Εργαστήριο Βελτίωσης Φυτών
και Γεωργικού Πειραματισμού

Γραπτή Εξέταση Προόδου στο <u>Α΄ Μέρος</u> του Μαθήματος <u>Στατιστική</u>
για το Τμήμα Ε.Φ.Π.

18 Απριλίου 2016

<u>1^ο Θέμα</u> *[20 μονάδες]*
α) Δώστε την έννοια του στοχαστικού/τυχαίου πειράματος ή φαινομένου.
β) Έστω Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα.

$P(A)$	$P(B)$	*Συνθήκη για τα Α και Β*	$P(AB)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
0.1	*0.5*	*Ξένα*			
0.2	*0.4*			*0.6*	
0.1	*0.5*	*Ανεξάρτητα*			

<u>2^ο Θέμα</u> *[40 μονάδες]*
Η ποσότητα μυκητοκτόνου που απομένει στα μήλα σαράντα μέρες μετά το τελευταίο ράντισμα είναι τυχαία μεταβλητή, έστω *X*, η οποία ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1.5ppb$ *(ανά μήλο)* και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.3ppb$ *(ανά μήλο)*.
α) Σε τι ποσοστό των μήλων η ποσότητα μυκητοκτόνου που απομένει σαράντα μετά το τελευταίο ράντισμα **i.** ξεπερνά τα $0.8ppb$ **ii.** δεν ξεπερνά τα $1.2ppb$ **iii.** είναι μεταξύ 2 και $2.5ppb$.
β) Βρείτε εκείνη την ποσότητα μυκητοκτόνου, έστω x_0, πάνω από την οποία απομένει μόνο στο 2.5% των μήλων (σαράντα μέρες μετά το τελευταίο ράντισμα).
γ) Επιλέγουμε τυχαία 6 μήλα (σαράντα μέρες μετά το τελευταίο ράντισμα). **i.** Ποια είναι η πιθανότητα το πολύ σε 4 από αυτά η ποσότητα μυκητοκτόνου να ξεπερνά τα $0.8ppb$. **ii.** Σε πόσα από αυτά αναμένεται η ποσότητα μυκητοκτόνου να ξεπερνά τα $0.8ppb$.
δ) Σαράντα μέρες μετά το τελευταίο ράντισμα γίνεται συγκομιδή των μήλων και ανά 20 συσκευάζονται σε κιβώτια. Επιλέγουμε τυχαία ένα κιβώτιο. Ποια είναι η πιθανότητα η μέση ποσότητα μυκητοκτόνου στα 20 μήλα του κιβωτίου να μην ξεπερνά τα $0.9ppb$ *(ανά μήλο)*.

<u>3^ο Θέμα</u> *[20 μονάδες]*
Έχει βρεθεί ότι η ποσότητα ξένων προσμίξεων ανά πακέτο συγκεκριμένου φυτοφαρμάκου είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 4gr$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1.5gr$. Ένας αγρότης προμηθεύεται για τις καλλιέργειές του 49 τέτοια πακέτα. Ποια είναι η πιθανότητα η συνολική ποσότητα ξένων προσμίξεων που περιέχεται στα 49 πακέτα να ξεπερνά τα 220gr;

<u>4^ο Θέμα</u> *[20 μονάδες]*
Έχει διαπιστωθεί ότι από τις κερασιές στο οροπέδιο της Τεγέας, ποσοστό 2% προσβάλλεται κάθε χρόνο από μια συγκεκριμένη ασθένεια. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας (η οποία βασίζεται σε κάποια πρόδρομα συμπτώματα) έχει ευαισθησία 95%, δηλαδή όταν ένα δένδρο έχει προσβληθεί, η μέθοδος κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.95. Αντίστοιχα, η

ειδικότητα της μεθόδου είναι 99%, δηλαδή όταν ένα δένδρο δεν έχει προσβληθεί, η μέθοδος κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.99.

α) Αν μια κερασιά ελεγχθεί με τη συγκεκριμένη διαγνωστική μέθοδο, ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι θετικό (δηλαδή, η μέθοδος να δείξει ότι η κερασιά έχει προσβληθεί).

β) Αν μια κερασιά ελεγχθεί με τη συγκεκριμένη διαγνωστική μέθοδο και το αποτέλεσμα βγει θετικό, ποια είναι η πιθανότητα η κερασιά πράγματι να έχει προσβληθεί;

γ) Το ενδεχόμενο *«το αποτέλεσμα είναι θετικό»* και το ενδεχόμενο *«η κερασιά έχει προσβληθεί»* είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

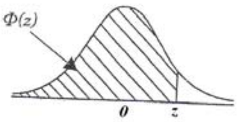
Πρέπει να απαντήσετε στα θέματα 1, 2 και σε <u>ένα</u> που εσείς θα επιλέξετε από τα 3, 4.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες
Καλή επιτυχία!

Τιμές των πιθανοτήτων

$\boldsymbol{\Phi(z) = P(Z \le z)}$

της $\boldsymbol{N(0,1)}$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

<u>Ενδεικτικές απαντήσεις</u>

<u>1^o Θέμα</u>

P(A)	*P(B)*	*Συνθήκη για τα Α και Β*	*P(AB)*	$P(A\cup B)$	*P(A|B)*
0.1	*0.5*	*Ξένα*	**0**	**0.6**	**0**
0.2	*0.4*	***Ξένα***	**0**	0.6	**0**
0.1	*0.5*	*Ανεξάρτητα*	**0.05**	**0.55**	**0.1**

2^o Θέμα: Δίνεται ότι $X \sim N(1.5,\ 0.3^2)$ άρα:

α) i. $P(X>0.8)=P(\frac{X-1.5}{0.3}>\frac{0.8-1.5}{0.3})=P(Z>-2.33)=1-P(Z\le -2.33)=$
$=1-\Phi(-2.33)=\Phi(2.33)=0.9901$

ii. $P(X\le 1.2)=P(\frac{X-1.5}{0.3}\le\frac{1.2-1.5}{0.3})=P(Z\le -1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=...$

iii. $P(2<X<2.5)=P(\frac{2-1.5}{0.3}<\frac{X-1.5}{0.3}<\frac{2.5-1.5}{0.3})=P(1.67<Z<3.33)=$
$=\Phi(3.33)-\Phi(1.67)=....$

β) Πρέπει: $P(X>x_0)=0.025 \Leftrightarrow P(z>\frac{x_0-1.5}{0.3})=0.025 \Leftrightarrow \Phi(\frac{x_0-1.5}{0.3})=0.975 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x_0-1.5}{0.3}=1.96 \Leftrightarrow x_0=2.08$.

γ) Έστω Y ο αριθμός των μήλων από τα 6 που επελέγησαν, σε καθένα από τα οποία η ποσότητα μυκητοκτόνου ξεπερνά τα 0.8ppb. Προφανώς, $Y \sim B(6,\ 0.9901)$.

i. Ζητείται η πιθανότητα
$P(Y\le 4)=1-P(Y>4)=1-[P(Y=5)+P(Y=6)]=$

$$=1-\binom{6}{5}\cdot(0.9901)^5\cdot(1-0.9901)^1-\binom{6}{6}\cdot(0.9901)^6\cdot(1-0.9901)^0=...$$

ii. Ζητείται η μέση τιμή της Υ.
$E(Y)=6\cdot 0.9901=5.9406\approx 6$

δ) Έστω X_i η ποσότητα μυκητοκτόνου στο μήλο i ($i=1,2,...,20$). Προφανώς ζητάμε την πιθανότητα $P(\overline{X}\le 0.9)$ όπου $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_{20}}{20}$. Επειδή $X_i\sim N(1.5,\ 0.3^2)$, $i=1,2,...,20$, από γνωστό θεώρημα έχουμε $\overline{X}\sim N(1.5,\ \frac{0.3^2}{20})$ και επομένως

$$P(\overline{X}\le 0.9)=P(Z\le\frac{0.9-1.5}{\sqrt{0.3^2/20}})=P(Z\le -8.94)=\Phi(-8.94)=1-\Phi(8.94)\approx 1-1=0$$

<u>3^o Θέμα</u> Έστω X_i η ποσότητα ξένων προσμίξεων στο πακέτο i ($i=1,2,...,49$). Προφανώς ζητάμε την πιθανότητα $P(Y>220)$ όπου $Y=X_1+X_2+...+X_{49}$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή $\mu_i=E(X_i)=4$ και διακύμανση $\sigma_i^2=1.5^2$ και επομένως από το Κ.Ο.Θ. προκύπτει ότι η Y προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $N(49\cdot 4,\ 49\cdot 1.5^2)$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y > 220) = P(Z > \frac{220 - 49 \cdot 4}{\sqrt{49 \cdot 1.5^2}}) = P(Z > 2.29) = 1 - \Phi(2.29) = 0.011\,.$$

4^{o} Θέμα: Έστω τα ενδεχόμενα

E: η κερασιά έχει προσβληθεί

Θ: το αποτέλεσμα είναι θετικό.

Δίνονται οι πιθανότητες: $P(E) = 0.02$, $P(\Theta / E) = 0.95$ και $P(\Theta' / E') = 0.99$.

α) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Theta) = P(\Theta / E)P(E) + P(\Theta / E')P(E') = 0.95 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.98 = 0.0288$$

β) Από τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(E / \Theta) = \frac{P(\Theta / E)P(E)}{P(\Theta)} = 0.6597\,.$$

γ) Είναι εξαρτημένα διότι $P(E / \Theta) = 0.6597$ ενώ $P(E) = 0.02$.

Δηλαδή, $P(E / \Theta) \neq P(E)$