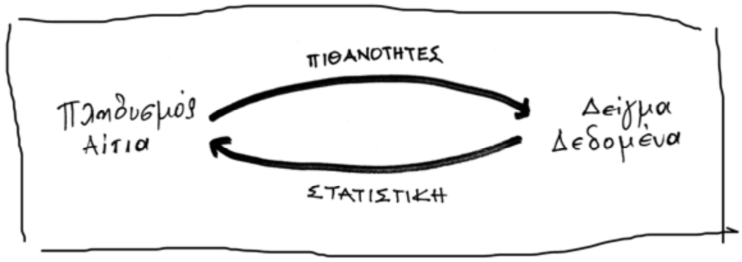
Η έννοια και βασικές ιδιότητες της πιθανότητας

Όπως ήδη στο εισαγωγικό κεφάλαιο αναφέραμε αλλά και όπως στα επόμενα θα διαπιστώσουμε, **βεβαιότητες** για συμπεράσματα που αφορούν **σε στοχαστικά φαινόμενα και πειράματα δεν υπάρχουν**. Συνεπώς, συμπεράσματα για στοχαστικά φαινόμενα ή πειράματα, έχουν αξία και μπορούν να αξιοποιηθούν μόνο εφόσον μπορούμε να πούμε κάτι για το **πόσο βέβαιοι** είμαστε για αυτά ή αλλιώς, για το μέγεθος της εγγενούς **αβεβαιότητας** που αναπόδραστα αυτά εμπεριέχουν. Η *Θεωρία Πιθανοτήτων* μας προσφέρει επιστημονικά εργαλεία για την εκτίμηση αυτής της αβεβαιότητας.

Θυμηθείτε τη διαδικασία μετάβασης **από τον πληθυσμό στο δείγμα και αντίστροφα**, που (σε αδρές γραμμές) περιγράψαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο όταν αναφερθήκαμε στη **στατιστική προσέγγιση** προβλημάτων.



Σχήμα 3.1.1
Σχέση Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Ο ρόλος των πιθανοτήτων σε αυτή τη διαδικασία είναι διπλός:

- Υποθέτοντας κάποιο μοντέλο για τον πληθυσμό, για τα αίτια, μπορούμε με τα εργαλεία που μας προσφέρει η *θεωρία πιθανοτήτων,* να υπολογίσουμε πόσο πιθανό είναι να παρατηρηθεί «ορισμένη συμπεριφορά» στα δεδομένα που προκύπτουν από ένα δείγμα που θα πάρουμε από τον πληθυσμό.
- Οι μέθοδοι της *στατιστικής (συμπερασματολογίας)* αξιοποιούν εργαλεία της *θεωρίας πιθανοτήτων* επίσης. Δηλαδή, η μετάβαση από το δείγμα στον πληθυσμό ή αλλιώς, τα συμπεράσματά μας για τα αίτια με βάση τα δεδομένα και το πόσο βέβαιοι είμαστε για αυτά τα συμπεράσματα, προκύπτουν με αξιοποίηση των εργαλείων που προσφέρει η *θεωρία πιθανοτήτων*!

Για να μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιούμε σωστά στη *στατιστική συμπερασματολογία* τα εργαλεία που μας προσφέρουν οι πιθανότητες, **πρέπει να κατανοήσουμε πώς αυτά δουλεύουν**. Στο *Α΄ Μέρος* αυτό επιδιώκουμε.

Ας αρχίσουμε όμως με τα βασικά. Πρέπει κατ' αρχάς, να εξοικειωθούμε με τη «γλώσσα» των πιθανοτήτων.

3.1 Βασικές Έννοιες

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ***τυχαία/στοχαστικά φαινόμενα*** και ***πειράματα*** ονομάζουμε τα φαινόμενα και πειράματα των οποίων το αποτέλεσμα (σε μια πραγματοποίησή τους/εκτέλεσή τους) δε μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα γιατί δεν καθορίζεται με βάση την αρχή της αιτιότητας (όπως στα αιτιοκρατικά φαινόμενα και πειράματα) αλλά αποδίδεται στην ***τύχη***. Η έννοια του ***τυχαίου*** συνδέεται με το ***πολυσύνθετο*** και το ***περιορισμένο*** της γνώσης των αιτίων που προκαλούν το αποτέλεσμα (υπάρχει «έλλειμμα αιτιότητας»).

Για τα στοχαστικά/τυχαία φαινόμενα και πειράματα στα οποία βρίσκουν εφαρμογή τα αποτελέσματα της *Θεωρίας Πιθανοτήτων* (και αποκτά νόημα το αξιωματικό πιθανοθεωρητικό οικοδόμημα), χρησιμοποιούμε τον όρο ***πείραμα τύχης (random experiment)*** και εννοούμε μια διαδικασία

(1) που μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες[1] όσες φορές θέλουμε (θεωρητικά άπειρες φορές)

(2) σε μια επανάληψή της δε μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανισθεί, όμως

(3) μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα **δυνατά** αποτελέσματά της, ή αλλιώς, έχει **ένα καλά ορισμένο σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων**.

Ορισμός 3.1.1 (δειγματικός χώρος): *Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται* ***δειγματικός χώρος (sample space)*** *του πειράματος και (συνήθως) συμβολίζεται με Ω ή με S.*

Κάθε στοιχείο ενός *δειγματικού χώρου*, δηλαδή κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός *πειράματος τύχης*, ονομάζεται ***δειγματικό σημείο (sample outcome/sample point)***. Σύνολα από *δειγματικά σημεία* ή αλλιώς, συγκεκριμένα υποσύνολα του *δειγματικού χώρου* Ω, συμπεριλαμβανομένων του κενού $\varnothing$ και του *δειγματικού χώρου* Ω ονομάζονται ***ενδεχόμενα (events)*** και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα *Α, Β, Γ, κ.ο.κ.* Αν ένα *ενδεχόμενο* αποτελείται από μόνο ένα δειγματικό σημείο ονομάζεται ***απλό ενδεχόμενο (simple/atomic event)*** ενώ αν αποτελείται από περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζεται ***σύνθετο ενδεχόμενο (compound event)***. Το πλήθος των στοιχείων ενός *ενδεχομένου Α*, θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.

Σε μια εκτέλεση/επανάληψη ενός *πειράματος τύχης* εμφανίζεται κάποιο από τα δυνατά αποτελέσματά του, δηλαδή κάποιο στοιχείο του *δειγματικού χώρου* Ω του πειράματος και μάλιστα **μόνο ένα (ακριβώς ένα).** Έστω *Α* ένα *ενδεχόμενο* του Ω. Αν το αποτέλεσμα, έστω $\omega \in \Omega$, που πήραμε σε μια εκτέλεση του πειράματος είναι ένα από τα στοιχεία του *Α,* δηλαδή αν $\omega \in A$, τότε λέμε ότι ***εμφανίσθηκε (*** ή αλλιώς, ***πραγματοποιήθηκε, συνέβη)*** το *ενδεχόμενο Α*.

Ο *δειγματικός χώρος* Ω ενός *πειράματος τύχης* ονομάζεται ***βέβαιο ενδεχόμενο (certain/sure event)*** γιατί εμφανίζεται/πραγματοποιείται πάντοτε (αφού περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος). Το *κενό ενδεχόμενο*, $\varnothing$, ονομάζεται ***αδύνατο ενδεχόμενο (impossible event)*** γιατί δεν εμφανίζεται/πραγματοποιείται ποτέ (αφού δεν περιέχει κανένα στοιχείο).

Αν ένα *πείραμα τύχης* έχει πεπερασμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων, έστω $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$, τότε ο *δειγματικός χώρος*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$$

του πειράματος ονομάζεται ***πεπερασμένος δειγματικός χώρος (finite sample space)***.

Αν το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός *πειράματος τύχης* είναι αριθμήσιμο απειροσύνολο[2], ο *δειγματικός χώρος* του πειράματος ονομάζεται ***αριθμησίμως άπειρος δειγματικός χώρος (countably infinite sample space)***. Στην περίπτωση αυτή ο *δειγματικός χώρος* έχει άπειρα στοιχεία που όμως μπορούν να αριθμηθούν. Έτσι, αν

---

[1] *Ή «περίπου τις ίδιες συνθήκες».*

[2] Δηλαδή, αν τα *στοιχεία του μπορούν να αντιστοιχισθούν ένα προς ένα με τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών.*

συμβολίσουμε τα στοιχεία του (τα δυνατά αποτελέσματα) με $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, ο *δειγματικός χώρος* γράφεται

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}.$$

Αν ο *δειγματικός χώρος* ενός *πειράματος τύχης* είναι άπειρο αλλά μη αριθμήσιμο σύνολο, ονομάζεται ***συνεχής δειγματικός χώρος (continuous sample space)***.

Αν ένας *δειγματικός χώρος* είναι είτε *πεπερασμένος* είτε *αριθμησίμως άπειρος* ονομάζεται ***διακριτός δειγματικός χώρος (discrete sample space)***.

Σημειώνουμε τέλος, ότι αν ο *δειγματικός χώρος* ενός *πειράματος τύχης* είναι *διακριτός*, τότε κάθε υποσύνολο του θεωρείται ότι είναι ένα *ενδεχόμενο*. Αν ο *δειγματικός χώρος* του πειράματος είναι *συνεχής* κάποια υποσύνολα του δε μπορεί να είναι αποδεκτά ως *ενδεχόμενα*[3]. Όμως τέτοιες περιπτώσεις δε θα συναντήσουμε στα προβλήματα που θα μελετήσουμε γι' αυτό και δε θα αναφερθούμε περισσότερο σε αυτή τη «λεπτομέρεια».

Πριν συνεχίσουμε με την εισαγωγή νέων εννοιών (και ορολογίας), ας δούμε μερικά *πειράματα τύχης* που θα μας βοηθήσουν να αποσαφηνίσουμε καλύτερα τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 3.1.1: (α) *Επιλέγουμε από τη γραμμή παραγωγής μιας βιομηχανίας τροφίμων ένα προϊόν και ελέγχουμε αν αυτό είναι εντός ή εκτός προδιαγραφών.*

Προφανώς πρόκειται για *πείραμα τύχης* αφού η διαδικασία *«επιλέγω ένα προϊόν, το ελέγχω και το χαρακτηρίζω εντός ή εκτός προδιαγραφών»* μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες πολλές φορές, σε κάθε επανάληψη το αποτέλεσμα του ελέγχου δεν είναι γνωστό πριν ο έλεγχος πραγματοποιηθεί και τα δυνατά αποτελέσματά του είναι γνωστά, τα εξής δύο: *εντός προδιαγραφών (κ)*, *εκτός προδιαγραφών (ε)*. Επομένως, ο *δειγματικός χώρος*, Ω, του πειράματος είναι

$$\Omega = \{\kappa, \ \varepsilon\}$$

και πρόκειται για *πεπερασμένο δειγματικό χώρο* με $N(\Omega) = 2$.

Ένα πείραμα με μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα όπως το συγκεκριμένο, ονομάζεται ***δοκιμή Bernoulli (Bernoulli trial)***. Το ένα αποτέλεσμα έχει επικρατήσει να ονομάζεται «επιτυχία» και το άλλο «αποτυχία». Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με αυτή την κατηγορία τυχαίων πειραμάτων. Όπως θα διαπιστώσουμε, παρότι η *δοκιμή Bernoulli* είναι ένα πολύ απλό πείραμα, ίσως το απλούστερο, βρίσκεται στον πυρήνα πολλών προβλημάτων με ευρύτατο φάσμα εφαρμογών.

(β) *Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο μικρότερο ή ίσο του 50.*

Πρόκειται για *πείραμα τύχης* (σκεφθείτε γιατί) με *δειγματικό χώρο* το πεπερασμένο σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 50\},$$

δηλαδή, πρόκειται για *πεπερασμένο δειγματικό χώρο* με $N(\Omega) = 50$.

Ας θεωρήσουμε τα *ενδεχόμενα* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{24\}$ του Ω.

---

[3] *Με την έννοια ότι δε μπορεί να τους αποδοθεί πιθανότητα (μη μετρήσιμα ενδεχόμενα).*

Το *Γ* είναι ένα *απλό ενδεχόμενο* αφού έχει μόνο ένα στοιχείο *(δειγματικό σημείο)*, το 24, ενώ τα *A* και *B* είναι *σύνθετα ενδεχόμενα* αφού το καθένα περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία ($N(A) = 3$, $N(B) = 5$).

Σε μια εκτέλεση του πειράματος, το *ενδεχόμενο A* πραγματοποιείται όταν επιλεγεί θετικός ακέραιος μικρότερος του 4 (ή αλλιώς, μικρότερος ή ίσος του 3). Το *B* πραγματοποιείται όταν επιλεγεί θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 και μικρότερος του 7 και το *Γ* πραγματοποιείται όταν επιλεγεί ο αριθμός 24.

(γ) *Επιλέγουμε την καρτέλα ασθενείας ενός παιδιού από αυτά που μεταφέρθηκαν μια ημέρα εφημερίας στο τμήμα επειγόντων περιστατικών του Νοσοκομείου Παίδων «Αγία Σοφία» και καταγράφουμε το φύλο και την ομάδα αίματος του παιδιού.*

Οι ομάδες αίματος είναι τέσσερις *A, B, AB* και *O*. Προφανώς πρόκειται για *πείραμα τύχης* με οκτώ δυνατά αποτελέσματα[4], τα διατεταγμένα ζεύγη

$$(\alpha, A), (\alpha, B), (\alpha, AB), (\alpha, O), (\kappa, A), (\kappa, B), (\kappa, AB), (\kappa, O)$$

όπου, το πρώτο στοιχείο του ζεύγους δίνει το φύλο και το δεύτερο την ομάδα αίματος του παιδιού. Για παράδειγμα, με το ζεύγος (α, B) συμβολίζουμε το αποτέλεσμα *«το παιδί είναι αγόρι και έχει ομάδα αίματος B»* ενώ με το ζεύγος (κ, AB) το αποτέλεσμα *«το παιδί είναι κορίτσι και έχει ομάδα αίματος AB»*. Άρα ο *δειγματικός χώρος* του πειράματος είναι

$$\Omega = \{(\alpha, A), (\alpha, B), (\alpha, AB), (\alpha, O), (\kappa, A), (\kappa, B), (\kappa, AB), (\kappa, O)\}$$

και είναι *πεπερασμένος*.

Ένα παράδειγμα *ενδεχομένου* του *δειγματικού χώρου* Ω είναι το σύνολο

$$\{(\kappa, A), (\kappa, B), (\kappa, O)\}$$

το οποίο (σε μια επανάληψη) πραγματοποιείται αν η καρτέλα που θα επιλεγεί αφορά σε κορίτσι που δεν έχει ομάδα αίματος *AB*.

(δ) *Επαναλαμβανόμενες δοκιμές Bernoulli.*

Πρόκειται για σύνθετο πείραμα το οποίο αποτελείται από επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις μιας *δοκιμής Bernoulli*, δηλαδή, από διαδοχικές εκτελέσεις ενός πειράματος που έχει δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, τέτοια πειράματα κατέχουν σημαντική θέση στη θεωρία πιθανοτήτων γιατί αφενός συναντώνται σε ευρύτατο φάσμα πραγματικών προβλημάτων και αφετέρου γιατί θέτουν ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα. Για παράδειγμα, ο έλεγχος προϊόντων (που επιλέγονται π.χ. από τη γραμμή παραγωγής ενός εργοστασίου) μέχρι να βρεθεί ένα ελαττωματικό είναι ένα πείραμα *επαναλαμβανόμενων δοκιμών Bernoulli*. Επίσης, ο έλεγχος καθενός από 10 προϊόντα για να διαπιστωθεί αν είναι ελαττωματικό ή όχι ή η εξέταση καθενός από 5 παιδιά για να διαπιστωθεί αν έχει ή δεν έχει προσβληθεί από συγκεκριμένο ιό ή η υποβολή ερώτησης σε καθέναν από 50 πολίτες για το αν συμφωνεί ή διαφωνεί με την απαγόρευση του καπνίσματος σε κλειστούς δημόσιους χώρους, είναι σύνθετα πειράματα *επαναλαμβανόμενων δοκιμών Bernoulli*. Ας δούμε δύο τέτοια παραδείγματα πιο αναλυτικά.

(i) *Εξετάζεται (σε ένα Κέντρο Υγείας) καθένα από ν παιδιά για να διαπιστωθεί αν έχει ή δεν έχει προσβληθεί από ένα συγκεκριμένο ιό.*

Πρόκειται προφανώς για *ν* επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις του πειράματος *«εξετάζεται ένα παιδί για να διαπιστωθεί αν έχει ή δεν έχει προσβληθεί από*

[4] *Θυμηθείτε την πολλαπλασιαστική αρχή!*

συγκεκριμένο ιό» το οποίο προφανώς είναι μια *δοκιμή Bernoulli* αφού έχει δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα *«το παιδί έχει προσβληθεί»* και *«το παιδί δεν έχει προσβληθεί»*, αντίστοιχα. Το ένα αποτέλεσμα μιας *δοκιμής Bernoulli* όπως έχουμε πει το ονομάζουμε «επιτυχία» και το άλλο «αποτυχία» και τα συμβολίζουμε, αντίστοιχα, με *«ε»* και *«α»*. Ας θεωρήσουμε ως «επιτυχία» το αποτέλεσμα *«το παιδί έχει προσβληθεί»* και ως «αποτυχία» το αποτέλεσμα *«το παιδί δεν έχει προσβληθεί»*. Ο δειγματικός χώρος Ω του (σύνθετου) πειράματος (εξέταση ν παιδιών) αποτελείται προφανώς από *ν-άδες* της μορφής

$$\underbrace{\alpha\varepsilon\varepsilon\alpha\varepsilon\ldots\varepsilon\alpha\varepsilon}_{\nu\ \tau o\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma}$$

οι οποίες είναι 2^{ν} το πλήθος, δηλαδή, $N(\Omega)=2^{\nu}$ (σκεφθείτε γιατί).

Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο

Α: έχουν προσβληθεί ακριβώς r παιδιά (στα ν).

Προφανώς, το ενδεχόμενο αυτό αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του Ω, δηλαδή από εκείνες τις *ν-άδες* της μορφής

$$\underbrace{\alpha\varepsilon\varepsilon\alpha\varepsilon\ldots\varepsilon\alpha\varepsilon}_{\nu\ \tau o\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma},$$

που περιέχουν ακριβώς *r* το πλήθος *«ε»* και επομένως $\nu-r$ το πλήθος *«α»*. Άραγε, πόσες είναι αυτές οι *ν-άδες;*

Είναι απλό. Αυτές οι *ν-άδες* είναι τόσες, όσες είναι οι ***μεταθέσεις 2 ειδών στοιχείων*** από τα οποία *r* είναι του ενός είδους (*«ε»*) και $\nu-r$ είναι του άλλου είδους (*«α»*).

Επομένως υπάρχουν

$$\frac{\nu!}{r!\cdot(\nu-r)!}=\binom{\nu}{r}$$

διατεταγμένες *ν-άδες* που περιέχουν *r* (ακριβώς) το πλήθος «*ε*» και $\nu-r$ το πλήθος «*α*», δηλαδή

$$N(A)=\binom{\nu}{r}.$$

(Θυμηθείτε ότι το πλήθος των μεταθέσεων k ειδών στοιχείων από τα οποία ν_1 είναι είδους 1, ν_2 είναι είδους 2, ..., ν_k είναι είδους k, δίνεται από τον τύπο $\nu!/(\nu_1!\cdot\nu_2!\cdot\ldots\cdot\nu_k!)$).

(ii) *Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανισθεί για πρώτη φορά κεφαλή*

Πρόκειται προφανώς για σύνθετο *πείραμα τύχης* που αποτελείται από *επαναλαμβανόμενες δοκιμές Bernoulli*. Ας συμβολίσουμε την ένδειξη *«κεφαλή»* με *«κ»* και την ένδειξη *«γράμματα»* με *«γ»*. Εφόσον οι διαδοχικές ρίψεις σταματούν όταν εμφανισθεί για πρώτη φορά «*κεφαλή*», τα αποτελέσματα του πειράματος είναι της μορφής, *κ, γκ, γγκ,...* και επομένως ο *δειγματικός χώρος* του πειράματος είναι ο

$$\Omega=\{\kappa,\ \gamma\kappa,\ \gamma\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\gamma\kappa,\ldots\}$$

και πρόκειται για *αριθμησίμως άπειρο δειγματικό χώρο*.

Ας θεωρήσουμε τα *ενδεχόμενα* $A=\{\kappa\}$, $B=\{\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\kappa\}$, $\Gamma=\{\gamma\gamma\gamma\kappa\}$, $\Delta=\{\kappa,\ \gamma\kappa,\ \gamma\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\kappa\}$ και $E=\{\gamma\gamma\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\gamma\kappa,\ \gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\kappa,\ldots\}$ του Ω.

Το *ενδεχόμενο Ε* πραγματοποιείται όταν απαιτηθούν τουλάχιστον τέσσερις ρίψεις για να εμφανισθεί για πρώτη φορά «κεφαλή», ενώ το *Γ* πραγματοποιείται όταν απαιτηθούν ακριβώς τέσσερις ρίψεις για να εμφανισθεί για πρώτη φορά «κεφαλή». Σκεφθείτε πότε πραγματοποιείται (τι εκφράζει) καθένα από τα ενδεχόμενα *Α, Β* και *Δ*.

***(ε)** Ένας ελεγκτής ποιότητας τροφίμων μετράει και καταγράφει το χρόνο από τη στιγμή που παράγεται ένα νωπό προϊόν συγκεκριμένης εταιρείας (και συντηρείται σε ελεγχόμενες συνθήκες) μέχρι να αρχίσει η αλλοίωσή του.*

Πρόκειται προφανώς για *πείραμα τύχης*, αφού η συγκεκριμένη διαδικασία μέτρησης του χρόνου μέχρι την έναρξη αλλοίωσης ενός προϊόντος της συγκεκριμένης εταιρείας μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες πολλές φορές, ο χρόνος έναρξης της αλλοίωσης (το αποτέλεσμα) δε μπορεί να είναι γνωστός εκ των προτέρων με βεβαιότητα, όμως γνωρίζουμε ότι είναι κάποιος μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε το χρόνο με απόλυτη ακρίβεια, ο χρόνος μέχρι την έναρξη της αλλοίωσης του προϊόντος θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική πραγματική τιμή και άρα ο *δειγματικός χώρος,* Ω, του πειράματος είναι

$$\Omega = \{t : t \geq 0\} = [0, +\infty)$$

και είναι ένας *συνεχής δειγματικός χώρος*.

Το διάστημα $A = (48,\ 72)$ είναι ένα *ενδεχόμενο* του *δειγματικού χώρου* Ω το οποίο, σε μια επανάληψη του πειράματος, πραγματοποιείται αν η αλλοίωση αρχίσει μετά τις 48 ώρες από την παραγωγή του και πριν συμπληρωθούν 72 ώρες από την παραγωγή του.

Το διάστημα $B = [48,\ +\infty)$ είναι επίσης ένα *ενδεχόμενο* του *δειγματικού χώρου* Ω το οποίο, σε μια επανάληψη του πειράματος, πραγματοποιείται αν η αλλοίωση αρχίσει αφού παρέλθουν τουλάχιστον 48 ώρες από την παραγωγή του.

***Σχόλιο 3.1.1:** Στη συνέχεια θα δούμε πολλά παραδείγματα συνεχών δειγματικών χώρων. Πρόκειται για πειράματα τύχης που αναφέρονται στη μέτρηση μηκών, χρόνων, βαρών, θερμοκρασιών, γενικά φυσικών μεγεθών όπως, μέτρηση του ύψους βροχής, του χρόνου μεταξύ δύο συμβάντων, του χρόνου ζωής ενός έμβιου ή ενός προϊόντος, του χρόνου μέχρι την αποθεραπεία ασθενούς, της απόδοσης μιας καλλιέργειας ανά στρέμμα, του ύψους ενός φυτού, της ξηρής μάζας ενός φυτού, της ποσότητας μιας ουσίας που περιέχεται σε ένα προϊόν, της ποσότητας ενός ρύπου στην ατμόσφαιρα, της τιμής ενός αιματολογικού δείκτη π.χ. χοληστερίνης, της ποσότητας κατανάλωσης ενός προϊόντος, της διατομής ή του μήκους ενός εξαρτήματος (π.χ. μιας βίδας), της αντοχής ενός υλικού ή προϊόντος, κτλ.*

Επισημαίνουμε ότι τέτοιες μετρήσεις πρακτικά υπόκεινται σε περιορισμούς που σχετίζονται με την ακρίβεια των οργάνων μέτρησης. Έτσι, αν για παράδειγμα, έχουμε στη διάθεσή μας ένα χρονόμετρο που μετράει με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων τότε ο δειγματικός χώρος στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρητικά είναι βέβαια ο $\Omega = [0,\ +\infty)$, *δηλαδή ένας συνεχής δειγματικός χώρος αφού ο **ακριβής** χρόνος μέχρι την αλλοίωση μπορεί θεωρητικά να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική πραγματική τιμή, όμως πρακτικά, οι τιμές που μπορεί να αποδοθούν είναι οι* $0.00, 0.01, 0.02, 0.03, \ldots$, *δηλαδή, ο **κατά προσέγγιση** χρόνος μέχρι την αλλοίωση, παίρνει ένα αριθμησίμως άπειρο σύνολο τιμών* $\{0.00, 0.01, 0.02, 0.03, \ldots\}$ *το οποίο βέβαια, γίνεται όλο και πιο «πυκνό» όσο η ακρίβεια της μέτρησης βελτιώνεται.*

(στ) *Από τα αρχεία του Εθνικού Αστεροσκοπείου μετράμε (και καταγράφουμε) πόσοι σεισμοί έντασης τουλάχιστον 3 Richter συνέβησαν με επίκεντρο στο Ιόνιο στη διάρκεια ενός έτους (που επιλέγουμε τυχαία).*

Πρόκειται για *πείραμα τύχης* με *δειγματικό χώρο* $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ που είναι *αριθμησίμως άπειρος*.

Ερώτηση: *αν αντί του πόσοι είναι αυτοί οι σεισμοί μετράμε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών σεισμών, ποιος θα είναι τώρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος;*

Σχόλιο 3.1.2: *Σε πολλές περιπτώσεις πειραμάτων τύχης συμβαίνει να κάνουμε την παραδοχή ότι ο δειγματικός χώρος τους είναι αριθμησίμως άπειρο σύνολο. Για παράδειγμα, στο πειράματα τύχης όπου μετράμε και καταγράφουμε τον αριθμό*

1. *των αυτοκινήτων που μπαίνουν στην αττική οδό από τον κόμβο Κύμης με κατεύθυνση την Ελευσίνα 6-9 το πρωί μια (οποιαδήποτε) εργάσιμη ημέρα ή*
2. *των πελατών που μπαίνουν σε ένα κατάστημα μια (οποιαδήποτε) εργάσιμη ημέρα ή*
3. *των κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο 1-2 το μεσημέρι μια (οποιαδήποτε) εργάσιμη ημέρα ή*
4. *των βακτηριδίων σε $1cm^3$ νερού που πήραμε από την κοίτη του ποταμού Καλαμά.*

Θεωρώντας ότι ο δειγματικός χώρος ας πούμε του $1^{ου}$ πειράματος είναι ο $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$, προφανώς κάνουμε την παραδοχή ότι ο μέγιστος αριθμός των αυτοκινήτων που μπορεί να μπουν στην αττική οδό από τον κόμβο Κύμης με κατεύθυνση την Ελευσίνα 6-9 το πρωί μια (οποιαδήποτε) εργάσιμη ημέρα, είναι πρακτικά πολύ μεγάλος ώστε να λαμβάνεται ως ∞. Αν δεν κάνουμε μια τέτοια παραδοχή, τότε ο δειγματικός χώρος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, ..., M\}$, όπου Μ το σημείο κορεσμού που με κάποιο τρόπο μάς είναι γνωστό.

(ζ) *Το 1^o , το 2^o, ... και το 6^o βραβείο ποιότητας ελαιολάδου απονέμονται σε έξι παραγωγούς ελαιολάδου (από ένα βραβείο σε καθέναν παραγωγό).*

Ας συμβολίσουμε τους 6 παραγωγούς με α , β , γ , δ , ε και $\sigma\tau$.

Ένα δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος είναι, για παράδειγμα, το εξής: *1^o βραβείο ο παραγωγός γ , 2^o ο ε , 3^o ο α , 4^o ο δ , 5^o ο $\sigma\tau$ και 6^o ο β*, το οποίο μπορούμε να το συμβολίσουμε (γιατί είναι) ως τη μετάθεση $\gamma\ \varepsilon\ \alpha\ \delta\ \sigma\tau\ \beta$ των στοιχείων του συνόλου $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma\tau\}$ *(το γ στην πρώτη θέση σημαίνει ότι ο γ παραγωγός πήρε το 1^o βραβείο, το ε στη δεύτερη θέση σημαίνει ότι ο ε παραγωγός πήρε το 2^o βραβείο, κ.ο.κ.)* .

Πρόκειται επομένως για ένα *πείραμα τύχης* του οποίου ο *δειγματικός χώρος* αποτελείται από όλες τις *μεταθέσεις* των στοιχείων του συνόλου $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma\tau\}$ άρα είναι ένας *πεπερασμένος δειγματικός χώρος* με $6! = 720$ το πλήθος *δειγματικά σημεία*[5]. Βέβαια, δεν είναι εύκολο να καταγράψουμε ένα προς ένα όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, όμως όπως είδαμε, **μπορούμε να τα περιγράψουμε και γνωρίζουμε πόσα είναι**. Στη συνέχεια, όταν θα μάθουμε να υπολογίζουμε

[5] *Έχουμε μάθει να απαριθμούμε;*

πιθανότητες ενδεχομένων, θα δούμε πόσο χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε τον πληθικό αριθμό του *δειγματικού χώρου* και των *ενδεχομένων* του που μελετάμε.

Ας θεωρήσουμε το *ενδεχόμενο Α: «ο παραγωγός* α *παίρνει ένα από τα τρία πρώτα βραβεία»* και το *ενδεχόμενο Β: «ο παραγωγός* β *παίρνει το* 2^o *βραβείο»*. Μπορείτε να δείξετε ότι $N(A) = 3 \cdot 5! = 360$ και $N(B) = 120$; (είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα απαρίθμησης, προσπαθήστε).

(η) *Επιλέγουμε από τα αρχεία του Δήμου Αθηναίων την οικογενειακή μερίδα μιας (οποιασδήποτε) τρίτεκνης οικογένειας και καταγράφουμε πόσα από τα τρία παιδιά της οικογένειας είναι αγόρια.*

Πρόκειται για *πείραμα τύχης*. Το σύνολο

$$\Omega_1 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

ασφαλώς είναι ένας κατάλληλος *δειγματικός χώρος* του πειράματος αφού το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ο αριθμός των αγοριών μιας τρίτεκνης οικογένειας η οποία προφανώς μπορεί να έχει ή κανένα, ή ένα, ή δύο ή τρία αγόρια.

Όμως, κατάλληλος *δειγματικός χώρος* αυτού του πειράματος είναι προφανώς και το σύνολο

$$\Omega_2 = \{\kappa\kappa\kappa,\ \alpha\kappa\kappa,\ \kappa\alpha\kappa,\ \kappa\kappa\alpha,\ \alpha\alpha\kappa,\ \alpha\kappa\alpha,\ \kappa\alpha\alpha,\ \alpha\alpha\alpha\}$$

όπου τώρα, ως αποτέλεσμα/δειγματικό σημείο του πειράματος καταγράφουμε το φύλο και τη σειρά γέννησης των παιδιών. Για παράδειγμα, το δειγματικό σημείο *«κακ»* σημαίνει ότι η οικογένεια έχει ένα αγόρι και ότι το πρώτο παιδί που γεννήθηκε είναι κορίτσι, το δεύτερο αγόρι και το τρίτο κορίτσι.

Δηλαδή, σε ένα *πείραμα τύχης* μπορεί να έχουμε εναλλακτικούς τρόπους για να περιγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματά του, άρα και τον *δειγματικό χώρο* του. Ασφαλώς, και τα ενδεχόμενα πρέπει να ορίζονται σε αντιστοιχία με τον τρόπο περιγραφής των αποτελεσμάτων του πειράματος. Για παράδειγμα, το ενδεχόμενο *«η οικογένεια έχει ακριβώς δύο αγόρια»*, ενώ όταν αναφερόμαστε στο δειγματικό χώρο Ω_1 είναι το *απλό ενδεχόμενό* του $A = \{2\}$, όταν αναφερόμαστε στο δειγματικό χώρο Ω_2 είναι το *σύνθετο ενδεχόμενό* του $A = \{\alpha\alpha\kappa,\ \alpha\kappa\alpha,\ \kappa\alpha\alpha\}$. Προσοχή λοιπόν! Πολλά σφάλματα και παράδοξα στη μελέτη προβλημάτων πιθανοτήτων, οφείλονται σε παρανοήσεις που σχετίζονται με τον τρόπο ορισμού του δειγματικού χώρου και την περιγραφή των κατάλληλων ενδεχομένων.

Παρατηρείστε ότι αν το πείραμα ήταν «*επιλέγουμε από τα αρχεία του Δήμου Αθηναίων την οικογενειακή μερίδα μιας (οποιασδήποτε) τρίτεκνης οικογένειας και καταγράφουμε κατά σειρά γέννησης το φύλο κάθε παιδιού»,* τότε προφανώς κατάλληλος *δειγματικός χώρος* του πειράματος θα ήταν μόνο ο Ω_2.

■

3.2 Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

Τα *ενδεχόμενα*, όπως είδαμε, ορίζονται ως σύνολα και συγκεκριμένα ως υποσύνολα του συνόλου των *δειγματικών σημείων,* δηλαδή του *δειγματικού χώρου* ενός *πειράματος τύχης*. Αυτό σημαίνει ότι τόσο οι πρωταρχικές για τη θεμελίωση της *Θεωρίας Πιθανοτήτων* έννοιες, ***«δειγματικό σημείο»*** και ***«δειγματικός χώρος»***, όσο και η έννοια του ***«ενδεχομένου»*** που προκύπτει από αυτές, συνδέονται με την έννοια του συνόλου και επομένως «για να κάνουμε πιθανότητες» έχουμε στη διάθεσή μας ένα κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο, αυτό της *Θεωρίας Συνόλων*. Έτσι, μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ ενδεχομένων (από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα) αλλά και να εκφράσουμε σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων, εργαζόμενοι με γνωστά από την *άλγεβρα συνόλων* εργαλεία. Επίσης, για την εποπτική αναπαράσταση *δειγματικών χώρων* και *ενδεχομένων* μπορούμε, όπως και στη θεωρία συνόλων, να χρησιμοποιούμε τα γνωστά *διαγράμματα Venn*.

Ας θυμηθούμε λοιπόν κάποια στοιχεία *άλγεβρας συνόλων* (μόνο τα αναγκαία για τη συνέχεια) διατυπωμένα στη γλώσσα των πιθανοτήτων με όρους πραγματοποίησης (εμφάνισης) ενδεχομένων.

Έστω δύο ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. Λέμε ότι το ενδεχόμενο Α ***συνεπάγεται*** *το ενδεχόμενο Β ή ότι το ενδεχόμενο Α είναι* ***υποσύνολο*** *του ενδεχομένου Β, αν όταν πραγματοποιηθεί το Α πραγματοποιείται και το Β (Σχήμα 3.2.1). Η σχέση αυτή συμβολίζεται με* $A \subseteq B$. *Αν ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν επιπλέον και το Β είναι υποσύνολο του Α (*$B \subseteq A$*) τότε λέμε ότι* ***τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ίσα*** *και η σχέση αυτή συμβολίζεται με* $A = B$.

Συμπλήρωμα *ή* ***αντίθετο (complement)*** *ενός ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το Α (Σχήμα 3.2.2) και συμβολίζεται με* A' *ή* $\overline{A}$ *ή* A^c.

Είναι φανερό ότι το *συμπλήρωμα/αντίθετο* του A' είναι το *Α*, γι' αυτό τα *Α* και A' ονομάζονται ***αντίθετα*** *ενδεχόμενα. Τα* $\varnothing$ και *Ω* είναι προφανώς *αντίθετα ενδεχόμενα.*

Ένωση (union) *δύο ενδεχομένων Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β (Σχήμα 3.2.3). Συμβολίζεται με* $A \cup B$.

Είναι προφανές ότι

$$A \cup \varnothing = A,\ A \cup A = A,\ A \cup \Omega = \Omega,\ A \cup A' = \Omega.$$

Επίσης, αν $A \subseteq B$ τότε προφανώς

$$A \cup B = B.$$

Η πράξη της *ένωσης δύο ενδεχομένων* επεκτείνεται εύκολα για τρία ή περισσότερα ενδεχόμενα. Έτσι, *ένωση των ενδεχομένων* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα* A_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ *και συμβολίζεται με* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$.

Ανάλογα ορίζεται η *ένωση άπειρου πλήθους ενδεχομένων*, $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ και συμβολίζεται με $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Τομή *ή* ***γινόμενο (intersection)*** *δύο ενδεχομένων Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Α, Β (Σχήμα 3.2.4). Συμβολίζεται με* $A \cap B$ *ή με* AB.

Είναι προφανές ότι

$$A\varnothing = \varnothing\,,\ AA = A\,,\ A\Omega = A\,,\ AA' = \varnothing\,.$$

Επίσης, αν $A \subseteq B$ τότε προφανώς

$$AB = A\,.$$

Η πράξη της *τομής δύο ενδεχομένων* επεκτείνεται εύκολα για τρία ή περισσότερα ενδεχόμενα. Έτσι, *τομή των ενδεχομένων* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα όλα τα ενδεχόμενα* A_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ *και συμβολίζεται με*

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i \ \text{ ή με } \ A_1 A_2 \ldots A_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} A_i\,.$$

Ανάλογα ορίζεται η *τομή άπειρου πλήθους ενδεχομένων* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ και συμβολίζεται με $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ή με $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

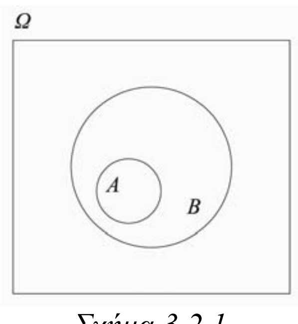
Δύο ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ***ξένα ενδεχόμενα (disjoint events)*** *αν δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως (Σχήμα 3.2.5), δηλαδή αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου, ή αλλιώς, αν η τομή τους είναι το αδύνατο ενδεχόμενο (*$AB = \varnothing$*), γι' αυτό ονομάζονται και* ***ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα (mutually exclusive)***.

Έστω δύο ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. ***Διαφορά (difference)*** *του ενδεχομένου Β από το ενδεχόμενο Α, είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το Α και δεν πραγματοποιηθεί το Β (Σχήμα 3.2.6). Συμβολίζεται με* $A - B$ *και προφανώς ισχύει,* $A - B = AB'$.

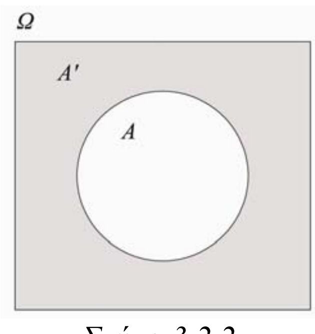
Αν $A \subseteq B$ τότε $A - B = \varnothing$ (σκεφθείτε γιατί).

Συμμετρική Διαφορά (symmetric difference) *δύο ενδεχομένων Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί μόνο ένα (ακριβώς ένα) από τα ενδεχόμενα Α, Β, δηλαδή όταν πραγματοποιηθεί ένα από τα Α, Β χωρίς να πραγματοποιηθεί το άλλο (Σχήμα 3.2.7). Συμβολίζεται με* $A \Delta B$ ή με $A \oplus B$. *Προφανώς ισχύει*

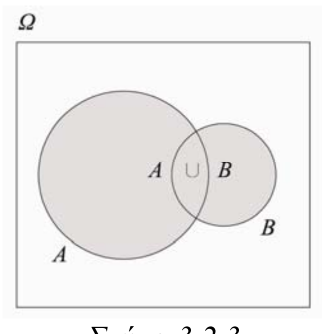
$$A \Delta B = AB' \cup BA'\,.$$



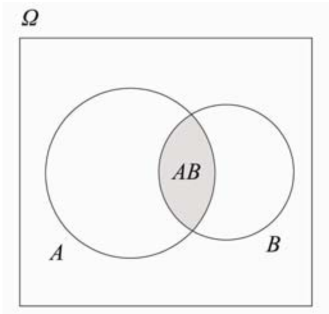
Σχήμα 3.2.1
$A \subseteq B$



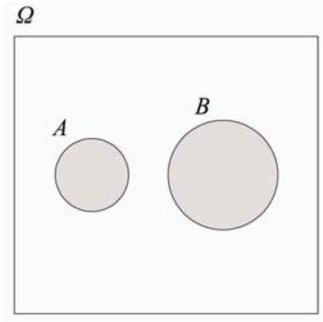
Σχήμα 3.2.2
Συμπληρωματικό ενδεχόμενο



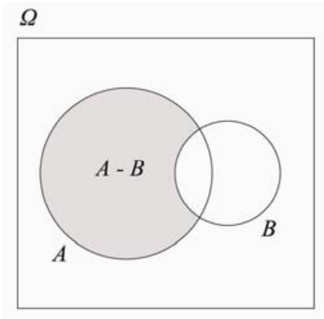
Σχήμα 3.2.3
Ένωση δύο ενδεχομένων



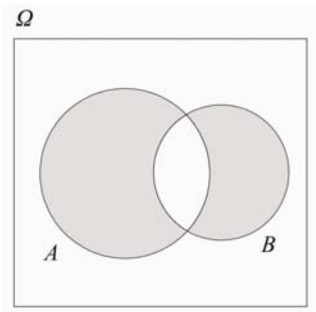
Σχήμα 3.2.4
Τομή δύο ενδεχομένων



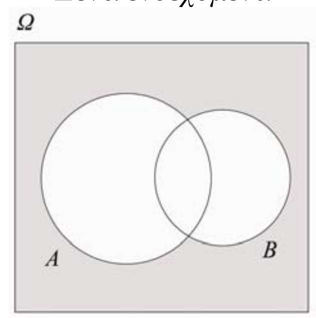
Σχήμα 3.2.5
Ξένα ενδεχόμενα



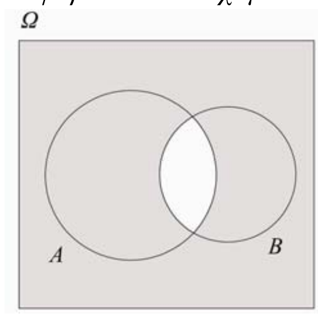
Σχήμα 3.2.6
Διαφορά δύο ενδεχομένων



Σχήμα 3.2.7
Συμμετρική διαφορά δύο ενδεχομένων



Σχήμα 3.2.8
Συμπλήρωμα της ένωσης δύο ενδεχομένων



Σχήμα 3.2.9
Συμπλήρωμα της τομής δύο ενδεχομένων

Για την *ένωση* και την *τομή* ενδεχομένων ισχύουν επίσης, η *αντιμεταθετική*, η *προσεταιριστική* και η *επιμεριστική* ιδιότητα.

Ιδιότητα	*Πράξεις*	
Αντιμεταθετική	$A \cup B = B \cup A$	$AB = BA$
Προσεταιριστική	$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
Επιμεριστική	$A \cup (B\Gamma) = (A \cup B)(A \cup \Gamma)$ και $A(B \cup \Gamma) = (AB) \cup (A\Gamma)$	

Τέλος, για το *συμπλήρωμα* της *ένωσης* και αντίστοιχα της *τομής* δύο *ενδεχομένων A, B,* αποδεικνύονται οι παρακάτω πολύ χρήσιμοι, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, τύποι που είναι γνωστοί ως *Τύποι De Morgan.*

Τύποι De Morgan: *Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, τότε αποδεικνύεται ότι*

$$(A \cup B)' = A'B' \quad \textit{και} \quad (AB)' = A' \cup B'.$$

Το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$*, δηλαδή, το συμπλήρωμα της ένωσης δύο ενδεχομένων A, B, πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιηθεί ούτε το A ούτε το B (Σχήμα 3.2.8) ενώ το ενδεχόμενο* $(AB)'$*, δηλαδή, το συμπλήρωμα της τομής δύο ενδεχομένων A, B, πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A, B (Σχήμα 3.2.9).*

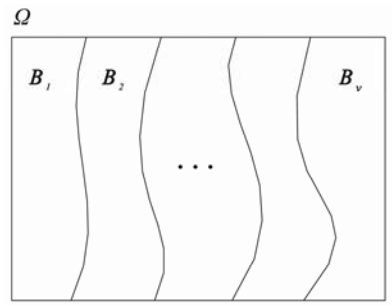
Οι τύποι *De Morgan* γενικεύονται για $\nu > 2$ ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ (αλλά και για άπειρα το πλήθος ενδεχόμενα).

$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)' = A_1' A_2' \ldots A_\nu'$ και $(A_1 A_2 \ldots A_\nu)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_\nu'$.

Διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω: Μια οικογένεια *ν* ενδεχομένων $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ του δειγματικού χώρου *Ω* ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται ***διαμέριση (partition)*** του *Ω*, αν

$$B_iB_j = \varnothing \text{ (για κάθε } i \neq j \text{) και } B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega$$

δηλαδή, αν τα ενδεχόμενα $B_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι όλος ο δειγματικός χώρος *(Σχήμα 3.2.10)*. Αυτό σημαίνει ότι σε μια εκτέλεση του πειράματος, πάντοτε πραγματοποιείται ένα από τα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ (αφού $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega$) και μάλιστα ακριβώς ένα (αφού $B_iB_j = \varnothing$ για κάθε $i \neq j$).



Σχήμα 3.2.10

Διαμέριση $\{B_1, B_2, \ldots, B_\nu\}$ *του Ω*

$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega$ & $B_iB_j = \varnothing$

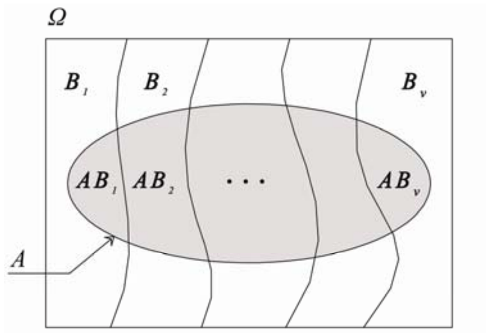
Αν *A* ένα (οποιοδήποτε) ενδεχόμενο του *Ω* τότε προφανώς *(δες και Σχήμα 3.2.11)*

$$A = A\Omega = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu) = AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_\nu$$

και

$$(AB_i)(AB_j) = A(B_iB_j) = A\varnothing = \varnothing \text{ για κάθε } i \neq j .$$

Δηλαδή, τα ενδεχόμενα $AB_1, AB_2, \ldots, AB_\nu$ αποτελούν μια *διαμέριση* του *A*. Αυτό σημαίνει ότι όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο *A,* πραγματοποιείται σε συνδυασμό με ακριβώς ένα (μόνο ένα) από τα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$.



Σχήμα 3.2.11

Διαμέριση $\{AB_1, AB_2, \ldots, AB_\nu\}$ του *ενδεχομένου A*

$AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_\nu = A$ & $(AB_i)(AB_j) = \varnothing$

■

Παρατήρηση 3.2.1 *Μια ειδική περίπτωση διαμέρισης του δειγματικού χώρου Ω παίρνουμε αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο, έστω B, του Ω και το συμπλήρωμά του B΄. Είναι φανερό ότι τα B και B΄ αποτελούν μια διαμέριση του Ω αφού*

$$B \cup B' = \Omega \quad \textit{και} \quad BB' = \varnothing .$$

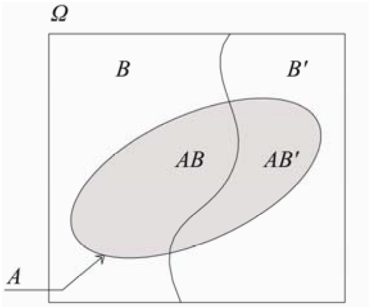
Έτσι αν A ένα άλλο (οποιοδήποτε) ενδεχόμενο του Ω τότε με βάση όσα αναφέραμε προηγουμένως (δες και Σχήμα 3.2.12 και 3.2.13) τα ενδεχόμενα AB και AB΄ είναι ξένα και ισχύει

$$A = AB \cup AB'$$

δηλαδή, αν σε μια εκτέλεση του πειράματος πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, ή αλλιώς, αν το αποτέλεσμα βρίσκεται στο ενδεχόμενο A τότε είτε θα βρίσκεται και στο ενδεχόμενο B είτε δε θα βρίσκεται. Αντίστοιχα, τα ενδεχόμενα BA΄ και AB είναι ξένα και ισχύει

$$B = BA \cup BA'$$

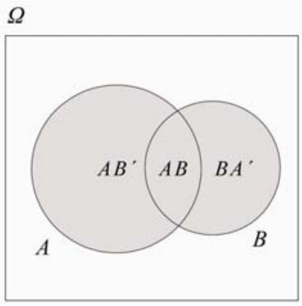
δηλαδή, αν το αποτέλεσμα βρίσκεται στο ενδεχόμενο B τότε είτε θα βρίσκεται και στο ενδεχόμενο A είτε δε θα βρίσκεται.



Σχήμα 3.2.12
Διαμέριση $\{B, B'\}$ του Ω και $\{AB, AB'\}$ του A

Επίσης, προφανώς (δες και Σχήμα 3.2.12 & 3.2.13) ισχύει ότι

$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'.$$



Σχήμα 3.2.13
Διαμέριση $\{AB', AB, BA'\}$ της ένωσης
$A \cup B$ δύο ενδεχομένων A, B

Στη συνέχεια, όταν θα μάθουμε να υπολογίζουμε πιθανότητες ενδεχομένων, θα διαπιστώσουμε πόσο πολύ διευκολύνει τον υπολογισμό πιθανοτήτων η διαμέριση του δειγματικού χώρου όπως και η διαμέριση ενδεχομένων του σε δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα.

■

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα που θα βοηθήσουν να εξοικειωθούμε με τις πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και τις ιδιότητές τους.

Παράδειγμα 3.2.1: α) *Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ του δειγματικού χώρου $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 50\}$ του πειράματος τύχης που συζητήσαμε στο Παράδειγμα 3.1.1(β) και έστω ότι σε μια επανάληψη του πειράματος το αποτέλεσμα είναι 1, δηλαδή, ότι από τους θετικούς ακέραιους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 50 επελέγη το 1.*

Στην περίπτωση αυτή, πραγματοποιείται το *ενδεχόμενο Α* αφού $1 \in A$ και δεν πραγματοποιείται το *ενδεχόμενο Β*, αφού $1 \notin B$. Επίσης, πραγματοποιείται και

- *η ένωση $A \cup B$ (αφού για να πραγματοποιηθεί η ένωση δύο ενδεχομένων αρκεί η πραγματοποίηση του ενός)*
- *η διαφορά, $A - B$, του Β από το Α (από τον ορισμό της διαφοράς ενδεχομένων)*
- *το συμπλήρωμα B' του Β (από τον ορισμό του συμπληρώματος ενδεχομένου)*

ενώ δεν πραγματοποιείται (σκεφθείτε γιατί)

- *το συμπλήρωμα A' του Α*
- *η τομή AB*
- *το συμπλήρωμα $(A \cup B)'$ της ένωσης $A \cup B$*
- *το συμπλήρωμα $(A - B)'$ της διαφοράς $A - B$*

Ας επαληθεύσουμε (παρότι δεν είναι απαραίτητο) αυτά τα συμπεράσματα. Πράγματι,
$1 \in A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $1 \in A - B = \{1\}$, $1 \in B' = \{1,7,8,...,50\}$,
$1 \notin A' = \{4,5,...,50\}$, $1 \notin AB = \{2,3\}$, $1 \notin (A \cup B)' = \{7,8,...,50\}$,
$1 \notin (A - B)' = \{2,3,...,50\}$.

β) *Έστω τα ενδεχόμενα $A = (48,\ 72)$ και $B = [48,\ +\infty)$ του δειγματικού χώρου $\Omega = \{t : t \geq 0\} = [0,\ +\infty)$ του πειράματος τύχης που συζητήσαμε στο Παράδειγμα 3.1.1(ε).*

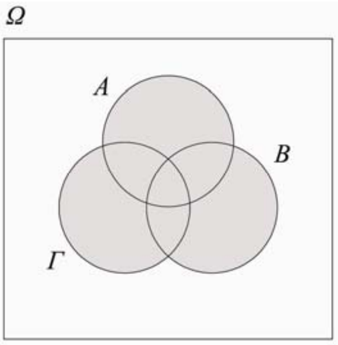
Παρατηρείστε ότι $A \subseteq B$, $A \cup B = [48,\ +\infty) = B$, $AB = (48,\ 72) = A$, $A - B = \varnothing$.

Έστω επίσης τα ενδεχόμενα $A_1,\ A_2, \dots, A_k$ του $\Omega = [0,\ +\infty)$ με $A_i = \{t : 0 \leq t < 1/i\}$, $i = 1,2,...,k$.

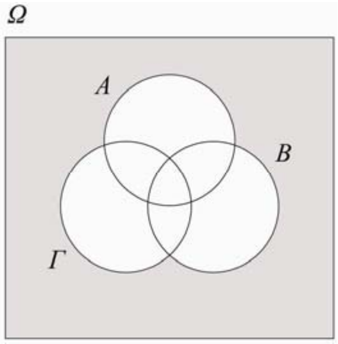
Για τα ενδεχόμενα $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ και $A_1 A_2 \dots A_k$ ισχύει αντίστοιχα, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = A_1$ και $A_1 A_2 ... A_k = A_k$. Σκεφθείτε γιατί.
(Παρατηρείστε ότι $A_1 = [0,\ 1)$, $A_2 = [0,\ 1/2)$, $A_3 = [0,\ 1/3)$ κ.ο.κ).

■

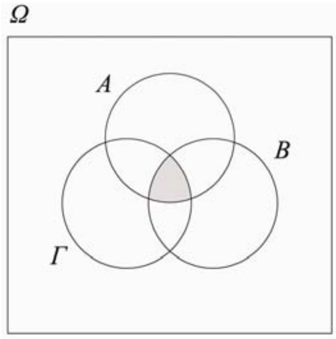
Παράδειγμα 3.2.2: *Έστω Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Στα Σχήματα 3.2.14 φαίνεται πώς τα παρακάτω ενδεχόμενα (α)-(στ) μπορούν να εκφρασθούν με χρήση πράξεων μεταξύ των Α, Β, Γ.*
(α) Τουλάχιστον ένα από τα Α, Β, Γ πραγματοποιείται.
(β) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β, Γ.
(γ) Και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ πραγματοποιούνται.
(δ) Πραγματοποιούνται το πολύ δύο από τα Α, Β, Γ.
(ε) Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α, Β, Γ.
(στ) Πραγματοποιείται το Α και δεν πραγματοποιείται ούτε το Β ούτε το Γ.



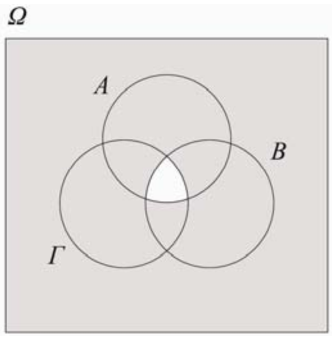
α. $A \cup B \cup \Gamma$



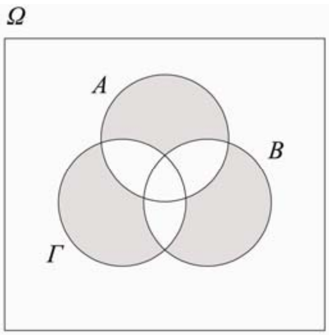
β. $(A \cup B \cup \Gamma)' = A'B'\Gamma'$



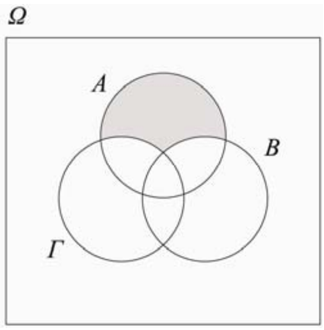
γ. $AB\Gamma$



δ. $(AB\Gamma)'$



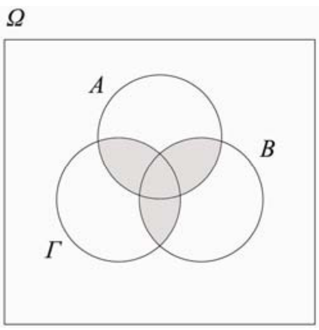
ε. $AB'\Gamma' \cup A'B\Gamma' \cup A'B'\Gamma$



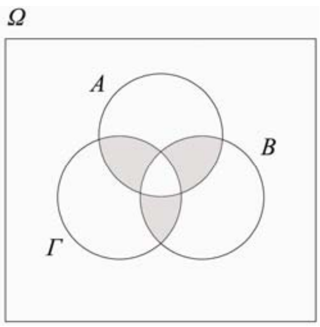
στ. $A(B \cup \Gamma)' = AB'\Gamma'$

Σχήμα 3.2.14
Πράξεις μεταξύ τριών ενδεχομένων

Ερώτηση: *Σκεφθείτε ποια ενδεχόμενα εκφράζουν οι σκιασμένες περιοχές στα διαγράμματα Venn που φαίνονται στα Σχήματα 3.2.15 και 3.2.16.*



Σχήμα 3.2.15



Σχήμα 3.2.16

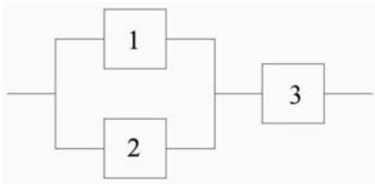
■

Παράδειγμα 3.2.3: Ας θεωρήσουμε το *ενδεχόμενο Α: «ο παραγωγός α παίρνει ένα από τα τρία πρώτα βραβεία»* και το *ενδεχόμενο Β: «ο παραγωγός β παίρνει το 2^o βραβείο» του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης που συζητήσαμε στο Παράδειγμα 3.1.1(ζ).*

Περιγράψτε τα ενδεχόμενα AB και $A \cup B$ και δείξτε ότι $N(AB) = 2 \cdot 4! = 48$ και $N(A \cup B) = 432$.

■

Παράδειγμα 3.2.4: *Στο διάγραμμα που ακολουθεί, φαίνεται σχηματικά το σύστημα λήψης απόφασης σε μια γενική διεύθυνση ενός οργανισμού (πρόκειται για τμήμα του οργανογράμματος του οργανισμού). Ο γενικός διευθυντής εγκρίνει μια εισήγηση εφόσον* *συμφωνήσει τουλάχιστον μια από τις διευθύνσεις 1, 2 καθώς και η διεύθυνση 3 (πρόκειται για τη διεύθυνση που καλύπτει το οικονομικό κόστος των εισηγήσεων).*



Σχήμα 3.2.17
Μια εισήγηση εγκρίνεται εφόσον συμφωνήσει τουλάχιστον
μια από τις διευθύνσεις 1, 2 και η διεύθυνση 3

Εδώ η διαδικασία (το πείραμα) που επαναλαμβάνεται είναι *«κατατίθεται μια εισήγηση προς έγκριση και καταγράφεται ποια διεύθυνση συμφωνεί και ποια δε συμφωνεί με την εισήγηση»*. Αν συμβολίσουμε τη «συμφωνία» με «1» και τη «μη συμφωνία» με «0», το αποτέλεσμα μπορούμε να το συμβολίσουμε με μια διατεταγμένη τριάδα από «1» και «0» όπου η θέση στην τριάδα δείχνει τη διεύθυνση ($1^η$ θέση αντιστοιχεί στην διεύθυνση 1, $2^η$ θέση στην διεύθυνση 2 και $3^η$ θέση στην διεύθυνση 3). Έτσι, για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα 101 περιγράφει το αποτέλεσμα: *η διεύθυνση 1 συμφωνεί, η 2 διαφωνεί και η 3 συμφωνεί.*

Ένας κατάλληλος επομένως *δειγματικός χώρος* του πειράματος είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων $\alpha_1\alpha_2\,\alpha_3$, όπου $\alpha_i = 0$ ή1 για κάθε $i = 1,2,3$. Δηλαδή,

$$\Omega = \{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 : \alpha_i \in \{0,1\},\, i = 1,2,3\}.$$

Πρόκειται για *πεπερασμένο δειγματικό χώρο με* $N(\Omega) = 8$ (σκεφθείτε γιατί). Αν μας ενδιαφέρει, μπορούμε με ένα συστηματικό τρόπο, να καταγράψουμε αναλυτικά όλα τα στοιχεία του Ω. Κατασκευάζοντας κατάλληλο δενδρόγραμμα, επαληθεύστε ότι

$$\Omega = \{111,110,101,100,011,010,001,000\}.$$

Έστω το ενδεχόμενο

Ε: η εισήγηση εγκρίνεται.

Με βάση τη διαδικασία λήψης αποφάσεων και τον τρόπο που ορίσαμε και συμβολίσαμε τα αποτελέσματα του πειράματος, το ενδεχόμενο *Ε* περιλαμβάνει τις διατεταγμένες τριάδες που στις δύο πρώτες θέσεις έχουν τουλάχιστον ένα «1» και στην τρίτη θέση «1». Δηλαδή,

$$E = \{111,101,011\}.$$

Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα

$$\Sigma_i : \text{η διεύθυνση } i = 1,2,3 \text{ συμφωνεί}$$

τότε το *Ε* μπορεί να εκφρασθεί με πράξεις μεταξύ των Σ_i ως εξής (σκεφθείτε γιατί):

$$E = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)\Sigma_3.$$

Σκεφθείτε επίσης, πώς μπορεί να εκφρασθεί με πράξεις μεταξύ των Σ_i το ενδεχόμενο: *η εισήγηση δεν εγκρίνεται.*

■

Σημείωση 3.2.1: *Συνδεσμολογίες όπως αυτές του Σχήματος 3.2.17 μπορεί να αφορούν σε ένα σύστημα μεταφοράς νερού, πετρελαίου, φυσικού αερίου, ηλεκτρικής ενέργειας, ηλεκτρονικού ή μαγνητικού σήματος, κ.ά. Δηλαδή, σε ένα δίκτυο/σύστημα, μπορεί να διασυνδέονται κατά περίπτωση, αντλίες μεταφοράς κάποιου υγρού ή αερίου, σταθμοί ηλεκτρικής ενέργειας, διακόπτες, πομποί, κεραίες, κτλ. που λειτουργούν ή δε λειτουργούν, δηλαδή που έχουν δύο καταστάσεις (ή και περισσότερες). Ορίζεται βέβαια* *και η συνθήκη λειτουργίας του συστήματος. Ο τρόπος που εργαζόμαστε σε τέτοια προβλήματα, φυσικά δεν επηρεάζεται από το είδος των εξαρτημάτων που διασυνδέονται (δες και την Άσκηση 3.3).*

■

Στη γενική επισκόπηση που κάναμε στο *1ο Κεφάλαιο*, αναφέραμε ότι αντικείμενο της *Θεωρίας Πιθανοτήτων* είναι ***η έρευνα των νόμων που διέπουν τα τυχαία φαινόμενα και πειράματα***. Με την εισαγωγή των εννοιών, ***πείραμα τύχης, δειγματικό σημείο, δειγματικός χώρος*** και ***ενδεχόμενο***, που μόλις γνωρίσαμε, δημιουργείται το πλαίσιο εντός του οποίου γίνεται η *«διερεύνηση των νόμων που διέπουν το τυχαίο*». Ας δούμε λοιπόν πώς.

3.3 Η Έννοια της Πιθανότητας

Σε ένα *πείραμα τύχης* δεν είμαστε ποτέ βέβαιοι αν σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του ένα *ενδεχόμενο Α* του *δειγματικού χώρου* του *Ω*, θα εμφανισθεί ή δε θα εμφανισθεί. Ενδέχεται να εμφανισθεί αλλά ενδέχεται και να μην εμφανισθεί. Βέβαια, ένα εύλογο ερώτημα που αβίαστα προκύπτει είναι το εξής: σε αυτές τις συνθήκες αβεβαιότητας, ***υπάρχει κάποιος τρόπος να ορίσουμε ένα μέτρο «προσδοκίας» για την εμφάνιση του ενδεχομένου Α; Μπορούμε δηλαδή, και πώς, σε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό που να εκφράζει το «βαθμό βεβαιότητας» που έχουμε για την εμφάνισή του;***

Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε μέσα από μια μακρά, όμως ενδιαφέρουσα και δημιουργική πορεία. Παρότι οι προσπάθειες άρχισαν από τον 15ο αιώνα, η θεμελίωση της *Θεωρίας Πιθανοτήτων* ολοκληρώθηκε πολύ πρόσφατα, τον 20ο αιώνα (μόλις το 1933) και χρειάσθηκε γι' αυτό πολύς μόχθος πολλών γενεών μαθηματικών[6]. Από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με προβλήματα υπολογισμού πιθανοτήτων ήταν οι Ιταλοί μαθηματικοί *Paccioli, Tartaglia, Peverone, Cardano* αλλά και ο *Galileo Galilei (το 1494 ο Paccioli έθεσε το πρόβλημα των μεριδίων με το οποίο ασχολήθηκαν και οι Tartaglia και Peverone το 1556 και το 1581 αντίστοιχα, όλοι όμως απέτυχαν να δώσουν σωστή λύση[7]. Επίσης ο Cardano σε εργασία που δημοσιεύθηκε μετά το θάνατό του (το 1663) αλλά και ο Galileo Galilei υπολόγισαν πιθανότητες σε προβλήματα τυχερών παιχνιδιών με ζάρια)*. Συστηματικά, με τη διατύπωση γενικών μεθόδων υπολογισμού πιθανοτήτων, ασχολήθηκαν (στα μέσα του 17ου αιώνα) οι διάσημοι Γάλλοι μαθηματικοί *Pascal* και *Fermat* ενώ το πρώτο βιβλίο πιθανοτήτων, το οποίο και επηρέασε την εξέλιξη της θεωρίας αλλά κέντρισε και το ενδιαφέρον μεγάλων μαθηματικών και προκάλεσε την ενασχόλησή τους με προβλήματα πιθανοτήτων, δημοσιεύθηκε το 1657 από τον Ολλανδό μαθηματικό, αστρονόμο και φυσικό *Huyghens,* με τον λατινικό τίτλο «*De ratiociniis in ludo aleae»*[8]. Στη συνέχεια, σημαντική ήταν η συμβολή (σε θεμελιώδη ζητήματα) των *Jacob* (*James/Jacques*) *Bernoulli* και *Abraham de Moivre* αλλά και του *Pierre-Simon Laplace* ο οποίος εισήγαγε νέες ιδέες για το μαθηματικό λογισμό πιθανοτήτων και δημοσίευσε (το

---

[6] Αναμενόμενες οι δυσκολίες αφού η αναζήτηση νόμων που διέπουν το τυχαίο δεν ήταν (και δεν είναι) και το πιο απλό εγχείρημα! Δε συμφωνείτε;

[7] Τα επιτεύγματα (ο πλούτος) του ανθρώπινου πολιτισμού κατακτήθηκαν (και κατακτώνται) με συνεχή προσπάθεια, μόχθο, δυσκολίες, αλλά και λάθη, αποτυχίες και απογοητεύσεις. Βέβαια, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα το λάθος απαγορεύεται και τιμωρείται αυστηρά ενώ τα σχολικά εγχειρίδια, κατά κανόνα, δίνουν την ψευδή εικόνα ότι οι κατακτήσεις του ανθρώπινου πολιτισμού προέκυψαν, περίπου, … «εξ επιφοιτήσεως». Με το λάθος να προβάλλει και να επικρέμεται ως απειλή, πώς θα τολμήσουν άραγε οι νέοι να αμφισβητούν και να αμφιβάλλουν ώστε να μάθουν να σκέφτονται και να ενεργούν δημιουργικά;

[8] «On Reasoning in Games of Chance»

1812) το βιβλίο-σταθμό στην εξέλιξη της θεωρίας των πιθανοτήτων *«Theorie Analytique de Probabilites»*. Στην εξέλιξη της θεωρίας αλλά και στη διεύρυνση των εφαρμογών των πιθανοτήτων κατά τον 19^{o} και τον 20^{o} αιώνα, εξέχουσα θέση κατέχουν οι *Gauss*, *Chebysev, Markov, Liapounov, Mises* και *Kolmogorov*. Στον *Kolmogorov* οφείλεται και η αξιωματική θεμελίωση της *Θεωρίας Πιθανοτήτων*.

Στη μακρά αυτή πορεία θεμελίωσης και ανάπτυξης της *Θεωρίας Πιθανοτήτων*, η έννοια της πιθανότητας προσεγγίσθηκε με περισσότερους από έναν τρόπους και δόθηκαν τρεις ορισμοί, γνωστοί ως ***κλασικός, στατιστικός*** και ***αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας*** αντίστοιχα, όχι γιατί στην πορεία διαπιστώνονταν ανακολουθίες ή αντιφάσεις, αλλά ως ανταπόκριση στην ανάγκη γενίκευσης και (περισσότερης) μαθηματικής αυστηρότητας[9]. Ας δούμε με τη σειρά που προτάθηκαν αυτούς τους τρεις ορισμούς.

3.3.1 Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Ας θεωρήσουμε ότι για το *δειγματικό χώρο Ω*, ενός *πειράματος τύχης* ισχύει ότι:

(1) είναι ***πεπερασμένος*** με έστω *N* το πλήθος *δειγματικά σημεία (αποτελέσματα)*, δηλαδή, έστω ότι $N(\Omega) = N$ και

(2) μεταξύ των *N δειγματικών σημείων* του υπάρχει μια εγγενής συμμετρικότητα, με την έννοια ότι δεν υπάρχει λόγος να δεχθούμε ότι κάποιο *δειγματικό σημείο* είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό από τα υπόλοιπα, και έτσι μπορούμε να τα θεωρήσουμε όλα ***εξίσου πιθανά (ισοπίθανα)***.

Έστω επίσης ένα *ενδεχόμενο A* του Ω, με *k δειγματικά σημεία,* δηλαδή, με $N(A) = k$.

Το *ενδεχόμενο A* πραγματοποιείται όταν από τα *N* δυνατά αποτελέσματα του πειράματος εμφανισθεί οποιοδήποτε από τα *k* αποτελέσματα που περιέχονται στο *A*. Δηλαδή, το *A* πραγματοποιείται στις *k* από τις *N* δυνατές περιπτώσεις αποτελεσμάτων του πειράματος. Γι' αυτό, ενώ τα στοιχεία του Ω ονομάζονται ***δυνατά αποτελέσματα*** ή ***δυνατές περιπτώσεις,*** τα στοιχεία του *A* ονομάζονται ***ευνοϊκά αποτελέσματα*** ή ***ευνοϊκές περιπτώσεις*** για το *A*. Είναι επομένως λογικό να θεωρήσουμε ότι το κλάσμα

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{N}$$

μπορεί να αποτελέσει ένα μέτρο για το πόσο πιθανό είναι να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο *A* αφού εκφράζει τις ευνοϊκές περιπτώσεις ως ποσοστό επί των δυνατών. Έτσι φθάνουμε στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Ορισμός 3.3.1 (ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας): *Αν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι* ***πεπερασμένος*** *και μεταξύ των απλών ενδεχομένων του υπάρχει μια εγγενής συμμετρικότητα, με την έννοια ότι δεν υπάρχει λόγος να δεχθούμε ότι κάποιο απλό ενδεχόμενο είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό από τα υπόλοιπα, και έτσι μπορούμε να τα θεωρήσουμε όλα* ***εξίσου πιθανά (ισοπίθανα)****, τότε η πιθανότητα εμφάνισης ενός (οποιουδήποτε) ενδεχομένου* $A \subseteq \Omega$*, την οποία συμβολίζουμε με* $P(A)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \qquad (3.3.1).$$

■

[9] *Πέραν αυτών των τριών ορισμών έχει προταθεί και η* ***υποκειμενική πιθανότητα*** *ως αποτέλεσμα φιλοσοφικής θεώρησης και ερμηνείας της ως «βαθμού πίστης».*

Παρατηρείστε ότι το «ισοπίθανο» που τίθεται ως προϋπόθεση στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, εύλογα ορίζεται ανεξάρτητα από την έννοια της πιθανότητας (ορίζεται με επίκληση της αρχής της «έλλειψης επαρκούς λόγου»[10]).

Ο *κλασικός ορισμός της πιθανότητας* προτάθηκε από τον *Pierre-Simon Laplace* το 1812 και **μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα** απετέλεσε το θεμέλιο της θεωρίας των πιθανοτήτων, γι' αυτό και ονομάσθηκε κλασικός. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο ορισμός αυτός είχε διατυπωθεί τόσο από τον *Moivre* το 1711 όσο και από τον *Bayes* (σε δημοσίευση που έγινε το 1763, δύο χρόνια μετά το θάνατό του) αλλά και πολύ πριν, οι *Pascal* και *Fermat* αλλά και ο *Cardano*, κ. ά., με αυτόν τον τρόπο προσέγγισαν την έννοια της πιθανότητας[11].

Παρατηρείστε ότι η πιθανότητα ορίσθηκε ως μια συνολοσυνάρτηση $P(\cdot)$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A του συνόλου όλων των ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες.

1. $P(A)\geq 0$, *για κάθε ενδεχόμενο Α του συνόλου των ενδεχομένων του Ω*
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα Α, Β του συνόλου των ενδεχομένων του Ω.*

Η (1) και η (2) προκύπτουν άμεσα από την (3.3.1). Η (3) ονομάζεται ιδιότητα της ***πεπερασμένης προσθετικότητας*** και αποδεικνύεται ως εξής: αν το *ενδεχόμενο Α* έχει κ στοιχεία και το *Β* έχει λ στοιχεία, δηλαδή αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το ενδεχόμενο $A\cup B$ θα έχει $\kappa+\lambda$, δηλαδή $N(A\cup B)=\kappa+\lambda$, διότι τα *Α, Β* είναι *ξένα* μεταξύ τους και επομένως δε θα έχουν κοινά στοιχεία. Δηλαδή,
$N(A\cup B)=N(A)+N(B)$ και επομένως

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)} \text{ ή } P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

Σημειώνουμε ότι εύκολα αποδεικνύονται και κάποιες άλλες ενδιαφέρουσες και πολύ χρήσιμες ιδιότητες της πιθανότητας, όμως κρίνουμε σκόπιμο να μην επεκταθούμε περισσότερο σε αυτό σημείο. Στις ιδιότητες της πιθανότητας θα επανέλθουμε αργότερα. Ας δούμε (… επιτέλους) μερικά παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων με χρήση του κλασικού ορισμού.

Παράδειγμα 3.3.1: *Τα τυχαία πειράματα που αναφέρονται σε τυχερά παιχνίδια συνήθως αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις πειραμάτων με πεπερασμένους δειγματικούς χώρους και ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Μια τέτοια περίπτωση πειράματος τύχης είναι το παιχνίδι της ρουλέτας. Ο τροχός της ρουλέτας διαιρείται σε 37 ίσα τόξα που φέρουν τους αριθμούς 0, 1, 2, 3,…,36. Το μηδέν έχει πράσινο χρώμα και από τους υπόλοιπους 36 αριθμούς, οι 18 έχουν κόκκινο και οι υπόλοιποι (επίσης*

---

[10] *«Κατά την απουσία οποιασδήποτε εκ των προτέρων γνώσης είμαστε αναγκασμένοι να υποθέσουμε ότι τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα», Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi (Η τέχνη του εικάζειν), 1713.*

[11] *Τα πρώτα προβλήματα υπολογισμού πιθανοτήτων που απασχόλησαν τους Cardano, Pascal, Fermat κ.ά., αφορούσαν τυχερά παιχνίδια τα οποία κατά κανόνα είναι πειράματα τύχης με πεπερασμένους δειγματικούς χώρους και ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.*

18) έχουν μαύρο χρώμα[12]*. Ο τροχός μπαίνει σε περιστροφική κίνηση και μια μεταλλική μπίλια ρίχνεται μέσα στον (περιστρεφόμενο) τροχό. Όταν η μπίλια σταματήσει, παρατηρούμε σε ποιον αριθμό σταμάτησε.*

Πρόκειται προφανώς για *πείραμα τύχης*. Σε μια εκτέλεσή του, η μπίλια μπορεί να σταματήσει σε οποιονδήποτε από τους 37 αριθμούς του τροχού, επομένως το πείραμα έχει 37 δυνατά αποτελέσματα, τους αριθμούς, 0, 1, 2, …, 36, δηλαδή, ένας κατάλληλος *δειγματικός χώρος* του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$ και πρόκειται προφανώς για *πεπερασμένο δειγματικό χώρο* με $N(\Omega) = 37$ *δειγματικά σημεία* τα όποια δεν έχουμε λόγο να μην τα θεωρούμε εξίσου πιθανά. Μπορούμε επομένως, για τον υπολογισμό πιθανοτήτων να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3.3.1). Έστω, για παράδειγμα, τα *ενδεχόμενα του Ω,*
Α: η μπίλια σταματάει στο 5 ή στο 11,
Β: η μπίλια σταματάει σε περιττό αριθμό,
Γ: η μπίλια σταματάει σε κόκκινο αριθμό.

Σε μια επανάληψη του πειράματος, οι ευνοϊκές περιπτώσεις

- για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου *Α* είναι δύο, οι αριθμοί 5 και 11, δηλαδή $A = \{5, 11\}$ και επομένως
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{37} = 0.0541.$$
- για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου *Β* είναι όλοι οι περιττοί αριθμοί από το 1 έως το 35 δηλαδή, $B = \{1, 3, 5, \ldots, 33, 35\}$ με $N(B) = 18$ και επομένως
$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{18}{37} = 0.4865.$$
- για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου *Γ* είναι όλοι οι αριθμοί που έχουν κόκκινο χρώμα και γνωρίζουμε ότι $N(\Gamma) = 18$ και επομένως
$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{18}{37} = 0.4865.$$

Σχόλιο 3.3.1: *Ας δούμε πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε, για παράδειγμα, την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Β που μόλις υπολογίσαμε (ανάλογα ερμηνεύονται και οι $P(A)$ και $P(\Gamma)$). Το ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου Β υπολογίσθηκε ίση με 0.4865, σημαίνει ότι αν ένας παίκτης στοιχηματίσει μια φορά σε περιττό αριθμό, η πιθανότητα να κερδίσει είναι 0.4865. Προκύπτει βέβαια το ερώτημα, τι πρακτική αξία μπορεί να έχει για έναν παίκτη αυτή η πληροφορία. Η απάντηση είναι η εξής: για τον παίκτη που θα σκεφθεί να ποντάρει συνεχώς σε περιττό αριθμό για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων έστω ν, αναμένεται να κερδίσει $0.4865 \cdot \nu$ φορές, δηλαδή να κερδίσει λιγότερες φορές από αυτές που θα χάσει, για παράδειγμα, αν ποντάρει 100 φορές αναμένεται να κερδίσει $48.65 \cong 49$ φορές και να χάσει $51.35 \cong 51$ φορές ή αν ποντάρει 1000 φορές σε περιττό αριθμό, αναμένεται να κερδίσει περίπου τις 486 και να χάσει περίπου τις 514. Δηλαδή, ο παίκτης πρέπει να γνωρίζει, ότι το «απώτερο μέλλον», οι «μακράς προοπτικής νόμοι», δεν είναι με το μέρος του αλλά με το καζίνο! Πρόκειται για άδικο παιχνίδι! Αργότερα, όταν θα μιλήσουμε για την έννοια της μέσης τιμής θα επανέλθουμε στα περί δίκαιου και άδικου παιχνιδιού.*

■

[12] *Στο Λας Βέγκας και σε άλλες αμερικανικές πόλεις ο τροχός διαιρείται σε 38 ίσα τόξα που φέρουν τους αριθμούς 00,0,1,…,36 και πράσινο χρώμα έχουν το 0 και το 00.*

Παράδειγμα 3.3.2: *Από τα 80 κοντέινερ που εκφορτώθηκαν από ένα πλοίο, τα 10 περιέχουν λαθραία τσιγάρα. Οι τελωνειακές αρχές επιλέγουν τυχαία 5 από τα 80 κοντέινερ για να ελέγξουν το περιεχόμενό τους. Ποια είναι η πιθανότητα α) καθένα από τα 5 κοντέινερ που επελέγησαν να μην περιέχει λαθραία τσιγάρα β) ακριβώς τρία από τα 5 κοντέινερ που επελέγησαν να περιέχουν λαθραία τσιγάρα.*

Απάντηση: Εδώ, το πείραμα τύχης συνίσταται στην τυχαία επιλογή 5 κοντέινερ από 80, επομένως ο *δειγματικός χώρος*, έστω Ω, του πειράματος, αποτελείται από όλες τις δυνατές συλλογές των 5 κοντέινερ που είναι δυνατόν να σχηματισθούν όταν επιλέγονται 5 κοντέινερ από 80.

Στις συλλογές αυτές δεν ενδιαφέρει κάποιου είδους διάταξη, δηλαδή, πρόκειται για τους συνδυασμούς που σχηματίζονται όταν επιλέγουμε 5 στοιχεία από 80 και επομένως τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι τόσα όσοι είναι οι συνδυασμοί των 80 κοντέινερ ανά 5, δηλαδή

$$N(\Omega) = \binom{80}{5} = \frac{80!}{5! \cdot 75!} = 24040016\,.$$

Επειδή οι συλλογές αυτές των 5 στοιχείων μπορούν να θεωρηθούν εξίσου πιθανές να επιλεγούν, αφού δεν έχουμε κάποιο λόγο για το αντίθετο, και επειδή ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος, για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που μας ενδιαφέρουν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3.3.1).

Επισημαίνουμε ότι για να υπολογίσουμε με τον τύπο (3.3.1) πιθανότητες ενδεχομένων δε χρειάζεται να έχουμε καταγράψει **ποια** είναι τα στοιχεία του Ω και **ποια** τα στοιχεία των ενδεχομένων των οποίων τις πιθανότητες ζητάμε, αλλά **μόνο πόσα** είναι.

α) Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο

Α: καθένα από τα 5 κοντέινερ που επελέγησαν δεν περιέχει λαθραία τσιγάρα

σχηματίζονται αν και τα 5 κοντέινερ επιλεγούν από τα 70 που δεν περιέχουν λαθραία τσιγάρα.

Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{70}{5}$ τρόπους, δηλαδή

$$N(A) = \binom{70}{5} = \frac{70!}{5! \cdot 65!} = 12103014$$

και επομένως

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{70}{5}}{\binom{80}{5}} = \frac{12103014}{24040016} = 0.5034\,.$$

β) Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο

Β: ακριβώς τρία από τα 5 κοντέινερ που επελέγησαν περιέχουν λαθραία τσιγάρα

σχηματίζονται αν από τα 80 κοντέινερ επιλέξουμε 3 που περιέχουν λαθραία τσιγάρα και 2 που δεν περιέχουν λαθραία τσιγάρα. Οι τρόποι επιλογής των 3 κοντέινερ με λαθραία τσιγάρα από τα 10 που περιέχουν λαθραία τσιγάρα είναι $\binom{10}{3}$ και για καθέναν από αυτούς τους τρόπους υπάρχουν $\binom{70}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 κοντέινερ που δεν περιέχουν λαθραία τσιγάρα από τα 70 που δεν περιέχουν λαθραία τσιγάρα. Επομένως, σύμφωνα με την *πολλαπλασιαστική αρχή*, μπορούν να σχηματισθούν $\binom{10}{3}\cdot\binom{70}{2}$ συλλογές των 5 κοντέινερ εκ των οποίων τα 3 να περιέχουν λαθραία τσιγάρα και τα 2 να μην περιέχουν λαθραία τσιγάρα. Δηλαδή, $N(B)=\binom{10}{3}\cdot\binom{70}{2}$

και επομένως

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{70}{2}}{\binom{80}{5}}=\frac{289800}{24040016}=0.0120.$$

Σχόλιο 3.3.2: *Με το παράδειγμα αυτό αναδεικνύεται και προκύπτει με προφανή εκτιμούμε τρόπο, η αξία των μεθόδων απαρίθμησης (που μια καλή ιδέα πήραμε στο 2^{o} Κεφάλαιο). Όσο συστηματικά και μεθοδικά και αν εργαζόμασταν, μάλλον δεν θα ήταν εύκολο να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του Ω προκειμένου να καταφέρουμε να τα μετρήσουμε και έτσι να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό του $N(\Omega)$ και αντίστοιχα τους πληθικούς αριθμούς $N(A)$ και $N(B)$ που μας χρειάσθηκαν για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. Δείτε επίσης και το παράδειγμα που ακολουθεί. Η εφαρμογή μεθόδων απαρίθμησης είναι απαραίτητη.*

■

Παράδειγμα 3.3.3 (συνέχεια του Παραδείγματος 2.4.1): *Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις Αδενίνη, Κυτοσίνη, Γουανίνη και Θυμίνη αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε όλες τις διαφορετικές συνθέσεις που μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους 14 αν σε αυτό υπάρχουν 3 στοιχεία ίσα με A, 4 στοιχεία ίσα με C, 2 στοιχεία ίσα με G και 5 ίσα με T και έστω ότι όλες οι τέτοιου τύπου συνθέσεις (σειρές, ακολουθίες) έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει μια ακολουθία, για την οποία τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις να είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί;*

<u>Απάντηση:</u> Εδώ, το πείραμα τύχης συνίσταται στην τυχαία δημιουργία μιας σύνθεσης για ένα τμήμα *DNA* μήκους 14 που αποτελείται από *3 στοιχεία ίσα με A, 4 στοιχεία ίσα με C, 2 στοιχεία ίσα με G και 5 ίσα με T,* επομένως ο *δειγματικός χώρος* του πειράματος, έστω Ω, αποτελείται από όλες αυτές τις δυνατές συνθέσεις, δηλαδή, από όλες τις διατεταγμένες *14-άδες* της μορφής

ACTAACTCGCGTTT, CCTTAGCTCAGATT, κ.ο.κ

Όπως εξηγήσαμε στο *Παράδειγμα 2.4.1*, η απαρίθμηση αυτών των *14-άδων* είναι ένα πρόβλημα απαρίθμησης ***μεταθέσεων 4 ειδών στοιχείων***, από τα οποία τα $\nu_1=3$ είναι είδους *A*, τα $\nu_2=4$ είναι είδους *C*, τα $\nu_3=2$ είναι είδους *G* και τα $\nu_4=5$ είναι είδους *T*, επομένως

$$N(\Omega)=\frac{14!}{3!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 5!}=2522520.$$

Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο

A: τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις είναι συγκεντρωμένα

είναι όλες οι διατεταγμένες *14-άδες* της μορφής

CCCCGGAAATTTTT, GGAAACCCCTTTTT, κ.ο.κ.

και όπως, επίσης στο *Παράδειγμα 2.4.1* εξηγήσαμε, υπάρχουν 4! το πλήθος τέτοιες διαφορετικές *14-άδες*. Δηλαδή, $N(A) = 4!$.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, όλες οι διαφορετικές συνθέσεις *«μήκους 14* με *3 στοιχεία ίσα με A, 4 στοιχεία ίσα με C, 2 στοιχεία ίσα με G και 5 ίσα με T»,* θεωρούνται εξίσου πιθανές, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο (3.3.1), δηλαδή

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4!}{\frac{14!}{3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 5!}} = \frac{24}{2522520} \cong 0.0000 .$$

■

Επισημαίνουμε ότι ο *κλασικός ορισμός της πιθανότητας* μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε πειράματα των οποίων ο δειγματικός χώρος,

1. *είναι **πεπερασμένος** και*
2. *αποτελείται από **εξίσου πιθανά δυνατά αποτελέσματα**.*

Ένα παράδειγμα λανθασμένης εφαρμογής του κλασικού ορισμού, δίνουμε στην *Άσκηση 3.4* (πρόκειται για ένα γνωστό ιστορικό παράδειγμα).

3.3.2 Ο στατιστικός ορισμός της πιθανότητας

Οι δυο προϋποθέσεις εφαρμογής του κλασικού ορισμού είναι προφανώς αρκετά περιοριστικές. Για παράδειγμα, ο κλασικός ορισμός δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί (δεν είναι κατάλληλος) για να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, ποια είναι η πιθανότητα σε μια ρίψη ενός ζαριού να έρθει «6» αν το ζάρι δεν είναι αμερόληπτο ή ποια είναι η πιθανότητα μια συσκευή να λειτουργήσει πέραν των 10 ωρών συνεχούς λειτουργίας ή γενικότερα, σε προβλήματα πιθανοτήτων που αναφέρονται σε χρόνους ζωής, βάρη ουσιών, αριθμούς εκπεμπόμενων σωματιδίων, αριθμούς βακτηριδίων και σε πολλά άλλα προβλήματα με μη πεπερασμένους δειγματικούς χώρους που καλύπτουν ευρύτατο φάσμα εφαρμογών. Προέκυψε επομένως ανάγκη γενικότερης θεώρησης της έννοιας της πιθανότητας απαλλαγμένης από τους περιορισμούς του «ισοπίθανου» των δυνατών αποτελεσμάτων και του «πεπερασμένου» του δειγματικού χώρου.

Η έννοια της πιθανότητας ως ένα μέτρο του *«βαθμού βεβαιότητας»* για την εμφάνιση ενός ενδεχομένου, θα μπορούσε να προσεγγισθεί από τη σκοπιά του ***πόσο συχνά*** ένα ενδεχόμενο εμφανίζεται αφού όσο πιο συχνά ένα ενδεχόμενο εμφανίζεται, τόσο ο βαθμός βεβαιότητας για αυτό είναι λογικό να θεωρούμε ότι αυξάνεται. Έτσι, για παράδειγμα, λέμε ότι από την ***εμπειρία μας*** «είναι πολύ πιθανόν» να συναντήσουμε κυκλοφοριακό πρόβλημα στη λεωφόρο Κηφισού 7-8:30 το πρωί μιας εργάσιμης ημέρας γιατί το τελευταίο εξάμηνο ήταν πολύ περισσότερες οι εργάσιμες ημέρες που στη λεωφόρο Κηφισού υπήρχε κυκλοφοριακό πρόβλημα 7-8:30 το πρωί από αυτές που δεν υπήρχε ή «είναι πολύ πιθανόν» ένα *email* που φθάνει στον *mail server* του Πανεπιστημίου Αιγαίου να είναι *spam* (δηλαδή ανεπιθύμητο) γιατί την τελευταία εβδομάδα από τα 6000 *email* που έφθασαν στον *mail server* του Πανεπιστημίου Αιγαίου τα 4000 ήταν *spam* ή μια εταιρεία εγγυάται ότι οι λυχνίες που κατασκευάζει μπορούν να λειτουργήσουν τουλάχιστον για 30 ώρες συνεχώς χωρίς να καούν γιατί στις δοκιμές που έκανε το τμήμα ποιοτικού ελέγχου, από τις 100 λυχνίες που ελέγχθηκαν οι 95 «έζησαν» τουλάχιστον 30 ώρες. Επίσης, ένας παίκτης τυχερών παιχνιδιών, το ισοπίθανο των δυνατών αποτελεσμάτων στη ρίψη ενός ζαριού, δεν το θεωρεί εκ των προτέρων δεδομένο αλλά βασίζεται σε αποτελέσματα πολλών επαναλαμβανόμενων ρίψεων που επιβεβαιώνουν κάτι τέτοιο[13].

Είναι επομένως λογικό να σκεφθούμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με ***όρους σχετικής συχνότητας*** εμφάνισής του. Έτσι, αν σε ν επαναλήψεις ενός *πειράματος τύχης* ένα *ενδεχόμενο A* του *δειγματικού χώρου* του πειράματος πραγματοποιηθεί ν_A φορές, ως ένα μέτρο για το πόσο πιθανό είναι να εμφανισθεί σε μια επανάληψη του πειράματος το *A,* θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη ***σχετική συχνότητα***

$$f_A = \frac{\nu_A}{\nu}$$

με την οποία εμφανίζεται το *A*. Μάλιστα, μια σημαντική **εμπειρική** παρατήρηση λέει ότι

«όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται πολλές φορές η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από κάποια τιμή η οποία ονομάζεται οριακή σχετική συχνότητα του ενδεχομένου».

Το εμπειρικό αυτό αποτέλεσμα, είναι γνωστό ως ***στατιστική ομαλότητα (statistical regularity)*** και επιβεβαιώνεται και θεωρητικά από ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας πιθανοτήτων (από τα πιο σημαντικά), το ***νόμο των μεγάλων αριθμών (law of large numbers)***.

Φθάνουμε έτσι στον στατιστικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος δόθηκε από τον *Richard von Mises* στις αρχές του 20^{ου} αιώνα (το 1919).

Ορισμός 3.3.2 (ο στατιστικός ορισμός της πιθανότητας): *Έστω A ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. Αν σε ν επαναλήψεις (υπό τις ίδιες συνθήκες) του πειράματος, το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί ν_A φορές, ορίζουμε ως πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A το όριο*

$$P(A) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu_A}{\nu} \qquad (3.3.2).$$

■

Η πιθανότητα που υπολογίζεται ως *οριακή σχετική συχνότητα,* στη βιβλιογραφία συναντάται και ως ***στατιστική*** ή ***εμπειρική πιθανότητα***[14]. Διευκρινίζουμε ότι το όριο στην (3.3.2) συμβολίζει την *οριακή σχετική συχνότητα,* δηλαδή, αποδίδει συμβολικά τη σταθεροποίηση της *σχετικής συχνότητας* όταν αυξάνεται αρκούντως ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος[15].

Στο *Σχήμα 3.3.1* φαίνεται (με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα επαναλήψεων) πώς μπορεί να προκύψει ως *οριακή σχετική συχνότητα* η πιθανότητα να εμφανισθεί *«κεφαλή»* όταν στρίψουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα μια φορά. Παρατηρείστε πώς η αρχική «ανώμαλη συμπεριφορά» των τιμών της *σχετικής συχνότητας* «διορθώνεται» όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται και πώς τελικά οι τιμές της σταθεροποιούνται στο $1/2$. Επαληθεύεται έτσι εμπειρικά, ότι η πιθανότητα να

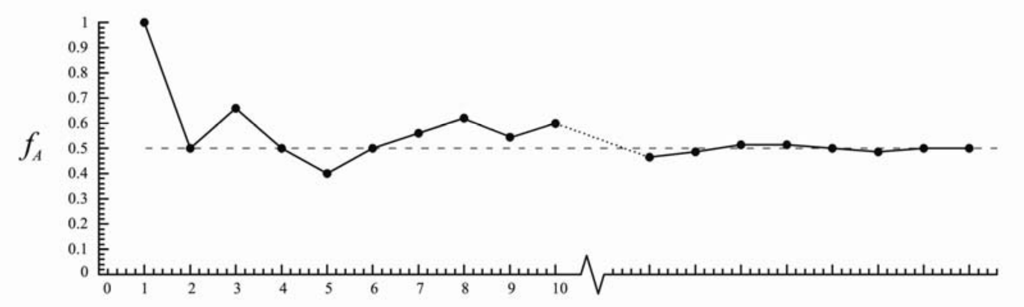
---

[13] *Διευκρινίζουμε ότι δεν αναφερόμαστε στην υποκειμενική πιθανότητα, δηλαδή, σε περιπτώσεις δηλώσεων όπως, «είναι πολύ πιθανόν η Ιλιάδα να γράφτηκε από περισσότερους από έναν συγγραφείς» που αποτελούν προσωπικές κρίσεις ή «πιστεύω» και* ***δεν επιδέχονται πειραματική επαλήθευση****.*

[14] *Λογικό!*

[15] *Η σύγκλιση αυτή, στη σύγχρονη (αξιωματική) θεωρία πιθανοτήτων νοείται ως* ***«σύγκλιση κατά πιθανότητα»****.*

εμφανισθεί κεφαλή όταν στρίψουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα μια φορά είναι $1/2$. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ένα γνωστό παράδειγμα εμπειρικής επαλήθευσης αυτής της πιθανότητας είναι η επαλήθευση με 10000 επαναλήψεις που έκανε (και κατέγραψε ένα-ένα τα αποτελέσματα!!) κρατούμενος μαθηματικός στη διάρκεια του Β΄ παγκοσμίου πολέμου.



Αριθμός επαναλήψεων

Σχήμα 3.3.1
Στατιστική ομαλότητα

Σχόλιο 3.3.3: *Με βάση τον κλασικό ορισμό, η πιθανότητα να εμφανισθεί «κεφαλή» αν «ρίξω ένα αμερόληπτο νόμισμα μια φορά», όπως είδαμε ορίζεται* ***εκ των προτέρων*** *ίση με* $1/2$ *(γιατί τα δύο απλά ενδεχόμενα του πειράματος θεωρούμε ότι είναι ισοπίθανα αφού το νόμισμα είναι αμερόληπτο). Με βάση το στατιστικό ορισμό, η ίδια πιθανότητα υπολογίζεται* ***εκ των υστέρων****, μετά από αρκούντως μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος. Με τον κλασικό ορισμό, αυτή η πιθανότητα δε μπορεί να υπολογισθεί αν το νόμισμα δεν είναι αμερόληπτο ενώ με το στατιστικό ορισμό μπορεί, αρκεί να επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές μέχρι να επιτευχθεί σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων του ενδεχομένου «εμφανίσθηκε κεφαλή». Γενικότερα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, μπορεί να υπολογισθεί ως οριακή σχετική συχνότητα, είτε τα απλά ενδεχόμενά του είναι ισοπίθανα είτε όχι (και χωρίς να απαιτείται ο χώρος να είναι πεπερασμένος).*

Για την *εμπειρική πιθανότητα* προκύπτουν, μεταξύ άλλων, οι ακόλουθες ιδιότητες οι οποίες όπως είδαμε προκύπτουν και από τον *κλασικό ορισμό*.

1. $P(A) \geq 0$, *για κάθε ενδεχόμενο Α του συνόλου των ενδεχομένων του Ω*
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα Α, Β του συνόλου των ενδεχομένων του Ω.*

Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν άμεσα από τις προφανείς σχέσεις:

1. $f_A \geq 0$, για κάθε *ενδεχόμενο Α* του συνόλου των ενδεχομένων του Ω.
2. $f_\Omega = 1$.
3. $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, για οποιαδήποτε *ξένα ενδεχόμενα Α, Β* του συνόλου των ενδεχομένων του Ω.

Παράδειγμα 3.3.4: *Ελέγχθηκαν 3000 spam (ανεπιθύμητα emails) που έφθασαν στον mail server του Πανεπιστημίου Αιγαίου και διαπιστώθηκε ότι σε 600 από αυτά υπήρχε η λέξη «Rolex», σε 1500 η λέξη «offer» ενώ και οι δύο αυτές λέξεις υπήρχαν σε 300 από αυτά τα μηνύματα.*

Πρόκειται για 3000 επαναλήψεις του πειράματος τύχης, *«ελέγχω αν ένα spam email που φθάνει στον mail server του Πανεπιστημίου Αιγαίου περιέχει τις λέξεις Rolex ή offer»*. Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα
Α: το μήνυμα περιέχει τη λέξη «Rolex» και *Β: το μήνυμα περιέχει τη λέξη «offer»*.

Εφόσον στις $\nu = 3000$ επαναλήψεις βρέθηκε ότι $\nu_A = 600$, $\nu_B = 1500$ και $\nu_{AB} = 300$, οι *σχετικές συχνότητες* των ενδεχομένων *Α, Β* και *ΑΒ* (στις 3000 επαναλήψεις) αντίστοιχα είναι

$$f_A = \frac{600}{3000} = 0.2\,,\; f_B = \frac{1500}{3000} = 0.5 \text{ και } f_{AB} = \frac{300}{3000} = 0.1\,.$$

Θεωρώντας ότι στις $\nu = 3000$ επαναλήψεις έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των *σχετικών συχνοτήτων*, οι $f_A = 0.2$, $f_B = 0.5$ και $f_{AB} = 0.1$ είναι οι *οριακές συχνότητες των ενδεχομένων Α, Β* και *ΑΒ*, αντίστοιχα και επομένως

$$P(A) = 0.2\,,\; P(B) = 0.5 \text{ και } P(AB) = 0.1\,.$$

■

3.3.3 Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Είναι προφανές ότι ο *στατιστικός-εμπειρικός ορισμός* της πιθανότητας έχει έναντι του *κλασικού ορισμού* πλεονεκτήματα, αφού μας δίνει έναν τρόπο να υπολογίζουμε πιθανότητες ενδεχομένων χωρίς τους περιορισμούς που θέτει ο *κλασικός ορισμός*. Εντούτοις, και αυτός ο τρόπος προσέγγισης της πιθανότητας, λόγω του εμπειρικού χαρακτήρα του, δεν είναι απαλλαγμένος από προβλήματα. **Σημείο κριτικής για τον *στατιστικό ορισμό*, απετέλεσε η παραδοχή/υπόθεση ότι ένα πείραμα τύχης μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών.** Πράγματι, σε κάποιες περιπτώσεις πειραμάτων υπάρχει πρόβλημα με το «απεριόριστο» των επαναλήψεων. Για παράδειγμα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η επανάληψη συνεπάγεται πολύ χρόνο (π.χ. σε σπάνια φαινόμενα) ή περιπτώσεις όπου η επανάληψη απαιτεί μεγάλο κόστος, με συνέπεια η επανάληψη και μάλιστα, «αρκούντως πολλές φορές», να καθίσταται πρακτικά αδύνατη. Επίσης, το ερώτημα *«πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ν για μια καλή προσέγγιση της πιθανότητας ως $\lim_{\nu \to +\infty} (\nu_A / \nu)$»* πώς απαντάται; Δηλαδή, τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα που κάνουμε όταν χρησιμοποιούμε τη *σχετική συχνότητα* για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα;

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφέρουμε ότι στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, όταν προτάθηκε από τον *Richard von Mises* ο *στατιστικός ορισμός* της πιθανότητας, είχε ήδη αναδειχθεί[16] η ανάγκη για τη μαθηματική ωρίμανση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά, ότι ένα από τα 23 προβλήματα που πρότεινε προς λύση το 1900 ο Hilbert, ήταν το πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας των πιθανοτήτων[17]. Όμως, είναι φανερό, ότι ο εμπειρικός/πειραματικός χαρακτήρας του *στατιστικού ορισμού,* έθετε περιορισμούς στην αξιοποίησή του για τη θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων σε πιο αυστηρή μαθηματική βάση, αφού πώς θα μπορούσε να οικοδομηθεί σε **εμπειρική βάση** μια **απαγωγική** (παραγωγική) μαθηματική θεωρία.

---

[16] *Σαν απόηχος και των γενικότερων εξελίξεων στα μαθηματικά του 19^{ο} αιώνα.*
[17] *Τα 23 αυτά προβλήματα προτάθηκαν από τον Hilbert ως προβλήματα των οποίων η λύση θα συνέβαλε σημαντικά στην πρόοδο της μαθηματικής επιστήμης.*

Απάντηση στο πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας πιθανοτήτων έδωσε, μόλις το 1933, ο Ρώσος Μαθηματικός *Andrei N. Kolmogorov (1903-1989)*. Ο ορισμός που πρότεινε για την πιθανότητα έχει καθολική αποδοχή και στη βιβλιογραφία είναι γνωστός ως ***αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας***. Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα των προσπαθειών που προηγήθηκαν, ο *Kolmogorov* πρότεινε μια αυστηρά μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων η οποία όχι μόνο δεν απέρριψε/ανέτρεψε τον *κλασικό* και τον *στατιστικό* ορισμό που προηγήθηκαν, αλλά αντίθετα, τους ενσωμάτωσε στο δικό της οικοδόμημα. Συγκεκριμένα, ο *κλασικός* ορισμός προκύπτει όπως θα δούμε ως ειδική περίπτωση και ο *στατιστικός* ως οριακό θεώρημα, γνωστό ως ***νόμος των μεγάλων αριθμών***.

Ορισμός 3.3.3 (ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας): *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μια συνάρτηση* $P(\cdot)$ *η οποία σε κάθε ενδεχόμενο Α του Ω αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό* $P(A)$*, ονομάζεται πιθανότητα στον δειγματικό χώρο Ω και ο αριθμός* $P(A)$ *θα ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου Α, αν ικανοποιεί τα αξιώματα:*

(1) $P(A) \geq 0$*, για κάθε ενδεχόμενο Α του συνόλου των ενδεχομένων του Ω*

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu) + \ldots$

για οποιαδήποτε ακολουθία, $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$*, ξένων ανά δύο ενδεχομένων του συνόλου των ενδεχομένων του Ω.*

■

Παρατηρείστε ότι ο *Kolmogorov* όρισε την πιθανότητα ως μια ***συνολοσυνάρτηση*** που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των ενδεχομένων του Ω και παίρνει τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Παρατηρείστε επίσης, ότι οι τρεις ιδιότητες που έθεσε ως αξιώματα είναι τρεις «εύλογες» για πιθανότητα ιδιότητες που μάλιστα, όπως είδαμε, οι δύο πρώτες απορρέουν και από τον *κλασικό* αλλά και από τον *εμπειρικό* ορισμό. Η τρίτη ιδιότητα που έθεσε ως αξίωμα ο *Kolmogorov,* ονομάζεται ***αριθμήσιμη προσθετικότητα*** ή ***άπειρη προσθετικότητα*** ή ***σ-προσθετικότητα (countable additivity)*** γιατί αφορά αριθμησίμως άπειρο πλήθος ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$. Θυμηθείτε ότι από τον *κλασικό* αλλά και από τον *εμπειρικό* ορισμό, όπως είδαμε, προκύπτει η ιδιότητα της ***πεπερασμένης προσθετικότητας (finite additivity)***.

Στην *Πρόταση 3.3.1* που ακολουθεί αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της πιθανότητας που απορρέουν από τα τρία αξιώματα.

Πρόταση 3.3.1 (ιδιότητες της πιθανότητας): *Για την πιθανότητα (σε δειγματικό χώρο Ω), ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) $P(\emptyset) = 0$

(β) Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα, $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$*, του συνόλου των ενδεχομένων του Ω, ισχύει*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$$

(πεπερασμένη προσθετικότητα).

(γ) Αν $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *είναι ένα αριθμησίμως άπειρο ενδεχόμενο του Ω τότε*

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots$$

Επίσης αν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$ *πεπερασμένο ενδεχόμενο του Ω τότε*

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_\nu\})$$

(δ) Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α του Ω, ισχύει

$$P(A') = 1 - P(A).$$

(ε) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β του Ω, ισχύει

$$P(A - B) = P(AB') = P(A) - P(AB).$$

(στ) Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα του Ω με $A \subseteq B$*, τότε* $P(A) \le P(B)$.

(ζ) Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α του Ω είναι $P(A) \le 1$.

(η) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β του Ω ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

(θ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β του Ω, ισχύει

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

(υποπροσθετική ιδιότητα ή ανισότητα Boole).

Γενικότερα, για οποιαδήποτε ν *ενδεχόμενα* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *του Ω, ισχύει*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) \le P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu).$$

<u>Απόδειξη:</u> *(α) Από το τρίτο αξίωμα, για* $A_1 = A_2 = \ldots = \varnothing$ *έχουμε*

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots$$

και επειδή λόγω του πρώτου αξιώματος $P(\varnothing) \ge 0$*, προφανώς πρέπει*

$$P(\varnothing) = 0.$$

(β) Αν στο τρίτο αξίωμα θεωρήσουμε ότι $A_{\nu+1} = A_{\nu+2} = \ldots = \varnothing$ *τότε, επειδή* $P(\varnothing) = 0$ *έχουμε*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \varnothing \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu) + P(\varnothing) + \ldots$$

ή

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu).$$

Για $\nu = 2$ *δηλαδή, για δύο ξένα ενδεχόμενα* A_1, A_2 *του Ω ή αν τα συμβολίσουμε αντίστοιχα με Α, Β έχουμε*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(γ) Επειδή τα ενδεχόμενα $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \ldots$ *είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και*

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \ldots$$

τότε από το τρίτο αξίωμα προφανώς έχουμε

$$P(A) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \ldots) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + \ldots$$

Αν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$ *πεπερασμένο ενδεχόμενο τότε επειδή τα* $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_\nu\}$ *είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας (ιδιότητα (β)) έχουμε*

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_\nu\}).$$

(δ) Για τα A, A' *ισχύει ότι* $A \cup A' = \Omega$ *και άρα* $P(A \cup A') = P(\Omega)$ *ή* $P(A \cup A') = 1$ *και επειδή τα* A, A' *είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε* $P(A) + P(A') = 1$*, άρα*

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Ο τύπος αυτός είναι πολύ χρήσιμος σε περιπτώσεις όπου είναι δύσκολος ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ενώ είναι σχετικά πιο εύκολος ο υπολογισμός της πιθανότητας του συμπληρωματικού ενδεχομένου ή αντίστροφα.

(ε) Το ενδεχόμενο Α, όπως έχουμε επισημάνει (Παρατήρηση 3.2.1), μπορεί προφανώς να γραφεί ως ένωση των ξένων ενδεχομένων AB' *και* AB *(δες και Σχήμα 3.3.2), δηλαδή*

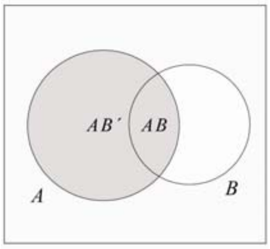
$$A = AB' \cup AB$$

και επομένως

$$P(A) = P(AB' \cup AB) \text{ ή } P(A) = P(AB') + P(AB)$$

άρα

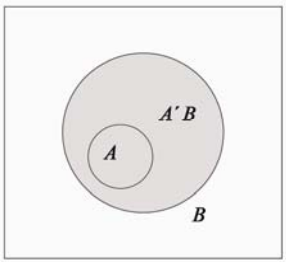
$$P(AB') = P(A) - P(AB).$$



Σχήμα 3.3.2

$A = AB' \cup AB$

(στ) Επειδή $A \subseteq B$, *τότε* $B = A \cup A'B$ *(δες και Σχήμα 3.3.3) και επ ομένως,* $P(B) = P(A'B \cup A)$ *ή* $P(B) = P(A'B) + P(A)$ *ή* $P(B) - P(A) = P(A'B) \geq 0$, *άρα,* $P(A) \leq P(B)$.



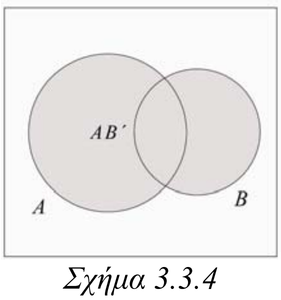
Σχήμα 3.3.3

$B = A \cup A'B$

(ζ) Επειδή $A \subseteq \Omega$, *λόγω της (στ) έχουμε,* $P(A) \leq P(\Omega)$ *ή* $P(A) \leq 1$.

(η) Η ένωση $A \cup B$ μπορεί να γραφεί ως ένωση των ξένων ενδεχομένων AB' *και* B *(δες και Σχήμα 3.3.4), δηλαδή,* $A \cup B = AB' \cup B$ και επομένως $P(A \cup B) = P(AB') + P(B)$ και λόγω της (ε) έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(B) \text{ ή } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$



Σχήμα 3.3.4

$A \cup B = AB' \cup B$

(θ) Προκύπτει άμεσα από την (η) σε συνδυασμό με το πρώτο αξίωμα και η γενική περίπτωση επαγωγικά.

■

Πόρισμα 3.3.1: α) *Αν* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ *είναι ένας αριθμησίμως άπειρος δειγματικός χώρος, τότε για τις πιθανότητες*

$$p_1 = P(\{\omega_1\}),\ p_2 = P(\{\omega_2\}),\ p_3 = P(\{\omega_3\}), \ldots$$

των απλών ενδεχομένων του, $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots$, *ισχύει ότι*

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1 \quad ή \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

β) *Αν* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N\}$ *είναι ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος με N δειγματικά σημεία, ισχύει ότι,*

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1.$$

Η απόδειξη και για το *(α)* και για το *(β)* προκύπτει άμεσα από την *Πρόταση 3.3.1(γ)* για $A = \Omega$.

■

Σημείωση 3.3.1 (πιθανότητα της ένωσης ενδεχομένων): *Η ιδιότητα (η) που δίνει την πιθανότητα της ένωσης δύο οποιωνδήποτε ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου, δηλαδή, την πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από δύο ενδεχόμενα, γενικεύεται για τρία ή και περισσότερα ενδεχόμενα. Στη γενική περίπτωση, ο τύπος που δίνει την πιθανότητα της ένωσης οποιωνδήποτε* $\nu \geq 2$ *ενδεχομένων, δηλαδή την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από* $\nu \geq 2$ *ενδεχόμενα, είναι γνωστός ως* ***τύπος του Poincare*** *ή* ***κανόνας εγκλεισμού-αποκλεισμού (inclusion-exclusion identity)***. *Η λογική του τύπου του Poincare είναι η εξής*[18]*: η πιθανότητα της ένωσης* $\nu \geq 2$ *ενδεχομένων είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων αυτών λαμβανομένων ανά ένα, μείον το άθροισμα των πιθανοτήτων αυτών των ενδεχομένων λαμβανομένων ανά δύο, συν το άθροισμα των πιθανοτήτων αυτών των ενδεχομένων λαμβανομένων ανά τρία, κ.ο.κ. Στο παράδειγμα που ακολουθεί δίνουμε και αποδεικνύουμε τον τύπο του Poincare για* $\nu = 3$.

Παράδειγμα 3.3.5 (πιθανότητα της ένωσης τριών ενδεχομένων): *Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης ισχύει*

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma).$$

Αρκεί να εφαρμόσουμε κατάλληλα τρεις φορές τον τύπο *(η)*. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A \cup (B \cup \Gamma)) = P(A) + P(B \cup \Gamma) - P(A(B \cup \Gamma)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma) - P(AB \cup A\Gamma) = \\
&= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma) - [P(AB) + P(A\Gamma) - P(ABA\Gamma)] = \\
&= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) + P(AB\Gamma).
\end{aligned}$$

■

Πώς υπολογίζουμε πιθανότητες ενδεχομένων;

Ίσως σας έχει δημιουργηθεί η εξής απορία: ο αξιωματικός ορισμός δίνει βέβαια τρεις ιδιότητες, εύλογες μάλιστα, της συνάρτησης πιθανότητας από τις οποίες όπως είδαμε απορρέουν και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες, αλλά κάποιο συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού πιθανοτήτων ενδεχομένων δε φαίνεται να δίνει. Πιθανότητες, επομένως, πώς υπολογίζουμε; Μια, κατ' αρχάς, απάντηση στο εύλογο αυτό ερώτημα δίνουμε με τα τέσσερα παραδείγματα που ακολουθούν.

Στο πρώτο (Παράδειγμα 3.3.6), για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν, αξιοποιούμε βέβαια τις ιδιότητες που απορρέουν από τα τρία αξιώματα, αλλά ως αφετηρία χρησιμοποιούμε κάποια άλλα απλούστερα ενδεχόμενα των οποίων οι πιθανότητες δίνονται.

---

[18] *Πρόκειται για τη λογική του «κόσκινου του Ερατοσθένη»!!*

Γεννάται όμως, νέο ερώτημα: πώς υπολογίζουμε πιθανότητες «απλούστερων ενδεχομένων» ώστε με βάση αυτές, και τις ιδιότητες της πιθανότητας, να μπορούμε να υπολογίζουμε τις πιθανότητες άλλων πιο σύνθετων ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν; Στην πράξη, πιθανότητες όπως αυτές που δίνονται ως γνωστές στο Παράδειγμα 3.3.6, υπολογίζονται (ακριβέστερα, προσεγγίζονται/εκτιμώνται) ως ***οριακή σχετική συχνότητα*** *του αντίστοιχου κατά περίπτωση ενδεχομένου. Έτσι επίσης εκτιμάμε στην πράξη πιθανότητες όπως, ένα παιδί που γεννιέται στην Αθήνα να είναι αγόρι, ή ένα προϊόν που παράγεται από συγκεκριμένη παραγωγική μονάδα να είναι ελαττωματικό, ή μια αγελάδα να πεθάνει μετά από εμβολιασμό λόγω παρενέργειας του εμβολίου ή μια βερικοκιά στον αργολικό κάμπο να προσβληθεί την ερχόμενη άνοιξη από μια συγκεκριμένη ασθένεια ή ένα spam email που φθάνει σε συγκεκριμένο mail server να περιέχει τη λέξη Rolex. Δείτε και το Παράδειγμα 3.3.4 που δώσαμε όταν μιλήσαμε για τον στατιστικό ορισμό. Υπενθυμίζουμε ότι ο στατιστικός ορισμός ενσωματώνεται πλήρως στο οικοδόμημα της αξιωματικής θεμελίωσης, αφού προκύπτει ως οριακό θεώρημα και έτσι η ορθότητά του αιτιολογείται και αυστηρά μαθηματικά.*

Τα τρία άλλα παραδείγματα αναφέρονται σε μια ειδική, αλλά μεγάλη κατηγορία δειγματικών χώρων, τους πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

Αν ο δειγματικός χώρος του πειράματος που μελετάμε είναι ***πεπερασμένος****, έστω*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N\}$$

τότε, για τις πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_N$*, των απλών ενδεχομένων του,* $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots, \{\omega_N\}$*, από τα τρία αξιώματα (όπως είδαμε) προκύπτουν οι σχέσεις*

1. $p_i \geq 0$, *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, N$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$.

Είναι προφανές ότι αυτές οι σχέσεις δεν αρκούν για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες, $p_1, p_2, \ldots, p_N$*, των απλών ενδεχομένων ώστε με αυτές ως αφετηρία να μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες άλλων πιο σύνθετων. Απαιτούνται και κάποιες επιπλέον σχέσεις για τις* $p_1, p_2, \ldots, p_N$*. Στο δεύτερο παράδειγμα, μια τέτοια περίπτωση υπολογισμού πιθανοτήτων δίνουμε (Παράδειγμα 3.3.7).*

Στο τρίτο παράδειγμα (Παράδειγμα 3.3.8) αποδεικνύουμε ότι αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι ***πεπερασμένος*** *και αν επιπλέον τα απλά ενδεχόμενά του είναι* ***εξίσου πιθανά****, τότε τα τρία αξιώματα οδηγούν σε έναν απλό τύπο υπολογισμού της πιθανότητας ενδεχομένου. Πρόκειται για τον ίδιο τύπο που δίνεται από τον κλασικό ορισμό. Για την εφαρμογή αυτού του τύπου, όπως ήδη διαπιστώσαμε όταν μιλήσαμε για τον κλασικό ορισμό (θυμηθείτε τα Παραδείγματα 3.3.1-3.3.3), απαιτούνται μόνο ικανότητες στην απαρίθμηση ευνοϊκών και δυνατών περιπτώσεων. Τέλος, στο Παράδειγμα 3.3.9, δίνουμε μια ακόμη εφαρμογή του τύπου αυτού σε ένα «διάσημο/πολύ γνωστό» πρόβλημα.*

Παράδειγμα 3.3.6: *Σε μια έρευνα που ολοκληρώθηκε πρόσφατα, μελετήθηκαν μεταξύ άλλων, οι τιμές δύο αιματολογικών δεικτών, έστω Α και Β, στους άνδρες ηλικίας 50 έως 70 ετών που κατοικούν μόνιμα στο ΒΑ Αιγαίο. Βρέθηκε ότι αν επιλέξουμε τυχαία έναν άνδρα που μένει μόνιμα σε νησί του ΒΑ Αιγαίου και είναι ηλικίας 50 έως 70 ετών, η πιθανότητα να βρίσκεται σε φυσιολογικό επίπεδο η τιμή του δείκτη Α στο αίμα του είναι ίση με 0.45. Αντίστοιχα, η πιθανότητα να βρίσκεται σε φυσιολογικό επίπεδο η τιμή του δείκτη Β στο αίμα του είναι ίση 0.30 και η πιθανότητα να βρίσκονται σε*

φυσιολογικό επίπεδο και οι δύο δείκτες είναι ίση με 0.10. Επιλέγουμε τυχαία έναν άνδρα που μένει μόνιμα σε νησί του ΒΑ Αιγαίου και είναι ηλικίας 50 έως 70 ετών και ελέγχουμε τις τιμές των δεικτών Α και Β στο αίμα του. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί με τιμή σε φυσιολογικό επίπεδο
α) τουλάχιστον ένας από τους δύο δείκτες
β) μόνο ο δείκτης Α
γ) μόνο ο δείκτης Β
δ) μόνο ένας από τους δείκτες Α, Β
ε) κανένας από τους δείκτες Α, Β.

Απάντηση: Έστω τα ενδεχόμενα
Α: Η τιμή του δείκτη Α είναι σε φυσιολογικό επίπεδο
Β: Η τιμή του δείκτη Β είναι σε φυσιολογικό επίπεδο.

Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, έχουμε
$P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.30$ και $P(AB) = 0.10$.

Με βάση όσα αναφέραμε όταν μιλήσαμε για τις πράξεις μεταξύ ενδεχομένων *(δες και το Σχήμα 3.2.13)*, οι ζητούμενες πιθανότητες, αντίστοιχα είναι
α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.45 + 0.30 - 0.10 = 0.65$
β) $P(AB') = P(A) - P(AB) = 0.45 - 0.10 = 0.35$
γ) $P(BA') = P(B) - P(AB) = 0.30 - 0.10 = 0.20$
δ) $P(AB' \cup BA') = P(AB') + P(BA') = 0.35 + 0.20 = 0.55$
ε) $1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 0.35$
ή $P(A'B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 0.35$.

■

Παράδειγμα 3.3.7: *Από παρατηρήσεις πολλών ετών έχει εκτιμηθεί ότι η πιθανότητα ένας αιμοδότης που προσέρχεται σε κάποιο κέντρο αιμοδοσίας του λεκανοπεδίου Αττικής, να έχει ομάδα αίματος Α είναι ίση με την πιθανότητα να έχει ομάδα αίματος Ο και δεκαπλάσια από την πιθανότητα να έχει ομάδα αίματος ΑΒ ενώ η πιθανότητα να έχει ομάδα αίματος Β είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να έχει ομάδα αίματος ΑΒ. Είναι γνωστό ότι ένας ασθενής με ομάδα αίματος Α μπορεί να δεχθεί αίμα μόνο από τις ομάδες Ο και Α. Ένας εθελοντής αιμοδότης προσέρχεται σε ένα κέντρο αιμοδοσίας του λεκανοπεδίου Αττικής για να δώσει αίμα για έναν ασθενή που έχει ομάδα αίματος Α. Ποια είναι η πιθανότητα το αίμα του εθελοντή να είναι συμβατό με του ασθενούς.*

Απάντηση: Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος του πειράματος είναι προφανώς ο
$$\Omega = \{A,\ B,\ AB,\ O\}.$$
Ας συμβολίσουμε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{A\}$, $\{B\}$, $\{AB\}$ και $\{O\}$ με p_1, p_2, p_3 και p_4, αντίστοιχα, δηλαδή,
$$p_1 = P(\{A\}),\ \ p_2 = P(\{B\}),\ \ p_3 = P(\{AB\}) \text{ και } p_4 = P(\{O\}).$$
Από το πρώτο και το τρίτο αξίωμα προκύπτουν όπως είδαμε οι σχέσεις

1. $p_i \geq 0$, για κάθε $i = 1,2,3,4$
2. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

και σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις,
$p_1 = p_4 = 10p_3$ και $p_2 = 3p_3$.

Αντικαθιστώντας από τις τελευταίες σχέσεις τα p_2, p_3 και p_4 στην $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, παίρνουμε

$$p_1 + \frac{3p_1}{10} + \frac{p_1}{10} + p_1 = 1 \Rightarrow \frac{24p_1}{10} = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{5}{12} \cong 0.42$$

και επομένως

$$p_4 \cong 0.42\,,\ p_3 = \frac{p_1}{10} \cong 0.04 \text{ και } p_2 = 3p_3 \cong 0.12\,.$$

Έτσι, αξιοποιώντας τη σχέση $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ (που προκύπτει από το τρίτο αξίωμα του ορισμού) και τις σχέσεις που μας δόθηκαν υπολογίσαμε τις πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων και πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου του Ω.

Εφόσον ένας ασθενής με ομάδα αίματος *A* μπορεί να δεχθεί αίμα μόνο από τις ομάδες *O* και *A*, η ζητούμενη πιθανότητα, προφανώς είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{O, A\}$, επομένως έχουμε

$P(\{O,\ A\}) = P(\{O\}) + P(\{A\}) = p_4 + p_1 = 0.42 + 0.42 = 0.84$.

■

Παράδειγμα 3.3.8 (πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα): *Έστω* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N\}$ ***πεπερασμένος*** *δειγματικός χώρος με* $N(\Omega) = N$ ***ισοπίθανα*** *δειγματικά σημεία. Έστω επίσης A, ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο του Ω με* $N(A)$ *δειγματικά σημεία (στοιχεία). Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα* $P(A)$ *πραγματοποίησης του A, δίνεται από τον τύπο*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Σύμφωνα με το *Πόρισμα 3.3.1(β)*, για τις πιθανότητες,

$$p_1 = P(\{\omega_1\}),\ p_2 = P(\{\omega_2\}),\ p_3 = P(\{\omega_3\}), \ldots, p_N = P(\{\omega_N\})$$

πραγματοποίησης των απλών ενδεχομένων, $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots, \{\omega_N\}$, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1.$$

Οι πιθανότητες των *απλών ενδεχομένων* θεωρούνται ίσες και έστω p η τιμή τους, έστω δηλαδή, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_N = p$. Έτσι, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1 \Leftrightarrow Np = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{N}.$$

Έστω ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο *A* του Ω με $N(A)$ *δειγματικά σημεία* (στοιχεία). Λόγω της *Πρότασης 3.3.1(γ)* για την πιθανότητα πραγματοποίησης του *A*, $P(A)$, έχουμε

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{N(A)\ \text{το πλήθος}} = N(A) \cdot p = N(A) \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N}.$$

Δείξαμε έτσι, πώς από τα τρία αξιώματα του *αξιωματικού ορισμού,* προκύπτει ο τύπος που δίνεται στον *κλασικό ορισμό* για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενδεχομένου. Ας δούμε ως ένα παράδειγμα εφαρμογής του τύπου αυτού ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, γνωστό στη βιβλιογραφία ως ***πρόβλημα των γενεθλίων***. Μπορείτε επίσης να ξαναδείτε τα παραδείγματα που δώσαμε όταν μιλήσαμε για τον *κλασσικό ορισμό*.

Παράδειγμα 3.3.9 (το πρόβλημα των γενεθλίων): *Ποια είναι η πιθανότητα σε μια τάξη k φοιτητών, δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και ότι* $k \leq 365$.

Απάντηση: Ο *δειγματικός χώρος* Ω του πειράματος αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες *k-άδες* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$, όπου α_1 είναι η ημέρα γενεθλίων του *1*^{ου} φοιτητή, α_2 είναι η ημέρα γενεθλίων του *2*^{ου} φοιτητή,... και α_k είναι η ημέρα γενεθλίων του *k*^{ου} φοιτητή. Πρόκειται για πεπερασμένο δειγματικό χώρο με

$$N(\Omega) = 365^k$$

δηλαδή, με 365^k δυνατά αποτελέσματα, αφού η ημερομηνία γενεθλίων του *1*^{ου} φοιτητή μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες του έτους, η ημερομηνία γενεθλίων του *2*^{ου} φοιτητή (όποια και αν είναι η ημερομηνία γενεθλίων του *1*^{ου}) μπορεί επίσης να είναι οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες του έτους, κ.ο.κ., δηλαδή, για το σχηματισμό μιας διατεταγμένης *k-άδας* το στοιχείο α_1 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από 365 διαφορετικές τιμές, το στοιχείο α_2 μπορεί επίσης να πάρει οποιαδήποτε από 365 διαφορετικές τιμές (όποια και αν είναι η τιμή που πήρε το α_1), κ.ο.κ. και επομένως οι διαφορετικές *k-άδες* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$ που είναι δυνατόν να δημιουργηθούν σύμφωνα με την *πολλαπλασιαστική αρχή* είναι

$$\underbrace{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}_{k \ \text{το πλήθος}} = 365^k .$$

Με την παραδοχή ότι τα 365^k δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα[19] θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως το λόγο των ευνοϊκών προς τις δυνατές περιπτώσεις. Έστω λοιπόν το ενδεχόμενο

A : Δύο τουλάχιστον από τους k φοιτητές έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα

και το συμπλήρωμά του

A′ : οι k φοιτητές έχουν διαφορετικές ημερομηνίες γενεθλίων.

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)}$$

του ενδεχομένου A' και στη συνέχεια από τον τύπο $P(A) = 1 - P(A')$ θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα.

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων $N(A')$ για την πραγματοποίηση του A' προφανώς είναι $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot [365 - (k-1)]$, δηλαδή,

$$N(A') = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$$

αφού στα ευνοϊκά για το ενδεχόμενο A' αποτελέσματα, οι k φοιτητές πρέπει να έχουν διαφορετικές ημερομηνίες γενεθλίων, δηλαδή, το A' αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες *k-άδες* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$ που έχουν διαφορετικά στοιχεία δηλαδή που είναι $\alpha_i \neq \alpha_j$ (για $i \neq j$). Αυτό σημαίνει ότι στις ευνοϊκές *k-άδες,* το α_2 δεν παίρνει 365 διαφορετικές τιμές αλλά $365 - 1 = 364$ γιατί εξαιρείται η τιμή που πήρε το α_1 (δηλαδή η ημερομηνία γενεθλίων του *1*^{ου} φοιτητή), ανάλογα, το α_3 παίρνει $365 - 2 = 363$ διαφορετικές τιμές γιατί εξαιρούνται οι ημερομηνίες γενεθλίων των προηγούμενων δύο φοιτητών και τέλος το α_k παίρνει $365 - (k-1)$ διαφορετικές

[19] *Που είναι μια μάλλον βάσιμη παραδοχή (αν και υπάρχουν επιχειρήματα και για το αντίθετο).*

τιμές αφού εξαιρούνται οι ημερομηνίες γενεθλίων των προηγούμενων $(k-1)$ φοιτητών.

Έτσι έχουμε

$$P(A') = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}$$

και άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}, \quad 1 \le k \le 365.$$

■

Σχόλιο 3.3.4: *Για να υπολογίσουμε τα $N(\Omega)$ και $N(A')$ μπορούμε να σκεφθούμε και ως εξής: κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι μια **επαναληπτική διάταξη** των $\nu = 365$ ημερών του έτους ανά k και επομένως με εφαρμογή του τύπου που δίνει το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k έχουμε $N(\Omega) = \nu^k = 365^k$ ενώ κάθε ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι μια **διάταξη** των $\nu = 365$ ημερών του έτους ανά k και επομένως, $N(A') = (\nu)_k = (365)_k = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)$.*

Σχόλιο 3.3.5: *Στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε τις τιμές της πιθανότητας του ενδεχομένου Α για διάφορες τιμές του k.*

k	5	10	23	30	50	70
$P(A)$	0.027	0.117	0.507	0.706	0.970	0.999

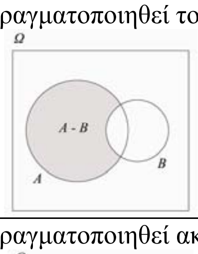
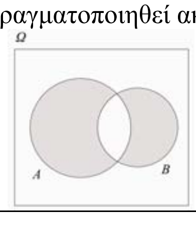
Παρατηρείστε ότι αυξανομένου του k, η πιθανότητα από k άτομα να βρεθούν τουλάχιστον δύο που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα ασφαλώς αυξάνεται και μάλιστα φθάνει πολύ γρήγορα σε τιμές κοντά στο 1. Για παράδειγμα, μεταξύ μόλις 50 ατόμων η πιθανότητα τουλάχιστον δύο να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι πολύ μεγάλη, ίση με 97%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων είναι σχεδόν βέβαιο ότι τουλάχιστον δύο έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Παρατηρείστε επίσης, ότι για $k = 23$ είναι $P(A) = 0.507$, δηλαδή, μεταξύ 23 ατόμων[20] η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην υπάρχουν!!!

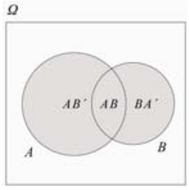
Ερώτηση: *Στο αμφιθέατρο βρίσκονται για το μάθημα της Στατιστικής 70 φοιτητές και ο καθηγητής. Ο καθηγητής μόλις έχει εξηγήσει το πρόβλημα των γενεθλίων όταν ένας φοιτητής απευθυνόμενος στον καθηγητή και τους συμφοιτητές του λέει: έχω γενέθλια στις 24/6, υπάρχει κάποιος άλλος στο αμφιθέατρο που να έχει γενέθλια στις 24/6; Τι είναι άραγε πιο πιθανό, να βρεθεί και κάποιος άλλος που να έχει γενέθλια στις 24/6 ή να μη βρεθεί; (Υπόδειξη: Δείτε την Άσκηση 3.5)*

■

[20] *Ας πούμε μεταξύ των 22 ποδοσφαιριστών και του διαιτητή σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα!*

3.4 Σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών, προτάσεων και τύπων

Πείραμα τύχης - Η έννοια του τυχαίου	Σε μια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης το αποτέλεσμα δεν καθορίζεται με βάση την αρχή της αιτιότητας (όπως στα αιτιοκρατικά φαινόμενα και πειράματα) αλλά αποδίδεται στην **τύχη**. Η έννοια του **τυχαίου** συνδέεται με το **πολυσύνθετο** και το **περιορισμένο** της γνώσης των αιτίων που προκαλούν το αποτέλεσμα. Χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε (θεωρητικά άπειρες φορές) και ότι σε μια εκτέλεσή του δε μπορούμε να προβλέψουμε **με βεβαιότητα** το αποτέλεσμα που θα εμφανισθεί, όμως μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα **δυνατά** αποτελέσματά του.
Δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης	Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του.
Δειγματικό σημείο	Κάθε στοιχείο ενός δειγματικού χώρου, δηλαδή κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.
Ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης	Υποσύνολα του δειγματικού χώρου.
Πραγματοποίηση ενδεχομένου	Σε μια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται (εμφανίζεται) όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του.
Απλό και σύνθετο ενδεχόμενο	Αν ένα ενδεχόμενο αποτελείται από μόνο ένα δειγματικό σημείο ονομάζεται απλό ενδεχόμενο ενώ αν αποτελείται από περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζεται σύνθετο ενδεχόμενο.
Βέβαιο ενδεχόμενο, Ω	Πραγματοποιείται πάντα.
Αδύνατο ενδεχόμενο, $\varnothing$	Δεν πραγματοποιείται ποτέ.
Το ενδεχόμενο *A* συνεπάγεται το ενδεχόμενο *B*, $A \subseteq B$	Όταν πραγματοποιείται το *A* πραγματοποιείται και το *B*.
Ίσα ενδεχόμενα $A = B$	Όταν πραγματοποιείται το *A* πραγματοποιείται και το *B* και αντιστρόφως.
Τομή ενδεχομένων $A \cap B$ ή AB	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί και το *A* και το *B*.
Ένωση ενδεχομένων $A \cup B$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ή το *A* ή το *B* (ή και τα δύο), ή αλλιώς, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα *A, B*.
Συμπλήρωμα A' **ενδεχομένου** A	Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιηθεί το *A*.
Ξένα ή ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα *A, B*	Ενδεχόμενα τα οποία δεν έχουν κοινά δειγματικά σημεία ($AB = \varnothing$) ή αλλιώς, η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.
Διαφορά $A - B$ ή AB'	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το *A* αλλά όχι το *B*. 
Συμμετρική διαφορά $A \Delta B = AB' \cup BA'$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα *A, B*. 

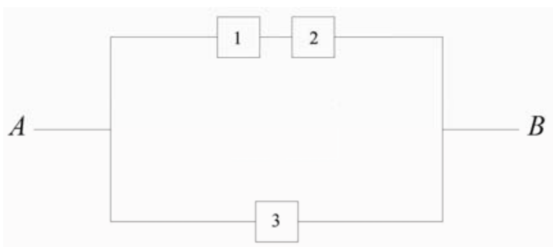
$(A \cup B)'$	Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται ούτε το *A* ούτε το *B*.
$(AB)'$	Πραγματοποιείται όταν από τα *A*, *B* πραγματοποιηθεί το πολύ ένα.
Ιδιότητες των πράξεων μεταξύ ενδεχομένων	$A \cup \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$ $A \cup A = A$, $AA = A$ $A \cup \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$ $A \cup A' = \Omega$, $AA' = \varnothing$, $(A')' = A$, $\Omega' = \varnothing$, $\varnothing' = \Omega$ $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$ $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ $A \cup (B\Gamma) = (A \cup B)(A \cup \Gamma)$, $A(B \cup \Gamma) = (AB) \cup (A\Gamma)$ Αν $A \subseteq B$ τότε $AB = A$, $A \cup B = B$ και $A - B = AB' = \varnothing$ Τύποι De Morgan: $(A \cup B)' = A'B'$, $(AB)' = A' \cup B'$ $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)' = A_1' A_2' \ldots A_\nu'$ $(A_1 A_2 \ldots A_\nu)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_\nu'$
Η ένωση $A \cup B$ ως ένωση ξένων ενδεχομένων	$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$  Επίσης $A = AB' \cup AB$ και $B = BA \cup BA'$
Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας *(Laplace, 1812)*	Αν ο Ω είναι πεπερασμένος και όλα τα απλά ενδεχόμενά του είναι ισοπίθανα, τότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\textit{πλήθος στοιχείων του } A}{\textit{πλήθος στοιχείων του } \Omega}$.
Ο στατιστικός ορισμός της πιθανότητας *(Richard von Mises, 1919)*	$P(A) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{\nu_A}{\nu}$, όπου ν_A ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου *A* σε ν επαναλήψεις του πειράματος
Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας *(Kolmogorov, 1933)*	1. $P(A) \geq 0$, $\forall$ ενδεχόμενο *A* του Ω. 2. $P(\Omega) = 1$ 3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$, για A_1, A_2,... ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.
Άλλες ιδιότητες της πιθανότητας *(προκύπτουν από τα τρία αξιώματα)*	*(α)* $P(\varnothing) = 0$ *(β)* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$ *για* A_1, $A_2, \ldots, A_\nu$ *ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.* *(γ) Αν* $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, *τότε,* $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots$ *(δ)* $P(A) \leq 1$ *(ε)* $P(A') = 1 - P(A)$ *(στ)* $P(AB') = P(A) - P(AB)$ *(ζ) Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $P(A) \leq P(B)$ *(η)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ *(θ)* $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ *(ι)* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$.

3.5 Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Για καθένα από τα πειράματα τύχης που ακολουθούν, δώστε κατάλληλο δειγματικό χώρο και προσδιορίστε το είδος του (πεπερασμένος, αριθμησίμως άπειρος, συνεχής). Επίσης, εξηγείστε γιατί πρόκειται για πειράματα τύχης.
   α. Μετράμε την ποσότητα παραθείου που απέμεινε σε φυτό σέλινου ένα μήνα μετά το ράντισμα.
   β. Μετράμε τον αριθμό α-σωματιδίων που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή σε ένα μήνα.
   γ. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και μετράμε πόσες φορές εμφανίσθηκε κεφαλή (κ).
   δ. Μετράμε τον αριθμό παράσιτων σε αλεπού που αιχμαλωτίσθηκε στο Μαίναλο
   ε. Μετράμε το χρόνο που χρειάσθηκε για να συνέλθει ένας ασθενής που βρίσκεται σε κατάσταση νάρκωσης.
   στ. Μετράμε τη διάμετρο ενός ροδάκινου που επιλέξαμε από την παραγωγή συγκεκριμένου παραγωγού.
   ζ. Μετράμε την ποσότητα καλίου που περιέχεται σε μια μπανάνα που επιλέξαμε από συγκεκριμένη παρτίδα συγκεκριμένου εισαγωγέα.
   η. Μετράμε πόσες κληρώσεις του Λαϊκού Λαχείου απαιτήθηκαν μέχρι να κληρωθεί ο αριθμός 24658.
   θ. Μετράμε τον αριθμό ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από τη γραμμή παραγωγής «Α» ενός εργοστασίου στη διάρκεια μιας νυκτερινής βάρδιας.
   ι. Μετράμε τη μηνιαία κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας μιας βιοτεχνίας.

2. Έστω Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου **Ω**. Να εκφρασθούν με κατάλληλες πράξεις και να παρασταθούν με διαγράμματα Venn τα ενδεχόμενα α) τουλάχιστον δύο από τα Α, Β, Γ πραγματοποιούνται και β) πραγματοποιούνται ακριβώς δύο από τα Α, Β, Γ.

3. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ένα σύστημα μεταφοράς ηλεκτρονικού σήματος από το Α στο Β. Τα εξαρτήματα 1, 2 και 3 έχουν δύο καταστάσεις, λειτουργούν ή δε λειτουργούν. Το σύστημα λειτουργεί, δηλαδή, το σήμα μεταφέρεται από το Α στο Β, μόνο αν υπάρχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι από το Α στο Β μέσω λειτουργούντων εξαρτημάτων. Δηλαδή, αν λειτουργούν συγχρόνως τα εξαρτήματα 1 και 2 ή αν λειτουργεί το εξάρτημα 3. α) Βρείτε κατάλληλο δειγματικό χώρο για τις δυνατές καταστάσεις των εξαρτημάτων του συστήματος. β) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα Λ_i : το εξάρτημα $i = 1, 2, 3$ λειτουργεί. Να εκφρασθεί το ενδεχόμενο *E*: «το σύστημα λειτουργεί», με πράξεις μεταξύ των ενδεχομένων Λ_i, $i = 1, 2, 3$.



4. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας να εμφανισθεί μια τουλάχιστον κεφαλή σε δύο ρίψεις ενός νομίσματος ο D' Alembert πρότεινε την ακόλουθη λύση. Ως δειγματικό χώρο του πειράματος θεώρησε το σύνολο *Ω={0, 1, 2}* όπου τα απλά

ενδεχόμενα *{0}, {1}, {2}* περιγράφουν πόσες φορές εμφανίσθηκε κεφαλή σε δύο ρίψεις. Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο *A={1,2},* ο D' Alembert ισχυρίσθηκε ότι

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{3}.$$

Θα μπορούσε όμως κάποιος να δώσει την εξής λύση: ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο *Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}* ενώ το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο *Α={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ}* και επομένως

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{4}.$$

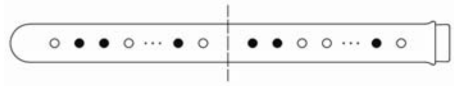
α) Ο D' Alembert έκανε λάθος!! Σκεφθείτε γιατί. β) Χρησιμοποιώντας το δειγματικό χώρο που όρισε ο D' Alembert να υπολογίσετε σωστά την $P(A)$.

5. Ποια είναι η πιθανότητα σε μια τάξη k φοιτητών, ένας συγκεκριμένος φοιτητής (από τους k), να έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους k-1 φοιτητές. Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και ότι $k \le 365$.

6. **Το πρόβλημα του Chevalier de Mere:** Ποιο είναι πιο πιθανό, ότι θα φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή ότι θα φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές.

7. Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις αδενίνη, κυτοσίνη, γουανίνη και θυμίνη αντίστοιχα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους r αν σε αυτό υπάρχουν r_1 στοιχεία ίσα με A, r_2 στοιχεία ίσα με G, r_3 στοιχεία ίσα με C και r_4 ίσα με T ($r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$). Ας υποθέσουμε ότι όλες οι ακολουθίες (σειρές, συνθέσεις) τέτοιου τύπου έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει μια ακολουθία, για την οποία τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις να είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί (π.χ. AA..ACC…CTT…TGG…G ή TT…TAA…AGG…GCC…C, κτλ).

8. Σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα υπάρχουν *2n* κόκκοι άμμου από τους οποίους οι *n* είναι μαύροι και οι *n* άσπροι. Αναταράσσουμε τον σωλήνα με δύναμη. Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο είδη κόκκων να διαχωρισθούν πλήρως (ως προς το χρώμα).



9. Σε μια συγκεκριμένη δασική περιοχή ζουν 300 ζώα που ανήκουν σε προστατευόμενο είδος. Μια επιστημονική ομάδα εντοπίζει τυχαία 100 από τα ζώα αυτά, τα σημαδεύει και τα αφήνει ελεύθερα. Μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα, εντοπίζονται εκ νέου 100 ζώα. Ποια είναι η πιθανότητα 10 ακριβώς από τα 100 ζώα να είναι σημαδεμένα;

10. Σε μια οικογένεια με 3 παιδιά η μητέρα έχει αγοράσει τρία δώρα. Ζητάει από τα παιδιά να γράψουν σε ένα χαρτί ποιο από τα τρία δώρα θέλει το καθένα (χωρίς να ξέρει το ένα παιδί ποιο δώρο διάλεξε το άλλο). Ποια είναι η πιθανότητα α) να διαλέξουν διαφορετικά δώρα β) τουλάχιστον δύο να διαλέξουν το ίδιο δώρο.

11. Από εξετάσεις που έγιναν σε 2000 ζώα μιας κτηνοτροφικής μονάδας, διαπιστώθηκε ότι 400 είχαν προσβληθεί από μια ασθένεια Α, 320 είχαν

προσβληθεί από μια ασθένεια Β ενώ 80 από αυτά είχαν προσβληθεί και από την ασθένεια Α και από την ασθένεια Β. Θεωρώντας ότι οι 2000 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθεί η πιθανότητα σε ένα ζώο της κτηνοτροφικής μονάδας που επιλέγεται τυχαία να διαπιστωθεί ότι έχει προσβληθεί α) από την ασθένεια Α β) από την ασθένεια Β γ) και από τις δύο ασθένειες δ) τουλάχιστον από μια από τις δύο ασθένειες ε) από την ασθένεια Α, όχι όμως από την ασθένεια Β στ) από την ασθένεια Β, όχι όμως από την ασθένεια Α και ζ) ακριβώς από μία από τις δύο ασθένειες.

12. Εξετάσθηκαν 800 ζώα για να διαπιστωθεί αν είναι υγιή ή άρρωστα. Επίσης, για κάθε ζώο καταγράφηκε το φύλο του. Τα αποτελέσματα των εξετάσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Υγιή	Άρρωστα
Αρσενικά	150	350
Θηλυκά	80	220

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: το ζώο που εξετάσθηκε είναι υγιές

B: το ζώο που εξετάσθηκε είναι αρσενικό.

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα και θεωρώντας ότι οι 800 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B, AB, A', B', $A'B'$, $A'B$, AB', $A'B \cup AB'$, $AB \cup A'B'$.

13. Ένας οργανισμός ελέγχου ποιότητος γεωργικών προϊόντων έχει ορίσει τέσσερα επίπεδα ποιότητας α, β, γ και δ. Κάθε προϊόν κατατάσσεται σε ένα μόνο από τα τέσσερα επίπεδα. Από στατιστικά στοιχεία που έχουν συγκεντρωθεί, έχει εκτιμηθεί ότι τα δύο πρώτα επίπεδα εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα ενώ το τρίτο και τέταρτο επίπεδο εμφανίζονται με τριπλάσια και πενταπλάσια πιθανότητα από το πρώτο αντίστοιχα. Για ένα προϊόν που επιλέγεται τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να κατατάσσεται i) στο επίπεδο α ii) στο επίπεδο β iii) στο επίπεδο γ iv) στο επίπεδο δ v) στο επίπεδο α ή β vi) στο επίπεδο α ή β ή δ και vii) στο επίπεδο γ και δ.

14. Η πιθανότητα σε ένα έτος να συμβεί σεισμός έντασης πάνω από 6.3 βαθμούς της κλίμακας ρίχτερ σε μια σεισμογόνο περιοχή είναι 0.02. Η αντίστοιχη πιθανότητα να πληγεί η περιοχή από καταιγίδα είναι 0.10, ενώ υπάρχει πιθανότητα 0.01 σε διάρκεια ενός έτους να εμφανισθούν και τα δύο φαινόμενα. Να υπολογισθούν η πιθανότητα, σε ένα έτος, η περιοχή να πληγεί α) μόνο από σεισμό β) μόνο από καταιγίδα γ) τουλάχιστον από ένα από τα δύο φαινόμενα και δ) από κανένα από τα δύο φαινόμενα.

15. *(Συνέχεια του Παραδείγματος 3.3.4)*. Στο Παράδειγμα 3.3.4 βρήκαμε ότι η πιθανότητα ένα spam email που φθάνει στον mail server του Πανεπιστημίου Αιγαίου να περιέχει τη λέξη «Rolex» είναι 0.2, να περιέχει τη λέξη «offer» είναι 0.5 και να περιέχει και τη λέξη «Rolex» και τη λέξη «offer» είναι 0.1. Ποια είναι η πιθανότητα ένα spam email που φθάνει στον mail server του Πανεπιστημίου Αιγαίου να περιέχει α) τουλάχιστον μία από τις δύο λέξεις β) καμία από τις δύο λέξεις γ) ακριβώς μία από τις δύο λέξεις.

16. Ας θεωρήσουμε ότι 8 φοιτήτριες και 4 φοιτητές κάθονται τυχαία σε 12 καθίσματα. Ποια είναι η πιθανότητα α) όλοι οι φοιτητές να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις β) κανένας φοιτητής να μην κάθεται δίπλα σε άλλο φοιτητή γ) τουλάχιστον ένας φοιτητής να κάθεται δίπλα σε άλλο φοιτητή.

17. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με κ άτομα. Μέχρι να φθάσει στο τέρμα κάνει ν στάσεις (συμπεριλαμβανομένου του τέρματος). Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να κατέβηκαν περισσότερα από ένα άτομα ($1 \leq k \leq \nu$).

18. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρνουμε κάθε φορά διαφορετική ένδειξη από την προηγούμενη.

19. Μια επιτροπή συγκροτείται από 2 Γεωπόνους και 3 Μηχανικούς που επιλέγονται από 5 Γεωπόνους και 7 Μηχανικούς. Αν όλες οι συνθέσεις της επιτροπής που μπορούν να προκύψουν είναι εξίσου πιθανές, ποια είναι η πιθανότητα α) ένας συγκεκριμένος Μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε στην επιτροπή β) δύο συγκεκριμένοι Γεωπόνοι να μην συμμετέχουν στην επιτροπή.