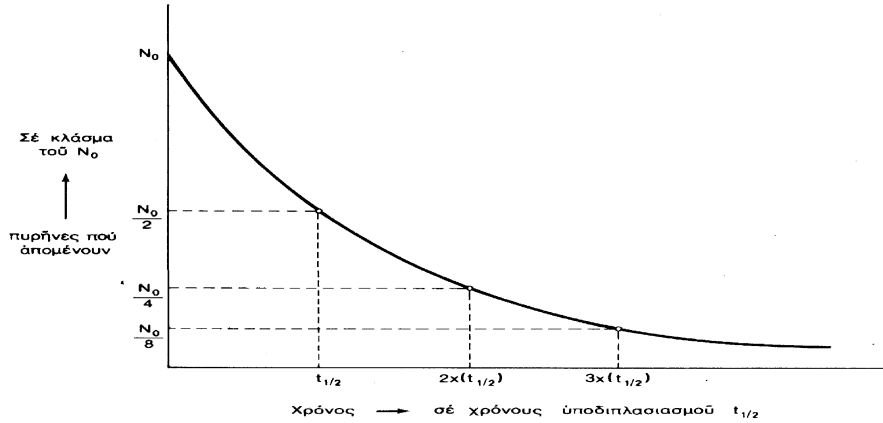
όπου λ είναι η "σταθερά της διάσπασης" και το μείον δείχνει ότι ο αριθμός των πυρήνων ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Η ολοκλήρωση της σχέσης δίνει :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

όπου N ο αριθμός των πυρήνων τη χρονική στιγμή t και N_0 οι πυρήνες κατά την αρχή του χρόνου της παρατήρησης, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Οι ραδιενεργοί λοιπόν πυρήνες διασπώνται αυτόματα με την πάροδο του χρόνου και, εκπέμποντας ακτινοβολία, μεταπίπτουν τελικά σε σταθερούς πυρήνες. Οι



Σχήμα 6.4

ραδιενεργοί πυρήνες των διαφόρων στοιχείων δεν διασπώνται με τον ίδιο ρυθμό. Για να είναι δυνατή η σύγκριση του ρυθμού διασπάσεως μεταξύ των διαφόρων ραδιενεργών πυρήνων, ορίζεται ο **χρόνος υποδιπλασιασμού** $t_{1/2}$ (half-life) ο οποίος αποτελεί χαρακτηριστική σταθερή κάθε πυρήνα και ορίζεται ως "ο χρόνος μέσα στον οποίο διασπάται το μισό των ραδιενεργών πυρήνων ποσότητας ραδιενεργού στοιχείου" (Σχήμα 6.4). Δηλαδή είναι ο χρόνος στον οποίο ο αριθμός N των ραδιενεργών πυρήνων, στη σχέση 6.2, που έχει απομείνει γίνεται ίσος με $N_0/2$. Με αντικατάσταση λοιπόν στην (6.2) προκύπτει:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

από την λύση της οποίας προκύπτει:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Τα αποτελέσματα της ακτινοβολίας στον άνθρωπο

Τα κύτταρα του ζωντανού ιστού αποτελούνται από πολύπλοκα δομημένα μόρια, που βρίσκονται μέσα σε υδατικό διάλυμα πλούσιο σε άλατα και ιόντα. Όταν ακτινοβολία X ή πυρηνική ακτινοβολία συναντήσει αυτό το ισοροπημένο διάλυμα δημιουργεί ένα χάος σε ατομική κλίμακα. Ένα σωματίο β , λόγου χάρη, που περνά μέσα από ζωντανή ύλη, συγκρούεται με μικρό μέρος των μορίων της και αφήνει μια τυχαία σειρά από αλλαγμένα ή σπασμένα μόρια, μαζί με άλλα νεοσχηματισμένα χημικώς ενεργά ιόντα και ελεύθερες ρίζες.

Οι ελεύθερες ρίζες είναι ασύνδετα, ηλεκτρικώς ουδέτερα, χημικώς πολύ δραστικά άτομα ή θραύσματα μορίων. Τα ιόντα και οι ελεύθερες ρίζες μπορούν να σπάσουν πολύ περισσότερους μοριακούς δεσμούς ή να σχηματίσουν γρήγορα νέους ισχυρούς δεσμούς, δημιουργώντας μόρια, που μπορεί να είναι άχρηστα ή και βλαβερά στο κύτταρο. Η ακτινοβολία γ έχει παρόμοια αποτελέσματα. Καθώς ένα φωτόνιο γ μεγάλης ενέργειας κινείται μέσα στην ύλη, μπορεί να ανακρουστεί πάνω σε ένα ηλεκτρόνιο και να του

προσδώσει μεγάλη κινητική ενέργεια. Το ηλεκτρόνιο, τότε, μπορεί να κινηθεί προσκρούοντας σε μόρια εδώ και εκεί, μέσα στον ιστό, προξενώντας μεγάλη καταστροφή με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν. Όλοι οι τύποι ακτινοβολίας με μεγάλη ενέργεια σπάνε ή μεταβάλλουν τη δομή μερικών μορίων και δημιουργούν συνθήκες κατάλληλες, για να σχηματιστούν άλλα μόρια, που ίσως είναι βλαβερά στις διαδικασίες της ζωής.

Τα κύτταρα είναι ικανά να επανορθώσουν τα περισσότερα είδη βλάβης των μορίων τους, αν η ακτινοβολία δεν έχει μεγάλη ένταση. Ένα κύτταρο μπορεί να επιζήσει ύστερα από μια δόση ακτινοβολίας που θα ήταν θανατηφόρα, αρκεί η δόση να είναι μικρή και να δίνεται κατά χρονικά διαστήματα αρκετά μεγάλα, ώστε να είναι δυνατή η επανόρθωση των κυττάρων. Όταν η ακτινοβολία είναι αρκετή για να σκοτώσει τα κύτταρα, τα νεκρά κύτταρα μπορεί να αντικατασταθούν από νέα. Σημαντικές εξαιρέσεις αποτελούν τα περισσότερα νευρικά κύτταρα, τα οποία δεν αντικαθίστανται. Μερικές φορές ένα κύτταρο με κατεστραμμένο DNA επιζεί. Όταν αναπαράγεται, μεταφέρει στο θυγατρικό του κύτταρο ελαττωματικές γενετικές πληροφορίες. Έτσι θα προκύψει μια κυτταρική μετάλλαξη. Αυτή μπορεί να είναι ασήμαντη. Αν όμως είναι σημαντική, θα καταλήξει πιθανόν σε κύτταρα, που δεν λειτουργούν τόσο καλά, όσο το αρχικό που υπέστη τη βλάβη. Σε σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να βελτιωθεί η λειτουργία. Γενετική αλλαγή αυτού του τύπου μπορεί επίσης να προκαλέσει καρκίνο, που θα αναπτυχθεί αρκετά αργότερα στον ιστό.

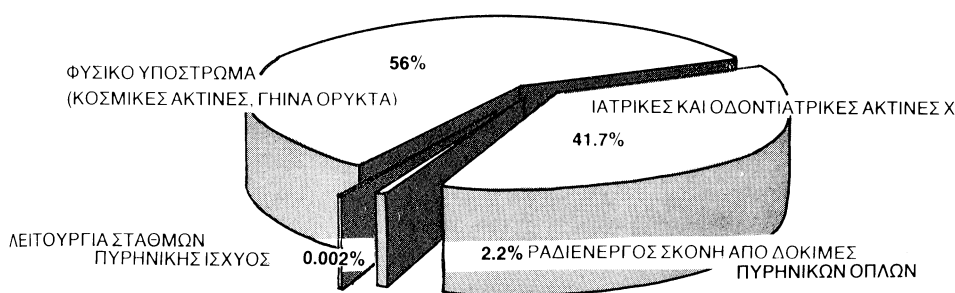
Η πυκνότητα των ανωμαλιών που προκαλούνται κατά μήκος της τροχιάς ενός σωματίου εξαρτάται από την ενέργεια, το φορτίο και τη μάζα του. Τα φωτόνια γ και τα σωματία β υψηλής ενέργειας προκαλούν βλάβη με τη μικρότερη ένταση. Ένα σωματίο τέτοιου τύπου εισχωρεί βαθιά στον ιστό με αντιδράσεις που απέχουν αρκετά μεταξύ τους, σαν ένα πολύ γρήγορο σκάγι BB, που περνά διαμέσου μιας χαλαζοθύελλας. Τα αργά, με μεγάλη μάζα και μεγάλο φορτίο σωματία, όπως τα σώματα α μικρής ενέργειας, είναι πολύ καταστρεπτικά.

Οι συγκρούσεις τους γίνονται πυκνές, όπως συμβαίνει όταν ένας ταύρος ορμά σε ένα κοπάδι κοιμισμένα πρόβατα. Δεν εισχωρούν βαθιά, επειδή η ενέργειά τους απορροφάται με τις πολλές και κοντινές συγκρούσεις. Ιδιαίτερα καταστρεπτικά σωματία αυτού του τύπου είναι οι διάφοροι πυρήνες (ονομάζονται βαρύ πυροβολικό), που εκτινάσσονται από τον Ήλιο, κατά τις ηλιακές εκρήξεις. Περιλαμβάνουν όλα τα στοιχεία, που βρίσκονται στη Γη. Από τα σωματία που πλησιάζουν τη Γη λίγα λεπτά αφού φύγουν από τον Ήλιο, ένα μέρος συλλαμβάνεται από το γήινο μαγνητικό πεδίο. Τα υπόλοιπα απορροφώνται στην ατμόσφαιρα με συγκρούσεις, ώστε, πρακτικά, κανένα δεν φτάνει στη Γη. Είμαστε μερικώς θωρακισμένοι από αυτά τα επικίνδυνα σωματία χάρη στην αποκλειστικά δική τους ιδιότητα, που τα κάνει απειλητικά: την τάση τους να συγκρούονται συνεχώς με τα σωματία που συναντούν. Οι αστροναύτες δεν έχουν αυτήν την προστασία και απορροφούν μεγάλες δόσεις ακτινοβολίας, ανάλογα με το χρόνο που παραμένουν στο Διάστημα. Κάθε λίγες δεκάδες χρόνια σημειώνεται κάποια εξαιρετικά έντονη ηλιακή έκρηξη, που θα μπορούσε, σχεδόν σίγουρα, να σκοτώσει κάθε αστροναύτη με συμβατική προστασία, που θα βρισκόταν μακριά από τη Γη απροστάτευτος από την ατμόσφαιρα και το μαγνητικό της πεδίο.

Οι δόσεις των ακτινοβολιών μετριοούνται γενικά σε **rad** (συντομογραφία του radiation = ακτινοβολία), μονάδα απορροφώμενης δόσης ιονίζουσας ακτινοβολίας. Ο αριθμός των rads δείχνει το ποσό της ενέργειας της ακτινοβολίας που απορροφήθηκε ανά γραμμάριο μάζας εκτεθειμένης στην ακτινοβολία. Ωστόσο, όταν αναφερόμαστε στην ικανότητα της ακτινοβολίας να επηρεάσει τον άνθρωπο, αυτήν τη μετράμε σε **rems**. Για να

υπολογίσουμε τις δόσεις σε rems, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των rads επί ένα συντελεστή προσαρμοσμένο στα διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα των διαφόρων τύπων ακτινοβολιών πάνω στην υγεία των ζωντανών ιστών. Ένα rad αργών σωματίων α έχει το ίδιο βιολογικό αποτέλεσμα με 10 rad γρήγορων ηλεκτρονίων. Και οι δύο αυτές δόσεις ισούνται με 10 rems.

Ο μέσος άνθρωπος στις Η.Π.Α. προσλαμβάνει 0,2 rems περίπου το χρόνο. Η δόση αυτή προέρχεται από το ίδιο το σώμα, από το έδαφος, τα κτίρια, τις κοσμικές ακτίνες, τις διαγνωστικές ακτίνες X, την τηλεόραση κ.α. Η ακτινοβολία που προκαλεί αυτή η δόση ποικίλλει έντονα από τόπο σε τόπο στον πλανήτη, αλλά είναι εντονότερη κοντά στους πόλους, όπου το γήινο μαγνητικό πεδίο δεν δρα προστατευτικά. Είναι επίσης εντονότερη σε μεγάλα ύψη, όπου η προστασία της ατμόσφαιρας είναι μικρότερη.



(Πηγές ακτινοβολίας που εκτίθεται ο μέσος άνθρωπος στις Η.Π.Α)
Σχήμα 6.4

Η θανατηφόρα δόση της ακτινοβολίας είναι της τάξεως των 500 rems. Ένας άνθρωπος δηλαδή έχει πιθανότητα περίπου πενήντα τοις εκατό να επιζήσει, αν πάρει μια δόση αυτού του μεγέθους σε μικρή χρονική περίοδο. Με την ακτινοθεραπεία (χρήση της ακτινοβολίας για την καταστροφή των καρκινικών κυττάρων) ο άρρωστος μπορεί να πάρει τοπικά δόσεις μεγαλύτερες από 200 rems κάθε ημέρα για περίοδο μερικών εβδομάδων. Μια τυπική διαγνωστική ακτινογραφία θώρακα, εκθέτει τον άρρωστο σε δόση που ποικίλλει από 5 έως 30 millirems, λιγότερο από το δεκάκις χιλιοστό της θανατηφόρας δόσης. Όμως, ακόμα και οι μικρές δόσεις ακτινοβολίας μπορεί να προκαλέσουν έμμεσες βλάβες, που εκδηλώνονται σε μακρινό χρόνο, εξαιτίας των μεταλλάξεων που υφίστανται οι ιστοί του σώματος. Και επειδή μικρό κλάσμα οποιασδήποτε δόσης ακτίνων X φτάνει στα γονίδια, συμβαίνουν μερικές τυχαίες μεταλλάξεις, που μεταβιβάζονται στην επόμενη γενεά. Οι ιατρικές ακτίνες X για διάγνωση και θεραπεία έχουν την πιο μεγάλη επίδραση στη γενετική κληρονομιά των ανθρώπων από οποιαδήποτε άλλη τεχνητή πηγή ακτινοβολίας.

Αν συνυπολογίσουμε όλες τις αιτίες ακτινοβολήσης, οι περισσότεροι από μας θα προσλάβουν στο διάστημα της ζωής τους δόση μικρότερη των 20 rems, μοιρασμένη σε μερικές δεκαετίες. Αυτό μας κάνει λίγο επιδεκτικότερους στον καρκίνο και σε άλλες διαταραχές. Αλλά το σημαντικότερο είναι πως όλοι οι ζωντανοί οργανισμοί απορροφούν πάντα φυσική ακτινοβολία και η ακτινοβολία που έχουν πάρει τα αναπαραγωγικά κύτταρα έχει προκαλέσει γενετικές μεταβολές σε όλα τα ζώα είδη επί γενεές γενεών. Μικρές μεταλλάξεις που επέλεξε η φύση επειδή για δισεκατομμύρια χρόνια συμβάλλουν στην

επιβίωση, μπορεί να φτάσουν βαθμιαία σε ορισμένες ενδιαφέρουσες εφευρέσεις, όπως εμείς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

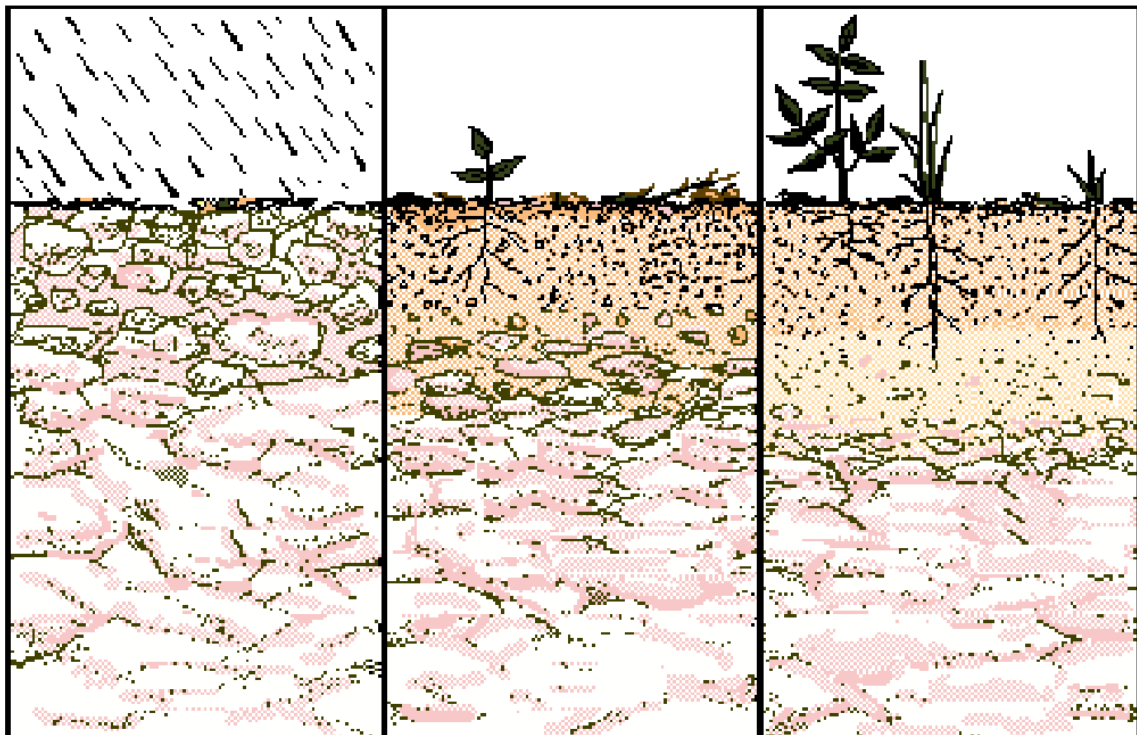
- 1) Ν.Γ. Χρυσοχοΐδης, *Ατομική-Πυρηνική και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Σταμούλης 1990.
- 2) Δ. Μετζαφός, Α.Χούντας *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1997.
- 3) P.G. Hewitt, *Οι Έννοιες της Φυσικής, Τόμος II*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1997.

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΤΡΙΧΟΕΙΔΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΤΑΣΗΣ

Οι ρίζες των δέντρων αποτελούνται απο τρία είδη ιστών ένα εκ των οποίων, (ο επιφανειακός ιστός) περιλαμβάνει ειδικά τροποποιημένα κύτταρα που έχουν απορροφητική δράση. Τα κύτταρα αυτά ονομάζονται ριζίδια και η απορρόφηση νερού απ' αυτά γίνεται εξαιτίας και του τριχοειδούς φαινομένου.



7.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Ο προσδιορισμός του συντελεστή επιφανειακής τάσης υγρού (νερού) με τη μέθοδο της ανύψωσης της στάθμης του σε τριχοειδείς σωλήνες.

7.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Μετράμε την ανύψωση h της στάθμης του νερού σε σειρά τριχοειδών σωλήνων με τη βοήθεια οριζόντιου μικροσκοπίου. Στην συνέχεια στερεώνουμε τους σωλήνες σε οριζόντια θέση και μετράμε με τη βοήθεια του οριζόντιου μικροσκοπίου την διάμετρο d των σωλήνων. Η σχέση που συνδέει τα δυο μεγέθη είναι :

$$h = \frac{4\gamma}{\rho \cdot g \cdot d}$$

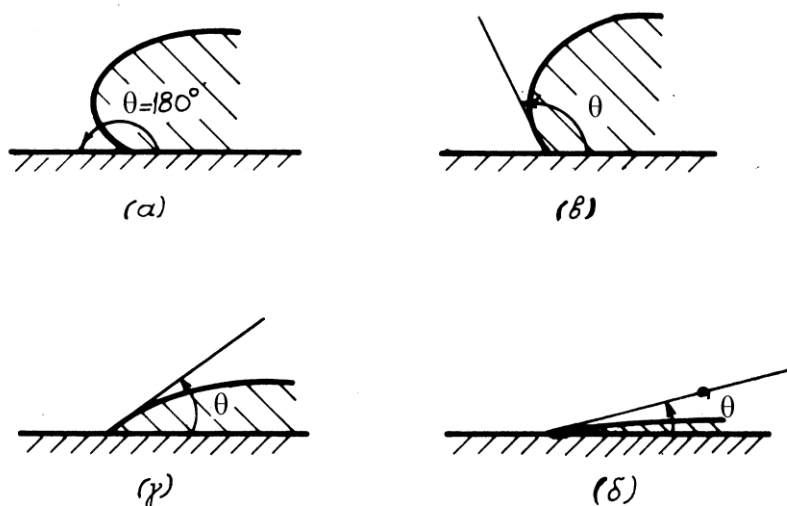
η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική της μορφή $h = A + B\left(\frac{1}{d}\right)$, με ανεξάρτητη

μεταβλητή (x) το $1/d$, εξαρτημένη (y) το h και σταθερά ($B =$ κλίση) το $B = \frac{4\gamma}{\rho \cdot g}$.

Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση $h = f\left(\frac{1}{d}\right)$ που είναι ευθεία και υπολογίζουμε με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, τα $B, \delta B$. Με δεδομένα την πυκνότητα ρ του υγρού και την επιτάχυνση της βαρύτητας g , υπολογίζουμε το συντελεστή επιφανειακής τάσης γ και το σφάλμα $\delta\gamma$.

7.3 ΘΕΩΡΙΑ

Αν φέρουμε σε επαφή ένα υγρό μ' ένα στερεό, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται γωνία μεταξύ της επαφτομένης του υγρού και της επιφάνειας του στερεού. Ονομάζεται **γωνία συνεπαφής** (θ) και, τότε, μιλάμε για **διαβροχή** στερεού από υγρό. Στο σχήμα 7.1 έχει σχεδιαστεί η γωνία συνεπαφής μεταξύ διαφόρων υγρών και στερεών.



Σχήμα 7.1

Ανάλογα με την τιμή της γωνίας συνεπαφής διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

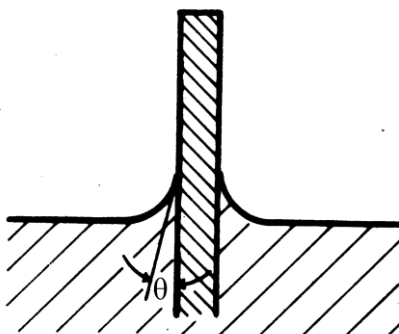
- Αν $90^\circ < \theta < 180^\circ$, η διαβροχή θεωρείται κακή (σχήμα 7.1β).
- Αν $0^\circ < \theta < 90^\circ$, η διαβροχή είναι καλή (σχήμα 7.1γ και 7.1δ). Αυτό σημαίνει ότι αν βγάλουμε το στερεό μέσα από το υγρό θα έχει μείνει πάνω στο στερεό ένας λεπτός υμένας υγρού.
- Στις οριακές περιπτώσεις όπου $\theta = 0^\circ$ ή $\theta = 180^\circ$ (σχήμα 7.1α), η διαβροχή είναι τέλεια και ανύπαρκτη αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι η πίεση στο εσωτερικό ενός υγρού είναι μεγαλύτερη, μικρότερη, ή ίση με την εξωτερική, ανάλογα με το αν η εξωτερική επιφάνεια του υγρού είναι κυρτή, κοίλη ή επίπεδη αντίστοιχα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή η διαφορά πίεσης ισούται με:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} \quad (7.1)$$

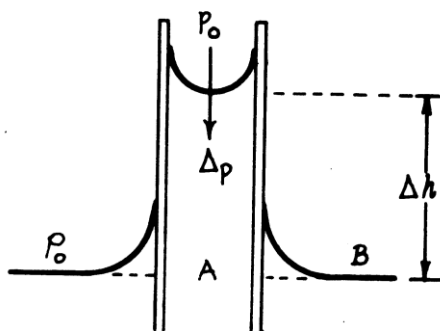
όπου γ ο **συντελεστής επιφανειακής τάσης** του υγρού και r η ακτίνα καμπυλότητας της εξωτερικής επιφάνειας του υγρού.

Αν τώρα τοποθετήσουμε μια πλάκα κατακόρυφα μέσα σε νερό τότε, αφού το νερό διαβρέχει την πλάκα, θα πρέπει να καμπυλωθεί κατά τέτοιο τρόπο η επιφάνεια του νερού ώστε η γωνία συνεπαφής θ να είναι μικρότερη από 90° . Πρέπει λοιπόν να σχηματιστεί μια κοίλη επιφάνεια όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2. Στο σημείο επαφής τώρα υπάρχει υποπίεση, (αφού η επιφάνεια είναι κοίλη), επομένως θα πρέπει να ανυψωθεί η στάθμη του υγρού ώστε η υποπίεση να αντισταθμιστεί από την υδροστατική πίεση.



Σχήμα 7.2

Αν, αντί για πλάκα, τοποθετηθεί μέσα στο νερό σωλήνας διαμέτρου της τάξεως του 1mm (**τριχοειδής σωλήνας**), τότε στο εσωτερικό του σωλήνα θα σχηματιστεί κοίλη επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3

Επειδή η πίεση στα σημεία A και B πρέπει να είναι η ίδια, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Delta h = \frac{2\gamma}{\rho g r} \quad (7.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

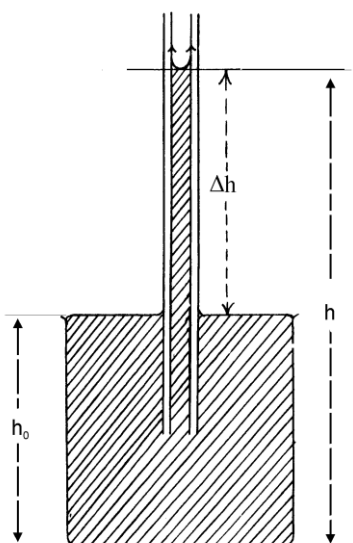
Όταν η διαβροχή είναι τέλεια, ο σχηματιζόμενος μηνίσκος θα είναι περιφέρεια κύκλου οπότε η ακτίνα καμπυλότητας r της επιφάνειας θα είναι ίση με την ακτίνα R του τριχοειδούς σωλήνα. Έτσι, η σχέση 7.2 γίνεται:

$$\Delta h = \frac{4\gamma}{\rho g d} \quad (7.3)$$

όπου d η διάμετρος του τριχοειδούς σωλήνα.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι σε ύψος h_0 και το ύψος του νερού στον τριχοειδή είναι h (Σχήμα 7.4), τότε η σχέση 7.3 γίνεται:

$$h = \frac{4\gamma}{\rho g d} + h_0 \quad (7.4)$$



Σχήμα 7.4

Η μορφή και το ύψος της στήλης του υγρού καθορίζονται από τα παρακάτω :

Καλή διαβροχή στερεού – υγρού

↓

σχηματισμός κοίλης (σχεδόν σφαιρικής) επιφάνειας στο εσωτερικό του σωλήνα

↓

ελάττωση της πίεσης κατά $\Delta p = \frac{2\gamma}{r}$, r = ακτίνα καμπυλότητας

↓

ανύψωση της στάθμης του υγρού στο εσωτερικό του σωλήνα κατά Δh , ώστε να αναπληρωθεί από την υδροστατική πίεση $\rho \cdot g \cdot \Delta h$ η “χαμένη”, λόγω καμπύλωσης Δp .

Επομένως:
$$\frac{2\gamma}{r} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

7.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Οριζόντιο μικροσκόπιο.
- 2) Set γυάλινων σωλήνων, από τους οποίους ο ένας με μεγάλη σχετικά διάμετρο (σωλήνας αναφοράς) και οι υπόλοιποι τέσσερις τριχοειδείς.
- 3) Ποσότητες αποσταγμένου νερού και νερού με πρόσμιξη

7.4.1 ΤΟ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

Το ύψος h του υγρού στον τριχοειδή σωλήνα και η εσωτερική διάμετρος d του σωλήνα μετριούνται με το οριζόντιο μικροσκόπιο. Ο χαρακτηρισμός "οριζόντιο" οφείλεται στο ότι η διόπτρα είναι και παραμένει οριζόντια κατά τη μετακίνησή της.

Η διόπτρα στηρίζεται σε κατακόρυφο στέλεχος και μπορεί να κινείται πάνω-κάτω και δεξιά-αριστερά με τη βοήθεια δύο κοχλιών. Τόσο το κατακόρυφο στέλεχος, όσο και ο οριζόντιος κανόνας φέρουν υποδιαιρέσεις ανά 0,5mm. Το κατακόρυφο στέλεχος είναι βαθμολογημένο σε cm ενώ ο οριζόντιος κανόνας σε mm. Αυτή είναι και η μοναδική διαφορά τους. Η οριζόντια και κατακόρυφη θέση της διόπτρας προσδιορίζονται με τη βοήθεια βερνιέρου. Ο βερνιέρος έχει 50 υποδιαιρέσεις που αντιστοιχούν σε 49 υποδιαιρέσεις της κύριας κλίμακας. Άρα η σταθερά του βερνιέρου (βλέπε εργαστηριακή άσκηση 3) είναι:

$$c = \frac{s}{n} = \frac{0.05\text{mm}}{50\text{υποδ}} = 0.01\text{mm} / \text{υποδ}$$

Επομένως, η μέτρηση γίνεται με ακρίβεια 0,01mm και την ίδια τιμή έχει και το σφάλμα αναγνώσεως. Η ανάγνωση της ενδείξεως επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μεγεθυντικού φακού προσαρμοσμένου στο βερνιέρο και η οριζοντίωση του οργάνου με τη βοήθεια αεροστάθμης.

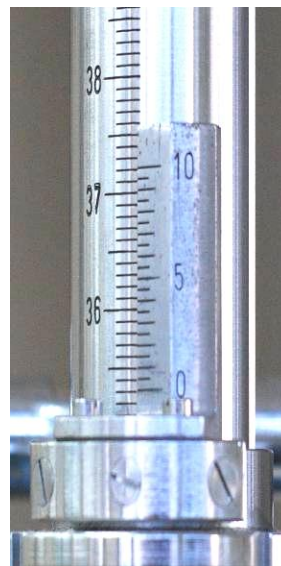
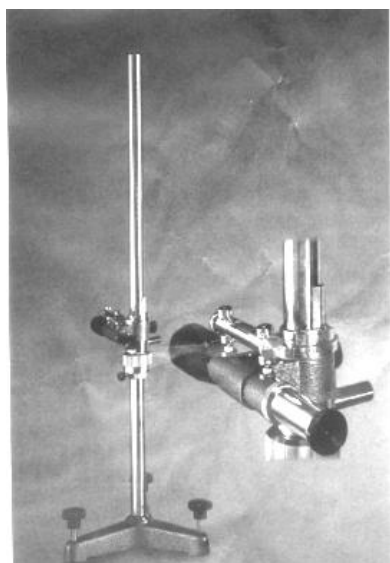
Για τη μέτρηση του ύψους μπορούμε να περιοριστούμε σε μία μόνο μέτρηση η οποία γίνεται στο κατακόρυφο στέλεχος. Για τη μέτρηση της διαμέτρου, όμως, πρέπει να γίνουν δύο μετρήσεις, που μπορούν να γίνουν είτε με το κατακόρυφο στέλεχος είτε με τον οριζόντιο κανόνα. Στην πρώτη περίπτωση το οριζόντιο, ενώ στη δεύτερη το κατακόρυφο νήμα της διόπτρας φέρονται διαδοχικά σε επαφή επαπτομενικά με τα άκρα κάποιας διαμέτρου (της κατακόρυφης εσωτερικής για το οριζόντιο ή, αντίστοιχα, της οριζόντιας διαμέτρου του τριχοειδούς σωλήνα για το κατακόρυφο νήμα) και σημειώνονται οι δύο θέσεις με τη βοήθεια του βερνιέρου. Η διάμετρος υπολογίζεται από τη διαφορά των δύο αυτών μετρήσεων.



Εικόνα 7.1

Στο εικόνα 7.1 φαίνεται η κλίμακα του οριζόντιου μικροσκοπίου. Αν ανατρέξετε στην άσκηση 3 (για τα μικρόμετρα και διαστημόμετρα) θα βοηθηθείτε στην ανάγνωση της ένδειξης, που στο παραπάνω σχήμα είναι 123,5mm.

7.4.2 Το καθετόμετρο



Εικόνα 7.2

Η κλίμακα του οργάνου φαίνεται δεξιά και η ένδειξη είναι $35,3 + 3\text{υποδ.} \times C = 35,3 + 3\text{υποδ.} \times 0,005\text{mm/υποδ.} = 35,315\text{mm}$, αφού $C = S/n = 0,1\text{mm}/20\text{υποδ.} = 0,005\text{mm/υποδ.}$ (δείτε την άσκηση 3)

7.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

1) Να καθαριστούν οι τριχοειδείς σωλήνες και να πλυθούν με άφθονο αποσταγμένο νερό.

2) Να τοποθετηθεί κατακόρυφα το σύστημα των σωλήνων. Να προστεθεί στο δοχείο νερό τόσο, ώστε ανέβει η στάθμη στον μη τριχοειδή σωλήνα λίγο πάνω από την οριζόντια βάση του δοχείου.

3) Να σκοπευθούν οι σωλήνες διαδοχικά με το μικροσκόπιο του **καθετόμετρου**. Κάθε φορά να φέρετε το οριζόντιο σταυρόνημα της διόπτρας σε οπτική επαφή με το μηνίσκο του νερού.

Μετρήστε το ύψος της στάθμης του υγρού στο μη τριχοειδή σωλήνα ($h_0 =$ στάθμη αναφοράς) και θεωρήστε ότι πρόκειται για σωλήνα άπειρης ($=\infty$) διαμέτρου.

$h_0 =$

Να αναγνωστούν η αντίστοιχες ενδείξεις h_i' του βερνιέρου για τους 4 τριχοειδείς σωλήνες και να σημειωθούν οι τιμές στον Πίνακα 7.1 (βλέπε επόμενη σελίδα).

Πίνακας 7.1

α/α	h_i' (mm)	$h_i = h_i' - h_0$ (mm)	ℓ_α (mm)	ℓ_δ (mm)	$d = \ell_\delta - \ell_\alpha$ (mm)
1					
2					
3					
4					

4) Να μεταφερθεί το κατακόρυφο σταυρόνημα του **οριζόντιου μικροσκοπίου** διαδοχικά στα δύο άκρα της εσωτερικής διαμέτρου των σωλήνων διαδοχικά. Να αναγνωσθούν οι ενδείξεις ℓ_α και ℓ_δ (αριστερά και δεξιά), που αντιστοιχούν στις δύο θέσεις. Να σημειωθούν οι μετρήσεις στον Πίνακα 7.1.

5) Από τη σχέση:

$$d = \ell_\delta - \ell_\alpha$$

να υπολογισθεί η τιμή της εσωτερικής διαμέτρου του σωλήνα και συμπληρωθεί στον πίνακα της μορφής του πίνακα 7.1.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Θυμηθείτε από την θεωρία ότι όσο μικρότερη είναι η διάμετρος του τριχοειδικού σωλήνα (μικρό d) τόσο μεγαλύτερη η ανύψωση της στάθμης του νερού (μεγάλο h) σε αυτόν. Ελέγξτε ότι οι μετρήσεις σας συμφωνούν τουλάχιστον με αυτήν την βασική αρχή αλλιώς η επεξεργασία τους θα σας οδηγήσει σε εντελώς λανθασμένα αποτελέσματα.

6) Σημειώστε το σφάλμα διακριτικής ικανότητας κατά τη μέτρηση της ανύψωσης της στάθμης:

$$\delta h = \dots\dots\dots$$

7) Σημειώστε το σφάλμα διακριτικής ικανότητας κατά την μέτρηση της θέσης των αντιδιαμετρικών σημείων $\delta\ell_\delta$ και $\delta\ell_\alpha$ που θα οδηγήσουν στον υπολογισμό της διαμέτρου των τριχοειδικών σωλήνων $d = \ell_\delta - \ell_\alpha$.

$$\delta\ell_\delta = \dots\dots\dots$$

$$\delta\ell_\alpha = \dots\dots\dots$$

7.6 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Έχοντας υπόψη, ότι ο υδράργυρος δε διαβρέχει το γυαλί τι θα συμβεί αν βάλουμε ένα τριχοειδή σωλήνα μέσα σε υδράργυρο (σχεδιάστε κατάλληλο σχήμα);

2) Γιατί η επιφάνεια του νερού μέσα απο το οριζόντιο μικροσκόπιο δεν φαίνεται κοίλη αλλά κυρτή;

3) Ποιά είναι η φυσική σημασία του γ ; Εξηγήστε το χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα.

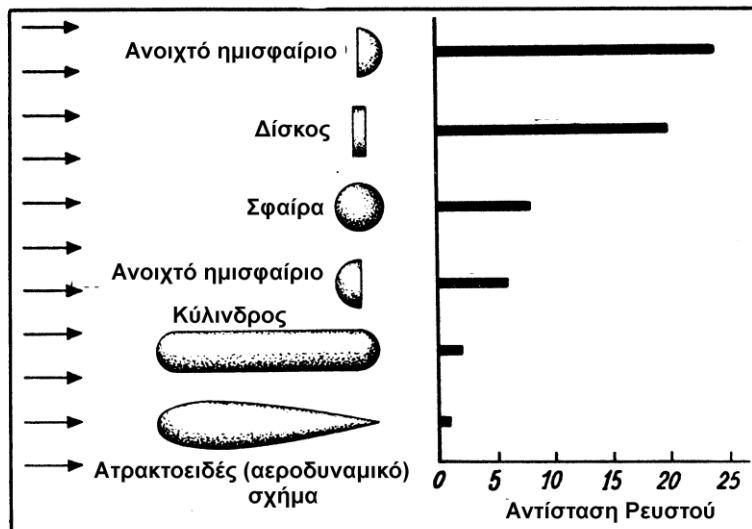
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Δ. Μεντζαφός Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής Για Φοιτητές Των Γεωπονικών Επιστημών. Εκδοσεις Α. Σταμούλης 1997.
- 2) F. Tyler *A Laboratory Manual of Physics*. Edward Arnold (Publishers) 1981.

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΙΕΩΔΟΥΣ

Η αντίσταση που δέχεται ένα σώμα όταν κινείται μέσα σ' ένα ρευστό εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Παρατηρούμε ότι η μικρότερη αντίσταση εμφανίζεται στο ατρακτοειδές σχήμα (είναι το χαρακτηριστικό σχήμα των ψαριών).



8.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Η μέτρηση του συντελεστή ιξώδους για παχύρευστο υγρό χρησιμοποιώντας μετρήσεις της ορικής ταχύτητας που αποκτούν σφαιρίδια μέσα σε αυτό.

8.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Για δεδομένο αριθμό (i) παρόμοιων γυάλινων σφαιρών, μετρίεται η διάμετρος κάθε μιας d_i και υπολογίζεται η μέση διάμετρος \bar{d} . Στη συνέχεια οι σφαίρες ζυγίζονται και υπολογίζεται η μέση μάζα τους \bar{m} . Από τη σχέση: $\rho_\sigma = \frac{\bar{m}}{V} = \frac{6\bar{m}}{\pi \bar{d}^3}$ υπολογίζεται η

πυκνότητα του υλικού των σφαιρών. Μετράμε με πυκνόμετρο την πυκνότητα ρ_ν του υγρού σε βαθμούς Baumé και με κατάλληλη σχέση την μετατρέπουμε σε gr/cm^3 .

Οι σφαίρες αφήνονται να πέσουν μέσα σε σωλήνα διαμέτρου D που περιέχει το υπό εξέταση υγρό. Από τη μέτρηση των χρόνων t_i υπολογίζεται ο μέσος χρόνος \bar{t} που απαιτείται για να διανύσουν οι σφαίρες μια συγκεκριμένη απόσταση s μεταξύ δύο γραμμών που είναι σημειωμένες πάνω στον σωλήνα.

Από τη σχέση:

$$\eta = \frac{g \bar{d}^2 (\rho_\sigma - \rho_\nu) \bar{t}}{18 s}$$

για απόσταση $s = 20\text{cm}$, $g = 981 \text{ cm/s}^2$ και τις τιμές των \bar{d} , ρ_σ , ρ_ν που υπολογίστηκαν ή μετρήθηκαν προηγουμένως, υπολογίζεται ο συντελεστής ιξώδους του υγρού, η , και το αντίστοιχο σφάλμα του, $\delta\eta$, από τη μετάδοση των υπολογισμένων σφαλμάτων $\delta\bar{d}$, $\delta\rho_\sigma$ και $\delta\rho_\nu$.

8.3 ΘΕΩΡΙΑ

Ιξώδες

Η ύπαρξη διαμοριακών δυνάμεων στα ρευστά προκαλεί, κατά την κίνησή τους, την εμφάνιση ελκτικών διατμητικών δυνάμεων μεταξύ των κινουμένων τμημάτων τους, τα οποία δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί ότι κινούνται ανεξάρτητα. Η επενέργεια των διαμοριακών δυνάμεων προκαλεί μεταφορά ενέργειας από το ένα τμήμα του ρευστού στο άλλο, με αποτέλεσμα οι ταχύτητες των τμημάτων αυτών να τείνουν να εξισωθούν. Η εμφάνιση μακροσκοπικών ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των επιμέρους τμημάτων των ρευστών, ως αποτέλεσμα των μικροσκοπικών διαμοριακών δυνάμεων, ονομάζεται **ιξώδες** (η) και είναι ανάλογη της τριβής ολισθήσεως, η οποία εμφανίζεται στις επιφάνειες στερεών κατά τη σχετική κίνησή τους.

Επομένως, ιξώδες είναι η εσωτερική τριβή σε ένα ρευστό. Οι δυνάμεις τριβής αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του. Αν εξετασθεί το φαινόμενο από ενεργειακή άποψη, θα διαπιστωθεί ότι το ιξώδες προκαλεί μετατροπή μέρους της μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα.

Στην περίπτωση των υγρών (δεν συμβαίνει το ίδιο με τα αέρια), αύξηση της θερμοκρασίας τους σημαίνει και αύξηση των μέσων αποστάσεων μεταξύ των μορίων. Ως αποτέλεσμα αυτού, τα μέτρα των διαμοριακών δυνάμεων και συνεπώς και τα μέτρα των μακροσκοπικών ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των επιμέρους τμημάτων του υγρού

ελαττώνονται. Επομένως, αύξηση της θερμοκρασίας συνεπάγεται ελάττωση του ιξώδους ενός υγρού.

Μονάδες μέτρησης του ιξώδους (η):

Στο S.I. είναι το **pascal x second (Pa·s) = 1 N·s/m² ή 1 kg/(m·s)**. Στη Γαλλία χρησιμοποιείται το *poiseuille* (Pl) ως Pa·s όχι όμως διεθνώς. Δεν πρέπει να συγχέουμε το poiseuille με το poise που αναφέρεται στο όνομα του ίδιου προσώπου!

Συνήθως χρησιμοποιείται η αντίστοιχη του C.G.S. το **poise (P)** που πήρε το όνομα του από τον Jean Louis Marie Poiseuille. Μεταξύ των δύο μονάδων υπάρχει η σχέση 1 Pl=10 Po. Η μονάδα Po είναι κατάλληλη για τη μέτρηση του ιξώδους μόνο παχύρευστων υγρών, όπως η γλυκερίνη ή τα ορυκτέλαια. Για τη μέτρηση των λεπτόρευστων χρησιμοποιείται συνήθως το **centipoise (cP)**.

Το centipoise χρησιμοποιείται επίσης, επειδή το νερό έχει ιξώδες ίσο με 1.0020 cP στους 20 °C.

Μετατροπές μονάδων:

$$1 \text{ poise} = 100 \text{ centipoise} = 1 \text{ g}/(\text{cm}\cdot\text{s}) = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$1 \text{ centipoise} = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}.$$

Η αντίσταση κατά την κίνηση στερεού μέσα σε ρευστό - Νόμος του Stokes

Όταν στερεό κινείται σε σχέση με πραγματικό ρευστό, ασκείται επάνω του δύναμη, που αντιτίθεται στην κίνησή του και η οποία ονομάζεται αντίσταση. Η αντίσταση εξαρτάται από το ρευστό και τη σχετική ταχύτητα ρευστού-στερεού, είναι δε η συνισταμένη των δυνάμεων τις οποίες δέχονται τα στοιχειώδη τμήματα της επιφάνειας του στερεού, λόγω των δυνάμεων συνάφειας ρευστού-στερεού. Η τιμή της αντιστάσεως προσδιορίζεται από διαφορετικούς νόμους, ανάλογα με την τιμή της σχετικής ταχύτητας. Ας θεωρήσουμε ότι το στερεό είναι ακίνητο μέσα σε κινούμενο ρευστό. Όταν η σχετική ταχύτητα είναι μικρή η ροή του ρευστού είναι στρωτή και έχει τη μορφή του σχήματος. Το στρώμα του ρευστού που εφάπτεται στο στερεό είναι ακίνητο ως προς αυτό λόγω των δυνάμεων συνάφειας. Επομένως το στερεό και το στρώμα αυτό του ρευστού κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Τα άλλα στρώματα κινούνται "παράλληλα" προς το εφαπτομενικό στρώμα, με ταχύτητα που τείνει να αυξηθεί όσο απομακρυνόμαστε από το στερεό. Το ρευστό τείνει να παρασύρει το στερεό κατά την κίνησή του, ασκώντας επάνω του δύναμη, την αντίσταση η οποία είναι ανάλογη του συντελεστή ιξώδους η , της σχετικής ταχύτητας v και μιας γραμμικής διαστάσεως του στερεού d :

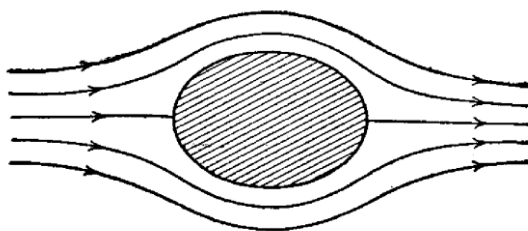
$$F_{αντ} = k\eta v d$$

Όταν το στερεό είναι σφαίρα η σχέση αυτή γίνεται:

$$F_{αντ} = 6\pi\eta r v$$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας.

Η σχέση αυτή ονομάζεται νόμος του Stokes



Υπολογισμός ιξώδους παχύρευστων υγρών

Έστω ότι σφαίρα διαμέτρου d και πυκνότητας ρ_σ κινείται κάτω από την επίδραση του βάρους της μέσα σε υγρό πυκνότητας ρ_ν και συντελεστή ιξώδους η . Τότε ασκούνται επάνω της εκτός από το βάρος της \mathbf{W} , η άνωση \mathbf{B} και η αντίσταση $\mathbf{F}_{αντ.}$ από το ρευστό που σύμφωνα με τον νόμο του Stokes είναι:

$$F_{αντ} = 3\pi\eta u d \tag{8.1}$$

όπου u η ταχύτητα πτώσης της σφαίρας μέσα στο ρευστό.

Η συνισταμένη δύναμη ΣF δίνεται αλγεβρικά ως:

$$\Sigma F = W - B - F_{αντ.} \tag{8.2α}$$

Οι δυνάμεις: - του βάρους της σφαίρας: $W = mg = \rho_{σφαιρας} g V_{σφαιρας}$ και
 - της άνωσης από το ρευστό στη σφαίρα: $B = \rho_\nu g V_{σφαιρας}$
 είναι σταθερές (δεν μεταβάλλονται με το χρόνο). Αντίθετα, η δύναμη της αντίστασης από το ρευστό όπως δίνεται από το νόμο του Stokes (εξ. 8.1), εξαρτάται από την ταχύτητα πτώσης, u , η οποία μεταβάλλεται με ρυθμό που ορίζεται από την επιτάχυνση της κίνησης $a = \frac{du}{dt}$. Ο ρυθμός αυτός πάλι δεν είναι σταθερός, αφού:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = W - B - 3\pi\eta u d . \tag{8.2β}$$

Έτσι, η κίνηση αρχικά είναι μη ομαλά επιταχυνόμενη (αφού η επιτάχυνση, a , δεν είναι σταθερή) και η ταχύτητα πτώσης u αυξάνεται. Σύμφωνα, όμως, με την εξ. 8.2β η αύξηση της u προκαλεί μείωση της a μέχρι που τελικά η a μηδενίζεται ($\Sigma F=0$) και από εκεί και πέρα η ταχύτητα πτώσης της σφαίρας παραμένει σταθερή (η πτώση της σφαίρας γίνεται ομαλή κίνηση) και λέμε ότι η σφαίρα αποκτά **ορική** ταχύτητα $u_{ορική}$. Σύμφωνα με τη σχέση (8.1) η αντίσταση που ασκείται στη σφαίρα από το ρευστό είναι τότε:

$$F_{αντ} = 3\pi\eta u_{ορική} d$$

ενώ η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω της είναι μηδέν ($\Sigma F=0$). Μπορούμε, επομένως, από την εξ. 8.2α, να υπολογίσουμε την τιμή της ορικής ταχύτητας $u_{ορική}$:

$$u_{ορική} = \frac{1}{18} g d^2 \left(\frac{\rho_\sigma - \rho_\nu}{\eta} \right) \tag{8.3}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και d η διάμετρος της σφαίρας.

Αν η σφαίρα έχει αποκτήσει ορική ταχύτητα (η πτώση της, δηλαδή, στο ρευστό έχει γίνει ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα την $u_{ορική}$) και διανύει απόσταση s σε χρόνο t_o ($u_{ορική} = s/t_o$) τότε ο συντελεστής ιξώδους είναι ίσος με:

$$\eta = \frac{g d^2 (\rho_\sigma - \rho_\nu) t_o}{18 s} \tag{8.4}$$

Η ανάλυση αυτή ισχύει μόνο όταν η σφαίρα πέφτει σ' ένα ρευστό που δεν περιορίζεται από τοιχώματα. Αν η σφαίρα πέφτει μέσα σε σωλήνα, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την επίδραση των τοιχωμάτων οπότε η ορική ταχύτητα γίνεται:

$$u \left(1 + k \frac{d}{D} \right) = u_o \tag{8.5}$$

όπου: - u_o είναι η ορική ταχύτητα για πτώση σφαίρας σε ρευστό χωρίς όρια ($D \rightarrow \infty$),
 - u είναι η παρατηρούμενη ορική ταχύτητα,
 - k είναι μια σταθερά και
 - D η διάμετρος του σωλήνα μέσα στον οποίο γίνεται η κίνηση της σφαίρας.

Με βάση τη σχέση (8.5) μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση:

$$t = t_o + t_o k \frac{d}{D} \tag{8.6}$$

όπου t και t_0 είναι αντίστοιχα οι χρόνοι πτώσης της σφαίρας μέσα σε ρευστό που περιορίζεται από τα τοιχώματα του σωλήνα και μέσα σε ρευστό που δεν περιορίζεται από τοιχώματα.

8.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Σωλήνας γεμάτος με παχύρευστο υγρό.
- 2) Set γυάλινων σφαιρών με διαφορετικές διαμέτρους.
- 3) Μικρόμετρο.
- 4) Χρονόμετρο.
- 5) Ζυγός με βερνιέρο.
- 6) Πυκνόμετρο σε βαθμούς Baumé.

Το πυκνόμετρο

Το πυκνόμετρο είναι ένας κυκλινδρικός πλωτήρας, στο κατώτερο τμήμα του οποίου έχει τοποθετηθεί έρμα, και απολύνει σε κυλινδρικό σωλήνα, που είναι βαθμολογημένος σε gr/cm^3 ή σε αυθαίρετες μονάδες.

Όταν το πυκνόμετρο ισορροπεί βυθισμένο σε υγρό, το βάρος του, W , ισούται με την άνωση B , δηλ. με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. Έστω ότι η μέγιστη πυκνότητα υγρού, την οποία μπορεί το όργανο να μετρήσει είναι ρ_0 . Σ' ένα τέτοιο υγρό το όργανο θα βυθιστεί μέχρι το κατώτερο επιτρεπτό σημείο a (Σχήμα 8.1). Αν V_0 είναι ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του οργάνου τότε:

$$W = V_0 \rho_0 g \tag{8.7}$$

Σε υγρό με μικρότερη πυκνότητα ρ ο πλωτήρας θα βυθισθεί περισσότερο, ώστε να αυξηθεί ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού. Ο όγκος του βυθισμένου τμήματος αυξάνεται κατά $S \cdot x$, όπου S το εμβαδό της διατομής του κυλινδρικού σωλήνα και x το βυθισμένο τμήμα του, που βρίσκεται πάνω από το σημείο a . Τότε:

$$B = (V_0 + Sx) \rho g \tag{8.8}$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$V_0 \rho_0 g = (V_0 + Sx) \rho g$$

ή

$$x = \frac{V_0 \rho_0}{S} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{V_0}{S}$$

Αν χρησιμοποιηθούν δύο σταθερές:

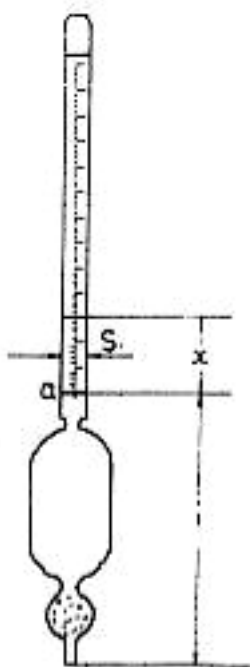
$$C_1 = \frac{V_0 \rho_0}{S}$$

και

$$C_2 = -\frac{V_0}{S}$$

η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή:

$$x = \frac{C_1}{\rho} + C_2 \tag{8.9}$$



Σχήμα 8.1 Επομένως το βυθισμένο τμήμα x του πλωτήρα στο υγρό δεν είναι ανάλογο της πυκνότητας του υγρού ρ και, όταν τα όργανα βαθμολογούνται κατ' ευθείαν σε gr/cm^3 , η κλίμακα τους είναι ανισοδιάστατη. Γεγονός που, εκτός από

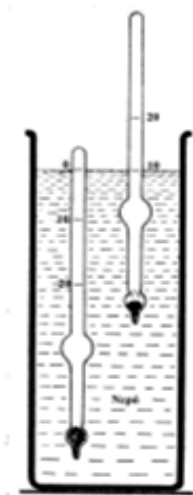
κατασκευαστικές δυσκολίες, προκαλεί προβλήματα κατά τη χρήση του οργάνου, γιατί είναι δύσκολη η ακριβής ανάγνωση. Γι' αυτό συχνά η βαθμολογία γίνεται με ισοδιάστατη κλίμακα σε αυθαίρετες μονάδες, τους βαθμούς Baumé, που η αντιστοιχία τους σε gr/cm^3 βρίσκεται από πίνακες ή από εμπειρική σχέση.

Συνήθως χρησιμοποιούνται οι όροι **πυκνόμετρα** και **αραιόμετρα** για όργανα που μετρούν αντίστοιχα πυκνότητες μεγαλύτερες και μικρότερες από $1gr/cm^3$.

Το πυκνόμετρο Baumé ερματίζεται έτσι, ώστε να βυθίζεται μέχρι το ανώτερο επιτρεπτό σημείο του κυλινδρικού σωλήνα μέσα σε αποσταγμένο νερό, όπου και σημειώνεται το "0" της κλίμακας Baumé. Μετά, βυθίζεται σε διάλυμα NaCl περιεκτικότητας 15% κατά βάρος. Στο επίπεδο που ορίζει η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σημειώνεται η ένδειξη 15. Το διάστημα 0-15 χωρίζεται σε 15 ίσα μέρη. Η κλίμακα αυτή επεκτείνεται ισοδιάστατα προς τα κάτω. Το αραιόμετρο Baumé ερματίζεται έτσι, ώστε μέσα σε διάλυμα NaCl 10% w/w, να βυθίζεται μέχρι το κάτω άκρο του κυλινδρικού σωλήνα όπου σημειώνεται το "0" της κλίμακας αραιών βαθμών Baumé. Μετά βυθίζεται σε αποσταγμένο νερό και στο αντίστοιχο επίπεδο σημειώνεται η ένδειξη 10 της κλίμακας, που φυσικά βρίσκεται πάνω από την ένδειξη 0. Το διάστημα 0-10 χωρίζεται πάλι σε 10 ίσα μέρη και η βαθμολογία επεκτείνεται ισοδιάστατα προς τα πάνω.

Στο σχήμα 8.2 φαίνονται το πυκνόμετρο και το αραιόμετρο, τα οποία είναι ταυτόχρονα βυθισμένα μέσα σε νερό.

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις αραιομέτρου και πυκνομέτρου είναι το οινόπνευματόμετρο και το γαλακτόμετρο.



Σχήμα 8.2

Με το οινόπνευματόμετρο μπορούμε να μετρήσουμε την επί τοις % κατ' όγκον περιεκτικότητα σε οινόπνευμα των αλκοολούχων ποτών. Το οινόπνευματόμετρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε υγρά τα οποία αποτελούνται από νερό και οινόπνευμα. Για να μετρήσουμε λοιπόν την κατ' όγκον περιεκτικότητα, ενός κρασιού για παράδειγμα αποστάζουμε το κρασί και στο οινόπνευμα προσθέτουμε απεσταγμένο νερό μέχρι να πάρουμε συνολικό όγκο ίσο με τον αρχικό όγκο του κρασιού που αποστάξαμε. Εάν στο μείγμα αυτό βυθίσουμε το οινόπνευματόμετρο και πάρουμε μια ένδειξη π.χ 20 αυτό σημαίνει ότι 20 % του όγκου του όλου μείγματος είναι οινόπνευμα. Αν το οινόπνευματόμετρο χρησιμοποιηθεί απευθείας στο κρασί δεν θα έχουμε ακριβή ένδειξη γιατί το κρασί δεν περιέχει μόνο οινόπνευμα και νερό αλλά και κάποια άλλα συστατικά.

Το γαλακτόμετρο χρησιμοποιείται για να μετράμε την πυκνότητα του γάλακτος και μάλιστα μας δίνει μεγάλη ακρίβεια.

8.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

1) Να μετρηθεί η διάμετρος d δέκα (i=1,...,10) σφαιρών με το μικρόμετρο και να συμπληρωθεί πίνακας μετρήσεων της μορφής του Πίνακα 8.1

Για τις μετρήσεις αυτές σημειώστε για το μικρόμετρο που χρησιμοποιήσατε:

- Τη σταθερά της κλίμακας βερνιέρου: C =
- σφάλμα μετάθεσης του μηδενός: μ =



Θυμηθείτε: Κατά την μέτρηση με το μικρόμετρο η σύσφιξη των σιαγόνων να γίνεται με τον εξωτερικό κοχλία, ο οποίος περιστρέφεται ελεύθερα μόλις οι σιαγόνες βρουν αντίσταση, ώστε να αποφευχθεί υπερβολική άσκηση πίεσης στην επιφάνεια της πλάκας και ενδεχόμενη παραμόρφωση της επιφάνειας της. Για τη χρήση του μικρομέτρου συμβουλευθείτε την άσκηση 3.

Στο μικρόμετρο της φωτογραφίας: $C=S/n=0,01\text{mm}/\text{υποδ.}$ αφού $S=0,5\text{mm}$ και $n=50\text{υποδ.}$

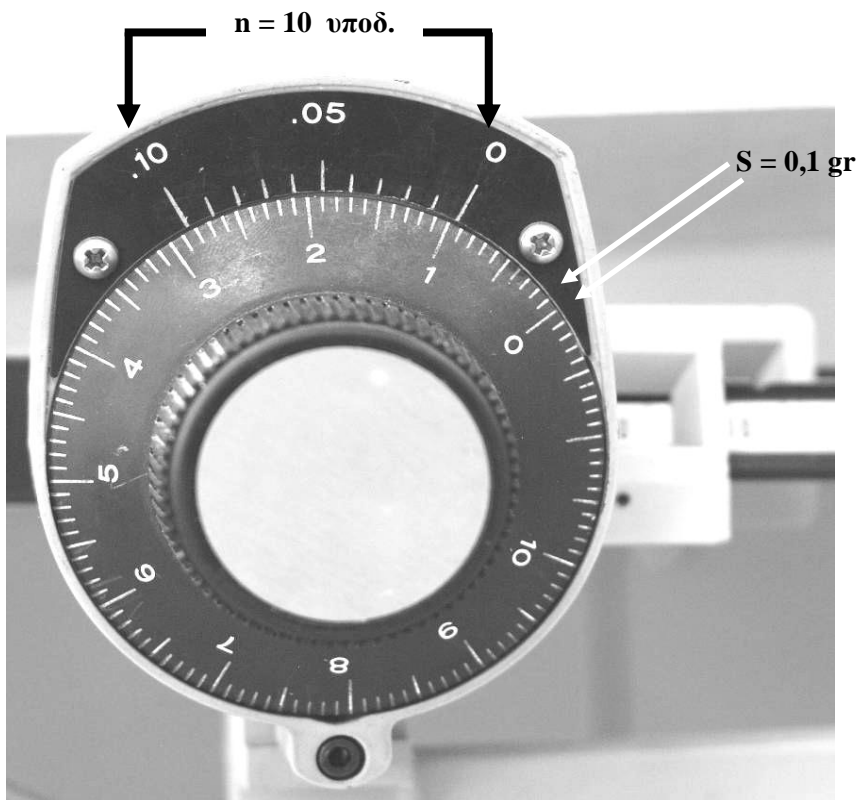
Η τελική ανάγνωση ένδειξης είναι:

$$3\text{mm} + 3\text{ενδ.} \times C = 3\text{mm} + 3\text{ενδ.} \times 0,01\text{mm}/\text{ενδ.} = 3,03\text{mm}$$

Πίνακας 8.1

i	d_i (mm)	$d_i + \mu$ (mm)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2) Να ζυγιστούν όλες (και οι 10) οι σφαίρες μαζί. Για να βοηθηθείτε στις μετρήσεις αυτές παρατηρήστε την ακόλουθη φωτογραφία του ζυγού και τη λεζάντα της.



Στο βερνιέρο του ζυγού της φωτογραφίας: $C=S/n=0,01\text{gr/υποδ.}$ αφού $S=0,1\text{gr}$ και $n=10\text{υποδ.}$
 Η τελική ανάγνωση της ένδειξης ζύγισης είναι:

$$M = 0,9\text{gr} + 5\text{ενδ.} \times C = 0,9\text{gr} + 5\text{ενδ.} \times 0,01\text{gr/ενδ} = 0,95\text{gr}$$

με σφάλμα ίσο με το μισό της σταθεράς βερνιέρου $C_{\text{ζυγού}}$ δηλ. $\delta M = C_{\text{ζυγού}}/2 = 0,005\text{gr}$

Για το όργανο του ζυγού προσδιορίστε:

- Τη σταθερά της κλίμακας βερνιέρου: $C_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$

- σφάλμα μετάθεσης του μηδενός: $\mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$

Μέτρηση της συνολικής μάζας των 10 σφαιριδίων $M=10 \cdot m$ (m =μάζα σφαιριδίου):

$$M^{\text{αρχική}} = \dots\dots\dots$$

Διορθωμένη, ως προς τη μετάθεση του μηδενός, μέτρηση της συνολικής μάζας:

$$M = M^{\text{αρχική}} + \mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$$

Το σφάλμα δM της μέτρησης της συνολικής μάζας είναι το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του ζυγού (φέρει κλίμακα βερνιέρου):

$\delta M = \dots\dots\dots$

3) Στον σωλήνα με το υγρό αφήστε να πέσουν ένα-ένα τα 10 σφαιρίδια της και μετρήστε το χρόνο που χρειάζεται κάθε σφαιρίδιο για να διανύσει το διάστημα $s=20\text{cm}$ μεταξύ των δύο γραμμών που σημειώνονται στον σωλήνα. Γράψτε τα αποτελέσματα σε κατάλληλο πίνακα της μορφής 8.2.

Πίνακας 8.2

i	t _i (sec)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

4) Με τη βοήθεια του πυκνομέτρου, μετρήστε την πυκνότητα του υγρού. Σημειώστε την τιμή της μέτρησης η οποία είναι σε βαθμούς Baumé:

$\rho^{Baume} = \dots\dots\dots$ βαθμοί Baumé

Εξαιτίας της χαραγμένης στο πυκνόμετρο, ισοδιάστατης, κλίμακας σε βαθμούς Baumé, η μέτρηση σας υπόκειται σε σφάλμα διακριτικής ικανότητας:

$\delta\rho^{Baume} = \dots\dots\dots$ βαθμοί Baumé

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Εξηγείστε γιατί η σφαίρα αποκτά ορική ταχύτητα κατά την πτώση της μέσα στο ρευστό;
- 2) Γιατί δεν μετράμε το χρόνο από τη στιγμή που η σφαίρα εισέρχεται στη γλυκερίνη αλλά απο κάποιο σημείο και μετά;

- 3) Πώς μπορούμε να ξεχωρίσουμε ένα πυκνόμετρο από ένα αραιόμετρο;
- 4) Τι περιμένετε να συμβεί με το συντελεστή ιξώδους, αν αυξήσουμε τη θερμοκρασία της γλυκερίνης;
- 5) Περιγράψτε μια πειραματική διάταξη με την οποία να επιτυγχάνεται καλύτερη ακρίβεια στην μέτρηση του χρόνου πτώσης σφαιριδίου t . (π.χ με χρήση πηγής φωτός και φωτοανιχνευτή).
- 6) Περιγράψτε μια πειραματική διαδικασία και την ακόλουθη μαθηματική ανάλυση που λαμβάνει υπόψη την επίδραση των τοιχωμάτων σωλήνα και την σχέση 8.6 ώστε να επιτύχει καλύτερη ακρίβεια στην μέτρηση του χρόνου πτώσης σφαιριδίου t_0 . Υπόδειξη: με χρήση μερικών σωλήνων διαφορετικών διαμέτρων D .

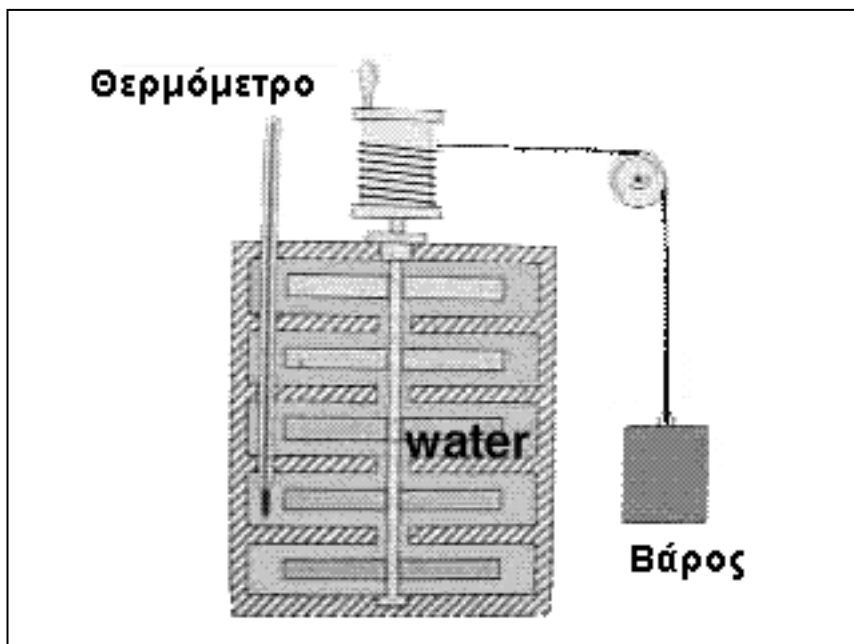
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) F. Tyler, *A Laboratory Manual of Physics*. Edward Arnold (Publishers) 1981.
- 2) Δ. Μεντζαφός, *Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής για Φοιτητές των Γεωπονικών Επιστημών*. Εκδόσεις Α. Σταμούλης 1997.
- 3) Δ. Μεντζαφός, Α. Χούντας, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανωτάτη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1997.

ΑΣΚΗΣΗ 9

ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΥΓΡΟΥ

Πείραμα του J. Joule που αποδεικνύει τη διατήρηση της ενέργειας



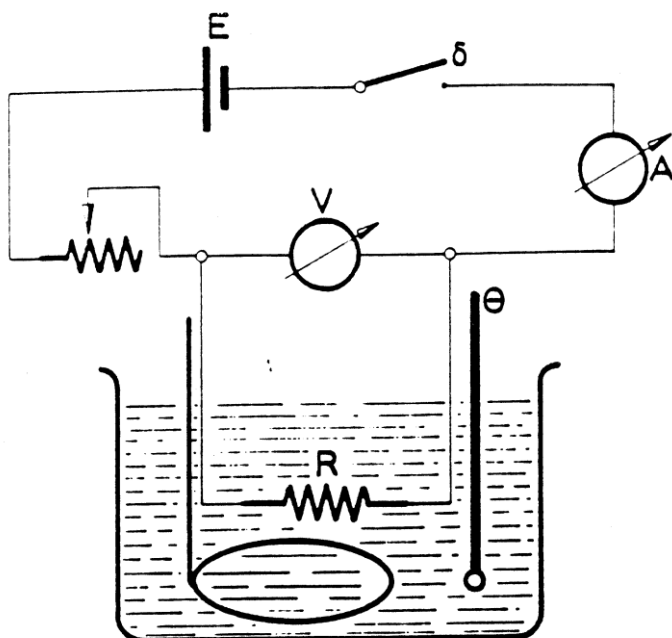
URL: <http://www.hcc.hawaii.edu>

9.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Η μελέτη του φαινομένου Joule και ο προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας υγρού.

9.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Νερό μάζας m_1 και στη συνέχεια γλυκερίνη μάζας m_2 και άγνωστης ειδικής θερμότητας c_2 τοποθετούνται διαδοχικά στο θερμιδόμετρο, στο οποίο βρίσκεται αντίσταση R (Σχ. 9.1). Η αντίσταση τροφοδοτείται, από μια πηγή συνεχούς τάσης E , με ρεύμα I , η τιμή του οποίου βρίσκεται με αμπερόμετρο (A). Με βολτόμετρο (V) μετράμε την τάση U στα άκρα της αντιστάσεως, ενώ θερμόμετρο θ μετρά κάθε στιγμή τη θερμοκρασία του υγρού. Υποτίθεται ότι η θερμική μόνωση του συστήματος είναι καλή, ώστε να μην επικοινωνεί θερμικά με το περιβάλλον. Έτσι, η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλίσκεται στην αντίσταση μετατρέπεται σε θερμότητα, η οποία αποταμιεύεται στο σύστημα ως εσωτερική ενέργεια, με αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασίας του. Ισχύουν οι σχέσεις (k είναι η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου) :



$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{UI}{J(m_1c_1 + k)}t$$

και

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{UI}{J(m_2c_2 + k)}t$$

για το νερό και για το υγρό αντίστοιχα.

Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων αυτών είναι ευθείες και οι κλίσεις τους είναι:

$$B_1 = \frac{U_1 I_1}{J(m_1c_1 + k)}$$

και

$$B_2 = \frac{U_2 I_2}{J(m_2c_2 + k)}$$

όπου $J=4,18 \frac{Joule}{cal}$ το ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας.

Με απαλοιφή της θερμοχωρητικότητας k του θερμιδόμετρου μεταξύ των δυο παραπάνω εξισώσεων, καταλήγουμε στον υπολογισμό της ειδικής θερμότητας της γλυκερίνης από τη σχέση:

$$c_2 = \frac{1}{m_2 J} \left(\frac{U_2 I_2}{B_2} - \frac{U_1 I_1}{B_1} \right) + \frac{m_1}{m_2} c_1$$

9.3 ΘΕΩΡΙΑ

Απο τη βασική εξίσωση της θερμομετρίας γνωρίζουμε ότι για να αυξηθεί η θερμοκρασία ενός σώματος κατά $\Delta\theta$ θα πρέπει να δωθεί στο σώμα θερμότητα Q ίση με:

$$Q = mc\Delta\theta = mc(\theta - \theta_0) \quad (9.1)$$

όπου m η μάζα του σώματος που θερμαίνουμε, c η **ειδική θερμότητα** του σώματος, θ η τιμή της θερμοκρασίας μετά απο χρόνο t και θ_0 η θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που αρχίζει η θέρμανση.

Το γινόμενο mc ονομάζεται **θερμοχωρητικότητα** του σώματος.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η θερμότητα Q προσφέρεται στο σώμα απο μια αντίσταση με τάση U και ρεύμα I , τότε σε χρόνο t :

$$Q = \frac{UIt}{J} \quad (9.2)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\theta = \theta_0 + \frac{UI}{Jmc}t \quad (9.3)$$

Αν υποθέσουμε ότι η θέρμανση γίνεται μέσα σ' ένα θερμοδόμετρο τότε κάποιο μέρος της προσφερόμενης θερμότητας θα απορροφάται απο το ίδιο το θερμοδόμετρο. Επομένως η σχέση (9.1) γίνεται:

$$Q = (mc + k)(\theta - \theta_0) \quad (9.4)$$

όπου $k = m_0c_0$ η θερμοχωρητικότητα του θερμοδόμετρου. Με βάση τη σχέση αυτή η σχέση (9.3) τροποποιείται και παίρνει τη μορφή:

$$\theta = \theta_0 + \frac{UI}{J(mc + k)}t \quad (9.5)$$

Ο συνδυασμός των δυο σχέσεων για τα δυο υγρά, με βάση την (9.5), οδηγεί στην:

$$c_2 = \frac{1}{m_2J} \left(\frac{U_2I_2}{B_2} - \frac{U_1I_1}{B_1} \right) + \frac{m_1}{m_2}c_1 \quad (9.6)$$

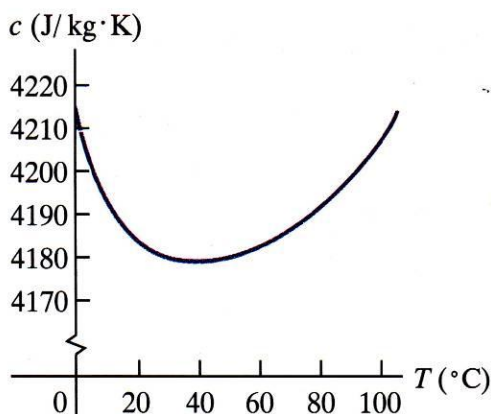
Η ειδική θερμότητα του νερού c_1 είναι κατά προσέγγιση:

$$1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} \quad \text{ή} \quad 4190 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

Η θερμίδα (cal) ορίζεται ως το ποσό θερμότητας που απαιτείται για αύξηση της θερμοκρασίας 1 g νερού από τους 14,5 °C στους 15,5°C. Επειδή θερμότητα σημαίνει μεταφορά ενέργειας, θα πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένη σχέση ανάμεσα στο cal και τη γνωστή μονάδα ενέργειας στο SI, το Joule. Η σχέση αυτή όπως προκύπτει από πειράματα ανάλογα αυτού του Sir James Joule (θέρμανση νερού με βίαη ανάδευση από ένα τροχό με πτερύγια, βλέπε σχήμα σελ. 105) είναι:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

Η ειδική θερμότητα ενός υλικού εξαρτάται πάντοτε ως ένα βαθμό από την αρχική θερμοκρασία και τη μεταβολή της θερμοκρασίας. Το ακόλουθο σχήμα 9.2 δείχνει αυτήν την εξάρτηση για το νερό.



Σχήμα 9.2: Η ειδική θερμότητα του νερού ως συνάρτηση της θερμοκρασίας

9.4 ΣΥΣΚΕΥΕΣ

- 1) Πηγή παραγωγής συνεχούς τάσης και καλώδια για το κύκλωμα.
- 2) Μεταβλητή αντίσταση.
- 3) Θερμιδόμετρο.
- 4) Δύο πολύμετρα που χρησιμεύουν ως βολτόμετρο και αμπερόμετρο.
- 5) Θερμόμετρο
- 6) Ζυγός.
- 7) Ποσότητα αποσταγμένου νερού και άγνωστου υγρού

9.5 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

1) Να ζυγισθεί* το θερμιδόμετρο μαζί με το καπάκι του. Για να βοηθηθείτε στις μετρήσεις αυτές παρατηρήστε την ακόλουθη φωτογραφία του ζυγού και τη λεζάντα της.

Για το όργανο του ζυγού προσδιορίστε αν υπάρχουν:

- Τη σταθερά της κλίμακας βερνιέρου: $C_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$
- σφάλμα μετάθεσης του μηδενός: $\mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$

Μέτρηση μάζας θερμιδομέτρου:

$$m_{\text{θερμ}}^{(\text{αρχική})} = \dots\dots\dots$$

Διορθωμένη, ως προς τη μετάθεση του μηδενός, μέτρηση της μάζας θερμιδομέτρου:

$$m_{\text{θερμ}} = m_{\text{θερμ}}^{(\text{αρχική})} + \mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$$

Το σφάλμα $\delta m_{\text{θερμ}}$ της μέτρησης της μάζας είναι το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του ζυγού:

$$\delta m_{\text{θερμ}} = \dots\dots\dots$$

2) Να γεμίσετε το δοχείο με νερό κατά τέτοιο τρόπο ώστε η αντίσταση να βυθίζεται στο νερό. Ζυγίστε το δοχείο μαζί με το νερό.

Σημειώστε τις ενδείξεις:

$$m_{\text{νερό και θερμιδόμετρο}}^{(\text{αρχική})} = \dots\dots\dots$$

* Οδηγίες για την ανάγνωση των ενδείξεων του ζυγού μπορείτε να βρείτε στις Εργαστηριακές ασκήσεις 3 και 8 (§8.5.1, εκτέλεση άσκησης).

Διορθωμένη, ως προς τη μετάθεση του μηδενός, μέτρηση της μάζας θερμοδόμετρου:

$$m_{\text{νερό και θερμοδόμετρο}} = m_{\text{νερό και θερμοδόμετρο}}^{(\text{αρχική})} + \mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$$

Το σφάλμα $\delta m_{\text{νερό και θερμοδόμετρο}}$ της μέτρησης της μάζας είναι το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του ζυγού:

$$\delta m_{\text{νερό και θερμοδόμετρο}} = \dots\dots\dots$$

3) Να συνδεσμοποιηθεί το κύκλωμα του Σχ. 9.1. και αφού ελεγχθεί το κύκλωμα από το προσωπικό του Εργαστηρίου να τεθεί το όλο σύστημα σε λειτουργία.

4) Να σημειωθούν η τάση U_1 και το ρεύμα I_1 :

$$U_1 = \dots\dots\dots \text{ Volt} \quad \text{και} \quad I_1 = \dots\dots\dots \text{ A}$$

Να σημειωθούν τα σφάλματα:

$$\delta U_1 = \dots\dots\dots \text{ Volt} \quad \text{και} \quad \delta I_1 = \dots\dots\dots \text{ A}$$

που προκύπτουν ως σφάλματα διακριτικής ικανότητας των πολυμέτρων** που χρησιμοποιήθηκαν για τις μετρήσεις των U_1 και I_1 .

5) Να ληφθούν οι θερμοκρασίες ανά 1 min και επί 10 min. Τα αποτελέσματα να γραφούν στον Πίνακα 9.1. Σημειώστε τα σφάλματα κάθε μέτρησης που προκύπτουν από τη διακριτική ικανότητα των οργάνων που χρησιμοποιήσατε.

6) Να διακοπεί η τροφοδοσία του κυκλώματος. Να αντικατασταθεί το νερό με γλυκερίνη ειδικής θερμότητας c_2 . Να ζυγισθεί και να βρεθεί η μεικτή μάζα του. Σημειώστε τις ενδείξεις:

$$m_{\text{υγρό και θερμοδόμετρο}}^{(\text{αρχική})} = \dots\dots\dots$$

Διορθωμένη, ως προς τη μετάθεση του μηδενός, μέτρηση της μάζας θερμοδόμετρου:

$$m_{\text{υγρό και θερμοδόμετρο}} = m_{\text{υγρό και θερμοδόμετρο}}^{(\text{αρχική})} + \mu_{\text{ζυγού}} = \dots\dots\dots$$

Το σφάλμα $\delta m_{\text{υγρό και θερμοδόμετρο}}$ της μέτρησης της μάζας είναι και πάλι το σφάλμα διακριτικής ικανότητας του ζυγού:

$$\delta m_{\text{υγρό και θερμοδόμετρο}} = \dots\dots\dots$$

7) Όπως και στο βήμα 4***, να σημειωθούν η τάση U_2 και το ρεύμα I_2 :

$$U_2 = \dots\dots\dots \text{ Volt} \quad \text{και} \quad I_2 = \dots\dots\dots \text{ A}$$

Να σημειωθούν τα σφάλματα:

$$\delta U_2 = \dots\dots\dots \text{ Volt} \quad \text{και} \quad \delta I_2 = \dots\dots\dots \text{ A}$$

που προκύπτουν ως σφάλματα διακριτικής ικανότητας των πολυμέτρων όπως και στο βήμα 4****.

** Στην περίπτωση που είναι ψηφιακό όργανο, θεωρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο που εμφανίζεται είναι αβέβαιο (σύμφωνα με την §1.2.1 “Υπολογισμός Σφάλματος σε μια Απλή Μέτρηση” της Εργαστηριακής Άσκησης 1), π.χ η ένδειξη $U=2,18 \text{ V}$ θα έχει σφάλμα $\delta U=0,01 \text{ V}$. Αν χρησιμοποιήσατε αναλογικό πολύμετρο, για τον καθορισμό του σφάλματος διακριτικής ικανότητας προσέξτε τις υποδιαρέσεις στην κλίμακα ανάγνωσης που ρυθμίζατε το όργανο.

*** Αν δεν μετακινήσετε το δρομέα της μεταβλητής αντίστασης θα πάρετε ίδιες τιμές με αυτές του βήματος 4, δηλ. $U_2 = U_1$ και $I_2 = I_1$. Αυτό δεν πειράζει σε τίποτα την εκτέλεση του πειράματός σας.

**** Σε κάθε περίπτωση, αφού δεν αλλάξατε πολύμετρα κατά την εκτέλεση της άσκησης, θα πρέπει: $\delta U_2 = \delta U_1$ και $\delta I_2 = \delta I_1$.

8) Να ληφθούν οι θερμοκρασίες ανά 1min και επί 10 min. Τα αποτελέσματα να γραφούν στον Πίνακα 9.1

Πίνακας 9.1

<i>Νερό</i>		<i>Γλυκερίνη</i>	
t (min)	θ (°C)	t (min)	θ (°C)
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
6		6	
7		7	
8		8	
9		9	
10		10	

$\delta t = \dots\dots\dots$ (σφάλμα διακριτικής ικανότητας χρονομέτρου)

$\delta \theta = \dots\dots\dots$ (σφάλμα διακριτικής ικανότητας θερμομέτρου)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Τι εκφράζει η ειδική θερμότητα και από τι εξαρτάται;
- 2) Τι εκφράζει το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας;
- 3) Γιατί το σφάλμα στη μέτρηση της μάζας του νερού είναι το διπλάσιο του σφάλματος διακριτικής ικανότητας;
- 4) Τι εσωτερική αντίσταση πρέπει να έχει ένα αμπερόμετρο τι ένα βολτόμετρο και γιατί;
- 5) Γιατί πήρατε μετρήσεις με νερό, ενώ σας ενδιέφερε η ειδική θερμότητα της γλυκερίνης;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Δ. Μεντζαφός. *Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής Για Φοιτητές Των Γεωπονικών Επιστημών*. Εκδόσεις Σταμούλης Αθήνα 1997.
- 2) Δ. Μεντζαφός Α. Χούντας. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Αθήνα 1997.
- 3) Young D. H. *Πανεπιστημιακή Φυσική – Τόμος Α'*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Έστω ότι μετρήθηκαν οι ποσότητες x, y, z, \dots και εκτιμήθηκαν τα σφάλματα μέτρησης τους $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ με σκοπό να υπολογισθεί η ποσότητα Q , της οποίας η άμεση μέτρηση δεν είναι δυνατή. Η ποσότητα Q δίνεται από κάποιο φυσικό νόμο (μαθηματικό μοντέλο) ως συνάρτηση των ποσοτήτων x, y, z, \dots δηλ:

$$Q = f(x, y, z, \dots) \quad (\text{A.1})$$

Στη θεωρία των σφαλμάτων αποδεικνύεται ότι το σφάλμα δQ της ποσότητας Q υπολογίζεται με διαφόριση της σχέσης (1.4), με τη βοήθεια της απόλυτης τιμής των μερικών παραγώγων της Q , ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές, δηλ.:

$$\delta Q = \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial Q}{\partial z} \right| \delta z + \dots \quad (\text{A.2})$$

A) Αθροίσματα και Διαφορές: Έστω ότι ένα μέγεθος Q υπολογίζεται σαν άθροισμα ή διαφορά δύο ή περισσότερων μεγεθών δηλ.:

$$Q = (x_1 + y_1 + \dots + z_1) - (x_2 + y_2 + \dots + z_2) \quad (\text{A.3})$$

Στην περίπτωση αυτή $\left| \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial Q}{\partial y_1} \right| = \dots = \left| \frac{\partial Q}{\partial z_2} \right| = 1$ οπότε σύμφωνα με την σχέση (A.2) το σφάλμα του Q , δQ , ισούται με το άθροισμα:

$$\delta Q = |\delta x_1| + |\delta y_1| + \dots + |\delta x_2| + |\delta y_2| + \dots + |\delta z_2| \quad (\text{A.4})$$

όλων των επιμέρους σφαλμάτων.

B) Γινόμενα και Πηλίκια: Αν η ποσότητα Q προκύπτει από το γινόμενο ή το πηλίκιο των μετρούμενων ποσοτήτων, δηλ.:

$$Q = x_1 y_1 \dots z_1 x_2 y_2 \dots z_2 \quad (\text{A.5})$$

ή

$$Q = \frac{x_1 y_1 \dots z_1}{x_2 y_2 \dots z_2} \quad (\text{A.6})$$

τότε όπως αποδεικνύεται εύκολα από την (A.2) μπορούμε να πάρουμε μια απλή σχέση που δίνει το σχετικό σφάλμα της Q σαν άθροισμα των σχετικών σφαλμάτων των επί μέρους ποσοτήτων. Δηλαδή:

$$\frac{\delta Q}{|Q|} = \left| \frac{\delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\delta y_1}{y_1} \right| + \dots + \left| \frac{\delta z_1}{z_1} \right| + \left| \frac{\delta x_2}{x_2} \right| + \left| \frac{\delta y_2}{y_2} \right| + \dots + \left| \frac{\delta z_2}{z_2} \right| \quad (\text{A.7})$$

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα για αυτές τις δύο σημαντικές περιπτώσεις μπορούμε να εξαγάγουμε τον ακόλουθο μνημονικό κανόνα:

Όταν οι αμέσως μετρούμενες ποσότητες προστίθενται ή αφαιρούνται τα σφάλματα τους αθροίζονται.

Όταν οι αμέσως μετρούμενες ποσότητες πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται τότε τα σχετικά τους σφάλματα αθροίζονται.

Γ) Δυνάμεις: Αν η ποσότητα Q υπολογίζεται ως δύναμη ενός μεγέθους, δηλ.

$$Q = x^v \quad (\text{A.8})$$

τότε εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\delta Q}{|Q|} = v \left| \frac{\delta x}{x} \right| \quad (\text{A.9})$$

Δ) Γινόμενο με σταθερά: Έστω ότι η ποσότητα Q υπολογίζεται ως γινόμενο μιας αμέσως μετρούμενης ποσότητας με μια σταθερά, δηλ.:

$$Q = Ax \quad (\text{A.10})$$

Εύκολα και πάλι μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\delta Q = |A\delta x| \quad (\text{A.11})$$

Ανεξάρτητα Σφάλματα

Αν έχουμε ανεξάρτητα σφάλματα τότε η βασική σχέση (A.2) γίνεται:

$$\delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)^2 + \dots} \quad (\text{A.12})$$

Με την σειρά τους οι σχέσεις (A.4) και (A.7) γίνονται αντίστοιχα:

$$\delta Q = \sqrt{(\delta x_1)^2 + \dots + (\delta z_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta z_2)^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\delta Q}{|Q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z_2}{z_2}\right)^2} \quad (\text{A.14})$$

Οι σχέσεις (A.2), (A.4), (A.7) οδηγούν στον υπολογισμό τιμών σφαλμάτων οι οποίες αποτελούν άνω όριο των δυνατών σφαλμάτων και γι' αυτό ονομάζονται **“μέγιστα σφάλματα σύνθετης μετρήσεως”**.

Οι νέες σχέσεις (A.12), (A.13), (A.14) υπολογίζουν πάντα μικρότερη τιμή για το τελικό σφάλμα απ' ότι οι αντίστοιχες (A.2), (A.4), (A.7) και γι' αυτό θα πρέπει πάντα να χρησιμοποιούνται όταν είναι εφαρμόσιμες δηλαδή όταν τα σφάλματα των μετρούμενων μεγεθών είναι **ανεξάρτητα και τυχαία**. Σημειώνουμε εδώ ότι σχεδόν ΟΛΕΣ οι μετρήσεις που γίνονται στο Εργαστήριο εμπεριέχουν ανεξάρτητα και τυχαία σφάλματα.

