Πώς απαριθμούμε;

Πριν υιοθετηθεί και καθιερωθεί ως τρόπος ταυτοποίησης το δακτυλικό αποτύπωμα[1], ο Γάλλος εγκληματολόγος Alphonse Bertillon (1853-1914) είχε προτείνει μια μέθοδο ταυτοποίησης που, μεταξύ άλλων, βασιζόταν σε έντεκα ανατομικά χαρακτηριστικά (ύψος, περίμετρος κεφαλής, μήκος αυτιού, κ.ά.)[2]. Σύμφωνα με το σύστημα Bertillon (έτσι ονομάζεται αυτή η μέθοδος), η τιμή κάθε χαρακτηριστικού κατατάσσεται/ ταξινομείται σε μια από τρεις κλάσεις τιμών, small (s), medium (m), large (l) και έτσι σε κάθε άτομο αντιστοιχίζεται μια 11-άδα συμβόλων, s, m και l. Σε κάθε θέση μιας τέτοιας 11-άδας, αντιστοιχεί ένα ανατομικό χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, θα μπορούσε στην 1η θέση να αντιστοιχεί το ύψος, στη 2η η περίμετρος της κεφαλής, στην 3η το μήκος του αυτιού, κ.ο.κ.. Συνεπώς, για κάθε τέτοια 11-άδα συμβόλων, π.χ.

$$s,\ s,\ m,\ s,\ l,\ m,\ s,\ l,\ m,\ s,\ s$$

έχει σημασία όχι μόνο ποια σύμβολα και πόσες φορές το καθένα εμφανίσθηκε αλλά και σε ποιες θέσεις αυτά εμφανίσθηκαν. Παρότι το σύστημα Bertillon εθεωρείτο αξιόπιστο σύστημα ταυτοποίησης/αναγνώρισης και γι' αυτό υιοθετήθηκε και χρησιμοποιήθηκε από πολλές χώρες για τουλάχιστον δύο δεκαετίες, ένα θέμα για το οποίο είχε δεχθεί κριτική αφορούσε το πόσο πιθανόν είναι να βρεθούν δύο τουλάχιστον άνθρωποι με κοινά και τα έντεκα αυτά ανατομικά χαρακτηριστικά. Άραγε, πόσες είναι οι διαφορετικές 11-άδες συμβόλων που είναι δυνατόν να προκύψουν από το σύστημα Bertillon και επομένως πόσο πληθυσμό αρκεί να έχει μια περιοχή ώστε να είναι βέβαιο ότι τουλάχιστον δύο άτομα από αυτή την περιοχή θα έχουν ίδια 11-άδα συμβόλων;

Για να απαντήσουμε στα προηγούμενα ερωτήματα πρέπει προφανώς, να μπορέσουμε με κάποιο τρόπο **να απαριθμήσουμε** όλες τις διαφορετικές διατεταγμένες *11-άδες*, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11})$, που μπορούν να δημιουργηθούν από στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$. Παρατηρείστε ότι δεν ενδιαφέρει και δε ζητείται ποιες είναι όλες αυτές οι διατεταγμένες *11-άδες* αλλά μόνο **πόσες είναι**.

Στη συνέχεια, όταν θα μάθουμε πώς να υπολογίζουμε πιθανότητες, θα διαπιστώσουμε ότι κατά την ανάλυση πιθανοθεωρητικών προβλημάτων, συχνά εμφανίζονται διάφορα ***προβλήματα απαρίθμησης*** που πρέπει να αντιμετωπίσουμε. Σκεφθείτε το πολύ απλό παράδειγμα όπου κάποιος μας ρωτάει *«ποια είναι η πιθανότητα να έρθει κεφαλή αν ρίξω ένα αμερόληπτο νόμισμα μια φορά»*. Αβίαστα απαντάμε ότι αυτή η πιθανότητα είναι $1/2$ και ουσιαστικά αυτό που κάνουμε (διαισθητικά και χωρίς να απαιτείται να έχουμε παρακολουθήσει κάποια μαθήματα πιθανοτήτων) είναι να απαριθμήσουμε πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα κατά τη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος, δηλαδή, να απαριθμήσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$[3] και επίσης να απαριθμήσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των ευνοϊκών αποτελεσμάτων, δηλαδή του υποσυνόλου $A = \{\mathrm{K}\}$ του Ω. Ανάλογα σκεπτόμενοι, υπολογίζουμε ότι κατά τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η πιθανότητα να έρθει, για παράδειγμα, 5 ή 6 είναι $2/6$. Αυτό που πάλι χρειάσθηκε να κάνουμε ήταν να απαριθμήσουμε το πλήθος των στοιχείων δύο συνόλων, του συνόλου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και του υποσυνόλου του, $A = \{5, 6\}$.

---

[1] *Έγινε στις αρχές του εικοστού αιώνα*

[2] *Η μέθοδος Bertillon είναι «τριπλή», δηλαδή, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τρεις συνιστώσες. Τα έντεκα ανατομικά στοιχεία αποτελούν τη μια από αυτές.*

[3] *Με «Κ» συμβολίζουμε το αποτέλεσμα «Κεφαλή» και με «Γ» το αποτέλεσμα «Γράμματα».*

Είναι επομένως χρήσιμο **να μάθουμε πώς να απαριθμούμε!**

Βέβαια, θα μπορούσε κάποιος να σκεφθεί ότι το πρόβλημα της απαρίθμησης του πλήθους των στοιχείων ενός (πεπερασμένου) συνόλου είναι πολύ απλό αφού θα μπορούσαμε, με ένα συστηματικό τρόπο, να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του και στη συνέχεια να μετρήσουμε πόσα είναι, δηλαδή, να κάνουμε αυτό που κάναμε προηγουμένως στα παραδείγματα με το νόμισμα και το ζάρι. Όμως, αυτός ο τρόπος προσέγγισης των προβλημάτων απαρίθμησης θα ήταν πρακτικά εφικτός μόνο για σύνολα που πρακτικά μπορεί να γίνει πλήρης καταγραφή των στοιχείων τους δηλαδή για σύνολα με λίγα στοιχεία. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η απάντηση στην ερώτηση *«πόσες είναι οι διαφορετικές 11-άδες συμβόλων που είναι δυνατόν να προκύψουν από το σύστημα Bertillon», είναι* 177147. Συμφωνείτε, νομίζω, ότι δεν καταγράφονται εύκολα, και σε λογικό χρόνο, όλες αυτές οι *11-άδες*!

Τα προβλήματα απαρίθμησης απαιτούν επομένως διαφορετικές (από την πλήρη καταγραφή) προσεγγίσεις. Για το σκοπό αυτό έχει αναπτυχθεί μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα (και γοητευτική) περιοχή των Μαθηματικών, η ***Συνδυαστική (Combinatorics)*** ή ***Συνδυαστική Ανάλυση (Combinatorial Analysis)*** που ως κύριο αντικείμενο έχει αυτό ακριβώς, την ανάπτυξη ***μεθόδων απαρίθμησης (enumeration methods/counting rules)***, δηλαδή, τεχνικών υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή υποσυνόλων τους που έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, χωρίς να απαιτείται η πλήρης καταγραφή των στοιχείων τους.

Στη συνέχεια αυτής της *Ενότητας*, θα γνωρίσουμε κάποια πολύ βασικά εργαλεία και αποτελέσματα της *Συνδυαστικής* που μας είναι απαραίτητα για να κατανοήσουμε τα θέματα *Πιθανοτήτων* που εξετάζουμε στην *Ενότητα* που ακολουθεί *(Η Έννοια και Βασικές Ιδιότητες της Πιθανότητας)*. Ειδικότερα, θα μάθουμε πώς μπορούμε να απαριθμούμε εφαρμόζοντας την ***πολλαπλασιαστική αρχή*** και πώς μπορούμε να αναγνωρίζουμε και να απαριθμούμε ειδικούς σχηματισμούς στοιχείων όπως, ***μεταθέσεις, διατάξεις*** και ***συνδυασμούς***.

Η Πολλαπλασιαστική Αρχή (Multiplication Principle)

- ***Πρόκειται να φυτέψετε σε μια σειρά μια ελιά (Ε), μια νεραντζιά (Ν), μια πορτοκαλιά (Π) και μια λεμονιά (Λ) ώστε να δημιουργήσετε μια δενδροστοιχία τεσσάρων δένδρων. Άραγε, πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για τη δημιουργία της δενδροστοιχίας (για να αποφασίσετε, δηλαδή, τη σειρά με την οποία θα φυτέψετε τα δένδρα).***

Ας σκεφτούμε απλά: για την $1^η$ θέση της δενδροστοιχίας έχουμε 4 διαφορετικές επιλογές (μπορεί να φυτευτεί οποιοδήποτε από τα τέσσερα δένδρα, Ε, Ν, Π και Λ). Οποιαδήποτε και αν είναι η επιλογή μας για την $1^η$ θέση, για τη $2^η$ έχουμε 3 διαφορετικές επιλογές αφού το ένα από τα τέσσερα δένδρα έχει ήδη φυτευτεί στην $1^η$ θέση). Επομένως, για τις δύο πρώτες θέσεις έχουμε $4 \cdot 3 = 12$ διαφορετικές επιλογές. Οποιαδήποτε (από τις 12) και αν είναι η επιλογή μας για τις δύο πρώτες θέσεις, για την $3^η$ θέση προφανώς έχουμε 2 διαφορετικές επιλογές, άρα για τις τρεις πρώτες θέσεις έχουμε $12 \cdot 2 = 24$ διαφορετικές επιλογές. Τέλος, οποιαδήποτε (από τις 24) και αν είναι η επιλογή μας για τις τρεις πρώτες θέσεις, για την $4^η$ θέση προφανώς έχουμε μόνο 1 επιλογή, επομένως η δενδροστοιχία μπορεί να δημιουργηθεί με $24 \cdot 1 = 24$ διαφορετικούς τρόπους.

Οδηγηθήκαμε στη σωστή απάντηση σκεπτόμενοι απλά και με επίκληση της κοινής λογικής μόνο. Στην πραγματικότητα, εργαζόμενοι με αυτόν τον προφανή/απλό τρόπο, εφαρμόσαμε μια βασική αρχή της *Συνδυαστικής*, την ***πολλαπλασιαστική αρχή***!

Αν κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου,
α) η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωρισθεί σε κ διαφορετικά βήματα τα οποία πρέπει να εκτελεσθούν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και
β) το πλήθος των δυνατών επιλογών σε κάθε βήμα είναι πλήρως καθορισμένο όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων βημάτων,
τότε η απαρίθμηση μπορεί να γίνει με χρήση της ***πολλαπλασιαστικής αρχής*** η οποία διατυπώνεται ως εξής:

«Αν το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του α_1, το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$, το στοιχείο α_κ μπορεί να επιλεγεί με ν_κ διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά, κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot ... \cdot \nu_\kappa$ τρόπους.»

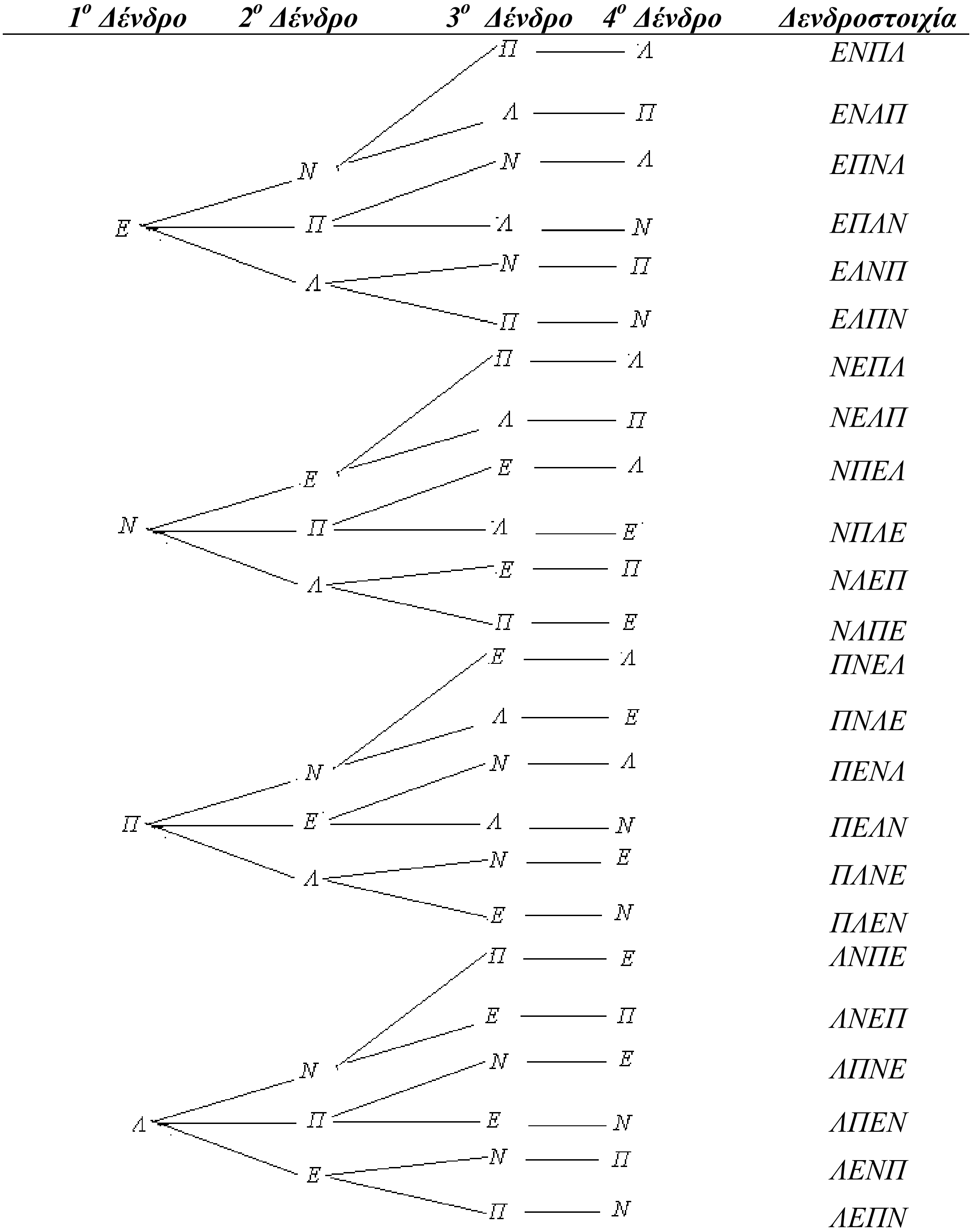
Ας δούμε τώρα πώς, χρησιμοποιώντας την *πολλαπλασιαστική αρχή*, μπορούμε να απαντήσουμε στο εισαγωγικό πρόβλημα *(αριθμός 11-άδων που δημιουργούνται με το σύστημα ταυτοποίησης Bertillon)*.

Σκεπτόμαστε και πάλι απλά: για την 1^{η} θέση της διατεταγμένης *11-άδας* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11})$, δηλαδή για το στοιχείο α_1, έχουμε 3 διαφορετικές επιλογές (αφού μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$). Για κάθε επιλογή που κάνουμε για το α_1, προφανώς οι διαφορετικές επιλογές για τη 2^{η} θέση, δηλαδή για το α_2, είναι και πάλι 3 (και το 2^{o} στοιχείο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$). Ομοίως σκεπτόμενοι, για κάθε επιλογή των δύο πρώτων στοιχείων, α_1, α_2, υπάρχουν και πάλι 3 διαφορετικές επιλογές για το α_3, κ.ο.κ.. Επομένως, σύμφωνα με την *πολλαπλασιαστική αρχή*, όλες οι διαφορετικές *11-άδες* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11})$ που μπορούν να δημιουργηθούν από στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$ είναι $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot .... \cdot 3}_{11} = 3^{11}$, δηλαδή, 177147. Άρα, αν μια περιοχή έχει 177148 κατοίκους είναι βέβαιο ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο κάτοικοι με ίδιες *11-άδες* συμβόλων *s, m* και *l* του *συστήματος ταυτοποίησης Bertillon.*

Η απάντηση στο πρόβλημα που ακολουθεί, είναι 10000. Σκεφθείτε γιατί.

- ***Για να ενεργοποιηθούν/απενεργοποιηθούν κάποιες ηλεκτρονικές συσκευές και κάρτες (κινητά τηλέφωνα, συστήματα συναγερμού, κάρτες ATM τραπεζών, κ.ά.), πρέπει να πληκτρολογηθεί ένας τετραψήφιος κωδικός, δηλαδή, πρέπει να πληκτρολογηθούν, με συγκεκριμένη σειρά, τέσσερα ψηφία. Πόσοι διαφορετικοί τετραψήφιοι κωδικοί μπορούν να σχηματισθούν από τα δέκα ψηφία, 0, 1, 2,...,9;***

Σχόλιο: *Στο πρόβλημα με τις δενδροστοιχίες θα μπορούσαμε να απαντήσουμε καταγράφοντας (και μετρώντας) όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Στο Σχήμα-1 φαίνεται ένας τέτοιος συστηματικός τρόπος πλήρους καταγραφής. Μετρείστε στην τελευταία στήλη όλες τις δενδροστοιχίες. Είναι πράγματι 24, όσες υπολογίσαμε εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή. Βέβαια, η πλήρης καταγραφή είναι πρακτικά εφικτή γιατί οι* *διαφορετικές δενδροστοιχίες είναι λίγες, μόλις 24. Σκεφθείτε να έπρεπε να καταγράψουμε τις διαφορετικές δενδροστοιχίες που είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από 10 διαφορετικά δένδρα, δηλαδή, να έπρεπε να καταγράψουμε* $10\cdot 9\cdot 8\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$ *δενδροστοιχίες!! Όσο συστηματικοί και να είμαστε μάλλον θα δυσκολευόμασταν να τις καταγράψουμε όλες και στη συνέχεια να τις καταμετρήσουμε. Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή, υπολογίσαμε πόσες είναι πολύ πιο εύκολα! Παρατηρείστε, τέλος, ότι ο τρόπος καταγραφής που φαίνεται στο Σχήμα-1 (δενδροδιάγραμμα), ουσιαστικά αποτελεί σχηματική αναπαράσταση της πολλαπλασιαστικής αρχής!*



Σχήμα-1

Επισημαίνουμε ότι η *πολλαπλασιαστική αρχή* βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα απαρίθμησης *k-άδων* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ που είναι διατεταγμένες, ή αλλιώς, στην απαρίθμηση ακολουθιών *k* στοιχείων (ενεργειών, λειτουργιών, κτλ.), $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, που διατάσσονται σε μια σειρά, *1^ο^, 2^ο^, 3^ο^, ..., k^ο^* . Και στα τρία παραδείγματα που είδαμε προηγουμένως, αυτό ακριβώς κάναμε. Διατεταγμένες *k-άδες* απαριθμήσαμε. Στο πρόβλημα με το *σύστημα ταυτοποίησης Bertillon,* υπολογίσαμε πόσες διαφορετικές *διατεταγμένες 11-άδες* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11})$ μπορούν να δημιουργηθούν από στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$, στο πρόβλημα με τις δενδροστοιχίες, πόσες διαφορετικές *διατεταγμένες 4-άδες* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ από στοιχεία του συνόλου $\{Ε, Ν, Π, Λ\}$ και στο πρόβλημα με τους τετραψήφιους κωδικούς ηλεκτρονικών συσκευών και καρτών, πόσες διαφορετικές *διατεταγμένες 4-άδες* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ από στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, ..., 9\}$.

Παρατηρείστε ότι στο πρόβλημα με τις *11-άδες ταυτοποίησης Bertillon*, για τη δημιουργία μιας *11-άδας,* υπάρχει η δυνατότητα οποιοδήποτε από τα στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$ να μπορεί να επιλεγεί περισσότερες από μία φορές. Το ίδιο συμβαίνει και στο πρόβλημα με τους τετραψήφιους κωδικούς. Στο πρόβλημα με τις δενδροστοιχίες δεν υπάρχει αυτή η δυνατότητα. Για τη δημιουργία μιας διατεταγμένης τετράδας (δενδροστοιχίας) υπάρχει ο περιορισμός ότι ένα δένδρο που ήδη έχει επιλεγεί σε κάποιο βήμα, δε μπορεί να επιλεγεί και πάλι σε επόμενο βήμα.

Διευκρινίζουμε, τέλος, ότι για να εφαρμόσουμε την *πολλαπλασιαστική αρχή*, τα στοιχεία, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, των διατεταγμένων *k-άδων* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, **δεν είναι απαραίτητο να επιλέγονται από το ίδιο σύνολο** (με ή χωρίς περιορισμούς). Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

- ***Για να δημιουργήσουμε ένα κρυπτογραφημένο μήνυμα που να αποτελείται από τρία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ένα ψηφίο, αποφασίσαμε στην πρώτη και την τέταρτη θέση να χρησιμοποιήσουμε σύμφωνα (όχι απαραιτήτως διαφορετικά), στη δεύτερη θέση ψηφίο (εκτός από το μηδέν) και στην τρίτη φωνήεν. Δηλαδή, το μήνυμα να είναι της μορφής, (Σύμφωνο, Ψηφίο, Φωνήεν, Σύμφωνο). Για παράδειγμα, Τ4ΕΠ. Πόσα διαφορετικά μηνύματα αυτής της μορφής μπορούμε να δημιουργήσουμε.***

Είναι προφανές ότι μας ζητείται να απαριθμήσουμε *4-άδες* και μάλιστα *διατεταγμένες.* Η διαδικασία της απαρίθμησης διακρίνεται σε 4 διαφορετικά βήματα. Στο 1^ο^ βήμα, για να αποφασίσουμε ποιο σύμφωνο θα επιλέξουμε, έχουμε 17 διαφορετικές επιλογές, όσα τα στοιχεία του συνόλου όλων των συμφώνων του ελληνικού αλφαβήτου, $\{Β, Γ, Δ, ..., Χ, Ψ\}$. Στο 2^ο^ βήμα έχουμε προφανώς 9 διαφορετικές επιλογές, όσα τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, ..., 9\}$, στο 3^ο^ βήμα έχουμε 7 διαφορετικές επιλογές όσα τα στοιχεία του συνόλου όλων των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου, $\{Α, Ε, Η, Ι, Ο, Υ, Ω\}$ και στο 4^ο^ βήμα έχουμε και πάλι 17 διαφορετικές επιλογές. Άρα, εφαρμόζοντας την *πολλαπλασιαστική αρχή,* συμπεραίνουμε ότι τα διαφορετικά μηνύματα της μορφής *(Σύμφωνο, Ψηφίο, Φωνήεν, Σύμφωνο)* που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι $17 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 17 = 18207$, δηλαδή, περισσότερα από 18 χιλιάδες!

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την απαρίθμηση σχηματισμών που δημιουργούνται με την επιλογή συγκεκριμένου αριθμού στοιχείων **από το ίδιο σύνολο** με ή χωρίς κάποιους περιορισμούς. Οι σχηματισμοί αυτοί ταξινομούνται σε δύο γενικές κατηγορίες, στις ***διατάξεις*** και τους ***συνδυασμούς***.

Απαριθμώντας Διατάξεις (k-permutations) και Μεταθέσεις (permutations)

Ας δούμε πάλι το πρόβλημα με τις δενδροστοιχίες, με μια διαφοροποίηση στο τελικό ερώτημα: ***πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για να δημιουργήσετε μια δενδροστοιχία των δύο δένδρων που θα επιλέξετε από ένα σύνολο τεσσάρων δένδρων*** $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ ***(από μια ελιά (Ε), μια νεραντζιά (Ν), μια πορτοκαλιά (Π) και μια λεμονιά (Λ)).***

Ζητείται και πάλι να απαριθμήσουμε *διατεταγμένες k-άδες*, ειδικότερα, ζητείται να απαριθμήσουμε όλες τις *διατεταγμένες 2-άδες* που μπορούν να δημιουργηθούν από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$. Δηλαδή τις *2-άδες*, *ΕΝ, ΝΕ, ΕΠ,…*

Κάθε τέτοιος σχηματισμός, δηλαδή κάθε *διατεταγμένη 2-άδα* που δημιουργείται από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$, ονομάζεται ***διάταξη των 4 ανά 2***.

Η απαρίθμηση μπορεί να γίνει σε 2 διακριτά διαδοχικά βήματα με καθορισμένο το πλήθος των επιλογών μας σε κάθε βήμα, επομένως, εφαρμόζοντας την *πολλαπλασιαστική αρχή,* εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός των διαφορετικών διατεταγμένων *2-άδων* που μπορούν να δημιουργηθούν από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ είναι $4 \cdot 3 = 12$. Παρατηρείστε ότι στο 1^o βήμα έχουμε 4 επιλογές ενώ στο 2^o έχουμε $4 - 1 = 3$ επιλογές, αφού το δένδρο (όποιο και να είναι) που επελέγη για να φυτευτεί στο 1^o βήμα, δε μπορεί να επιλεγεί και πάλι στο 2^o βήμα!

Οι δώδεκα αυτοί σχηματισμοί, δηλαδή, όλες οι διαφορετικές *διατεταγμένες 2-άδες* που δημιουργούνται από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$, ή αλλιώς, όλες οι ***διατάξεις των 4 ανά 2*** στοιχείων του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$, φαίνονται στο *Σχήμα-2*.

Ορισμός: Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο *ν* στοιχείων και *k* ένας θετικός ακέραιος αριθμός με $k \le \nu$. ***Διάταξη των ν* στοιχείων του *Χ* ανά *k*** ή απλούστερα, ***Διάταξη των ν ανά k***, ονομάζεται κάθε διατεταγμένη *k-άδα* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ που αποτελείται από *k* διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X.

Όταν $k = \nu$, οι διατάξεις των *ν* στοιχείων ανά *ν* ονομάζονται ***μεταθέσεις ν* στοιχείων**.

Θυμηθείτε το αρχικό πρόβλημα με τις δενδροστοιχίες των τεσσάρων δένδρων. Κάθε τέτοια δενδροστοιχία, αποτελεί μια ***μετάθεση των 4 στοιχείων*** του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$.

Ο αριθμός (to πλήθος) των ***διατάξεων των ν στοιχείων ανά k***, διεθνώς συμβολίζεται (συνήθως) με $(\nu)_k$, ή με P_k^n ή με ${}_nP_k$. Για τη συνέχεια επιλέξαμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό, $(\nu)_k$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι,

$$(\nu)_k = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot ... \cdot (\nu - k + 1), \qquad 1 \le k \le \nu$$

(Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής. Η απαρίθμηση ολοκληρώνεται σε k διαφορετικά βήματα, όπου, στο 1ο έχουμε ν διαφορετικές επιλογές, στο 2ο $\nu-1$ διαφορετικές επιλογές και στο kο έχουμε $\nu-(k-1)=\nu-k+1$ διαφορετικές επιλογές.)

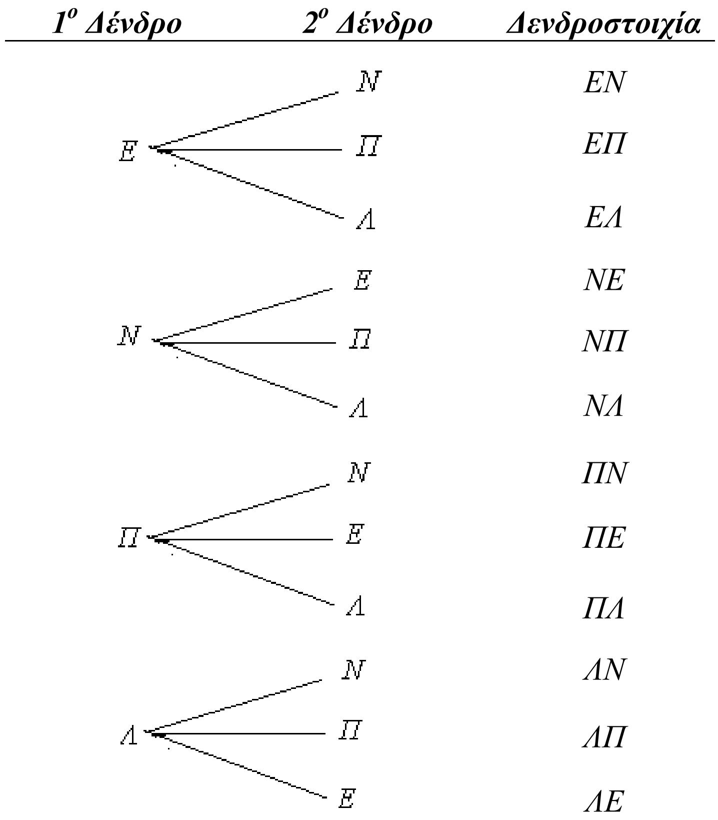
Έτσι, για τον αριθμό (το πλήθος) $(\nu)_\nu$ των διαφορετικών ***μεταθέσεων ν στοιχείων*** προφανώς ισχύει, $(\nu)_\nu = \nu\cdot(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdot\ldots\cdot(\nu-\nu+1)$**,** $\nu\geq 1$ ή

$$(\nu)_\nu = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-1)\cdot\nu=\nu!,\qquad \nu\geq 1$$

<u>Σημείωση:</u> Η ποσότητα $\nu!$ που ορίζεται ως το γινόμενο $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-1)\cdot\nu$, διαβάζεται «ν παραγοντικό». Χαρακτηριστικό του $\nu!$ είναι ότι αυξανομένου του ν, αυξάνεται πολύ γρήγορα. Επαληθεύστε, για παράδειγμα, ότι ενώ το 2! είναι ίσο με 2, το 5! είναι ίσο με 120, το 6! ίσο με 720 και το 10! ίσο με 3628800. Κατά μια εκδοχή μάλιστα, το θαυμαστικό (!) επελέγη στο συμβολισμό του παραγοντικού ακριβώς για να δηλώνει την έκπληξη/θαυμασμό για αυτή τη ραγδαία αύξηση. Σημειώνουμε, τέλος, ότι ως 0! ορίζεται η μονάδα, δηλαδή, $0!=1$.

Εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε ότι το πλήθος των ***διατάξεων των ν στοιχείων ανά k***, μπορεί με χρήση παραγοντικών να γραφεί ως εξής:

$$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!},\qquad 1\leq k\leq\nu$$

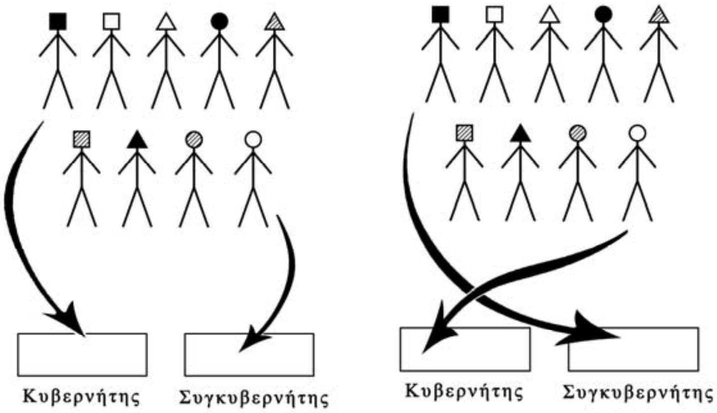


Σχήμα-2

Το παράδειγμα που ακολουθεί, το επιλέξαμε για να δούμε πώς μπορούμε να ερμηνεύουμε και να αντιλαμβανόμαστε υπό ένα ευρύτερο πρίσμα την έννοια της *διάταξης ν στοιχείων ανά k* και γενικότερα την έννοια της *διατεταγμένης k-άδας*.

- ***Το πλήρωμα μιας επανδρωμένης διαστημικής αποστολής που προγραμματίζεται να πραγματοποιηθεί, θα αποτελείται από τον κυβερνήτη και τον συγκυβερνήτη. Θεωρείστε ότι την εκπαίδευση για αυτές τις δύο θέσεις την έχουν ολοκληρώσει με επιτυχία 9 άτομα. Από πόσες διαφορετικές δυνατές συνθέσεις πληρώματος έχουν τη δυνατότητα οι υπεύθυνοι να επιλέξουν τη σύνθεση που πληρώματος.***

Μας ζητείται να υπολογίσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 άτομα από 9 ή μήπως μας ζητείται να υπολογίσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 άτομα από 9 και να τα καταγράψουμε/να τα τοποθετήσουμε/να τα διατάξουμε σε μια σειρά; Η απάντηση είναι το δεύτερο. Για παράδειγμα, άλλη σύνθεση πληρώματος είναι αυτή που φαίνεται στο *Σχημα-3$_α$* και άλλη αυτή που φαίνεται στο *Σχήμα-3$_β$*, παρότι και στις δύο περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τα ίδια δύο άτομα από τα 9. Δηλαδή, κάθε σύνθεση του πληρώματος αποτελεί μια ***διατεταγμένη** 2-άδα*, με την έννοια ότι «1^{ος} στη σειρά» σημαίνει κυβερνήτης και «2^{ος} στη σειρά» σημαίνει συγκυβερνήτης (θα μπορούσε και αντίστροφα!).



Σχήμα-3$_α$ *Σχήμα-3$_β$*

Η απάντηση στο ερώτημα είναι πλέον πολύ απλή. Ζητάμε το πλήθος των *διατάξεων των 9 ανά 2,* επομένως, οι ζητούμενες διαφορετικές συνθέσεις είναι, $(9)_2 = 9 \cdot 8 = 72$.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα:

- **Από 12 διαφορετικά αμινοξέα, πόσες διαφορετικές πολυπεπτιδικές αλυσίδες, αποτελούμενες από 5 διαφορετικά αμινοξέα η κάθε μια, είναι δυνατόν να δημιουργηθούν;**

Αν σκεφθούμε ότι τα αμινοξέα που κάθε φορά συμμετέχουν στη δημιουργία της αλυσίδας πρέπει να είναι διαφορετικά και ότι έχει σημασία όχι μόνο ποια αμινοξέα συμμετέχουν, αλλά και με ποια σειρά, είναι προφανές ότι η απάντηση είναι, $(12)_5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$.

Απαριθμώντας Επαναληπτικές Διατάξεις (k-permutations with repetitions)

Στον ορισμό των *διατάξεων ν στοιχείων* (ενός συνόλου *X*) *ανά k*, αλλά και στα σχετικά παραδείγματα που δώσαμε, επισημάναμε ότι στη δημιουργία μιας *διάταξης ν στοιχείων ανά k*, δεν υπάρχει δυνατότητα (δεν επιτρέπεται) να επιλέξουμε κάποιο στοιχείο (του συνόλου *X*) περισσότερες από μια φορές. Στην περίπτωση που υπάρχει αυτή η δυνατότητα, η *διάταξη ν στοιχείων ανά k* που δημιουργείται ονομάζεται ***επαναληπτική διάταξη των ν στοιχείων ανά k***.

Μπορούμε, έτσι, να δημιουργήσουμε *διατεταγμένες k-άδες* από τα στοιχεία ενός συνόλου που έχει λιγότερα από *k* στοιχεία αφού οποιοδήποτε στοιχείο επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές. Αυτό, για παράδειγμα, κάνουμε όταν συμπληρώνουμε ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ. Δημιουργούμε διατεταγμένες *13-άδες* από τα στοιχεία του συνόλου, $\{1, X, 2\}$ τα οποία μπορούν να επαναληφθούν μέχρι και 13 φορές το καθένα. Επομένως, με εφαρμογή της *πολλαπλασιαστικής αρχής*, εύκολα προκύπτει ότι μπορούν να δημιουργηθούν $\underbrace{3\cdot 3\cdot ....\cdot 3}_{13} = 3^{13} = 1594323$ διαφορετικές στήλες ΠΡΟΠΟ (των δεκατριών αγώνων). Γενικά, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι,

Ο αριθμός (το πλήθος) των ***επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k*** *είναι,* ν^k

(Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής. Η απαρίθμηση ολοκληρώνεται σε k διαφορετικά βήματα, όπου, στο 1^o *έχουμε ν διαφορετικές επιλογές, στο* 2^o *έχουμε επίσης ν διαφορετικές επιλογές καθώς και σε καθένα από τα επόμενα βήματα (μέχρι και το βήμα k) έχουμε ν επίσης επιλογές, αφού όποιο στοιχείο έχει ήδη χρησιμοποιηθεί σε κάποιο βήμα μπορεί και πάλι να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε επόμενο.)*

Τέτοιους σχηματισμούς, δηλαδή, ***επαναληπτικές διατάξεις των ν στοιχείων ανά k***, έχουμε ήδη απαριθμήσει (χωρίς να τους ονοματίσουμε) όταν μιλήσαμε για την *πολλαπλασιαστική αρχή*. Δείτε πάλι το πρόβλημα με τις *διατεταγμένες 11-άδες* του *συστήματος ταυτοποίησης Bertillon* που δημιουργούνται από στοιχεία του συνόλου $\{s, m, l\}$ και θυμηθείτε ότι καθένα από αυτά τα στοιχεία επιτρέπεται να επιλέγεται για τη δημιουργία *διατεταγμένης 11-άδας* περισσότερες από μια φορές. Σκεφθείτε επίσης πάλι, το πρόβλημα με τους τετραψήφιους κωδικούς ηλεκτρονικών συσκευών και καρτών που δημιουργούνται από στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα:

- **Πόσες διαφορετικές τριπλέτες νουκλεοτιδίων είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από τις τέσσερις βάσεις Αδενίνη (A), Κυτοσίνη (C), Γουανίνη (G) και Θυμίνη (T);**

Ζητείται να απαριθμήσουμε *διατεταγμένες 3-άδες* που δημιουργούνται από στοιχεία του συνόλου $\{A, C, G, T\}$, με τη δυνατότητα, οποιοδήποτε από αυτά να μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μια φορές. Δηλαδή, να απαριθμήσουμε διατεταγμένες *3-άδες* της μορφής, AAA, AAC, AAG, AAT, ACA, ACC, ACG, κτλ. Πρόκειται επομένως για *επαναληπτικές διατάξεις 4 στοιχείων ανά 3,* άρα είναι δυνατόν να δημιουργηθούν $4\cdot 4\cdot 4 = 4^3 = 64$ διαφορετικές τέτοιες τριπλέτες νουκλεοτιδίων**.**

Απαριθμώντας Μεταθέσεις των k ειδών στοιχείων (permutations with Categories)

Οι **διαφορετικές** *διατεταγμένες 4-άδες* που δημιουργούνται από τα 4 γράμματα Α, Λ, Λ και Ο, της λέξης ΑΛΛΟ, δηλαδή, οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί της, είναι οι εξής:

ΑΛΛΟ, ΑΛΟΛ, ΛΑΛΟ, ΛΑΟΛ, ΟΑΛΛ, ΛΛΑΟ, ΛΛΟΑ, ΑΟΛΛ, ΛΟΑΛ, ΛΟΛΑ, ΟΛΛΑ, ΟΛΑΛ.

Συνολικά δηλαδή, είναι 12 και όχι όσες οι *μεταθέσεις 4 στοιχείων,* $4!=24$, που ίσως περιμέναμε. Παρατηρείστε ότι αυτό συμβαίνει γιατί τα 4 στοιχεία που χρησιμοποιούμε για τη δημιουργία αυτών των *διατεταγμένων 4-άδων* **δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους**, με συνέπεια κάποιες *4-άδες* (από τις 24) να είναι ίδιες. Συγκεκριμένα, αν αντιμεταθέσουμε τα δύο ίδια στοιχεία οποιασδήποτε *4-άδας,* προφανώς, δεν προκύπτει κάτι καινούργιο (κάποια νέα-διαφορετική *4-άδα*) αλλά αναπαράγεται η ίδια την οποία φυσικά δεν (πρέπει να) καταμετράμε ως νέα.

Αυτοί οι σχηματισμοί, φυσικά, δεν ονομάζονται *μεταθέσεις των 4 στοιχείων* (γιατί δεν είναι, αφού οι *μεταθέσεις ν στοιχείων* δημιουργούνται από **διαφορετικά** μεταξύ τους στοιχεία) αλλά ονομάζονται ***μεταθέσεις των 3 ειδών στοιχείων***, με την έννοια ότι δημιουργούνται όχι από διαφορετικά στοιχεία αλλά από **διαφορετικά είδη** στοιχείων, εν προκειμένω από 3 είδη, το Α, το Λ και το Ο, **με τον περιορισμό** ότι το Α χρησιμοποιείται 1 φορά, το Λ 2 φορές και το Ο 1 φορά.

Τέτοια προβλήματα απαρίθμησης συναντώνται αρκετά συχνά σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές (κάποιες, ενδεικτικά, θα δούμε στη συνέχεια). Συμβαίνει, δηλαδή, να ενδιαφέρει **η απαρίθμηση των μεταθέσεων *ν* στοιχείων που ανήκουν σε *k* διαφορετικά είδη, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει έναν αριθμό ίδιων στοιχείων (τουλάχιστον ένα)**. Τέτοιοι σχηματισμοί, ονομάζονται ***μεταθέσεις των k ειδών στοιχείων***.

Ας δούμε και μια άλλη διατύπωση του ορισμού αυτών των σχηματισμών:

<u>Ορισμός:</u> Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $X=\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, k (διαφορετικών) στοιχείων (με $k \geq 2$). Κάθε διατεταγμένη *ν-άδα*, που δημιουργείται αν χρησιμοποιηθεί

- το στοιχείο x_1 συνολικά n_1 φορές
- το στοιχείο x_2 συνολικά n_2 φορές

  …
- το στοιχείο x_k συνολικά n_k φορές

όπου, $\nu = n_1 + n_2 + ... + n_k$, ονομάζεται ***μετάθεση των k ειδών στοιχείων***.

Ο αριθμός των διαφορετικών ***μεταθέσεων των k ειδών στοιχείων***, από τα οποία, τα n_1 είναι είδους 1, τα n_2 είναι είδους 2 , …, τα n_k είναι είδους k, συμβολίζεται με,

$$\binom{\nu}{n_1, n_2, ..., n_k}$$

και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{\nu!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}, \text{ όπου, } \nu = n_1 + n_2 + ... + n_k .$$

<u>Σημείωση:</u> Για την απόδειξη, μπορούμε να σκεφθούμε ως εξής: έστω x ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων των k ειδών στοιχείων που θέλουμε να υπολογίσουμε. Από κάθε τέτοια μετάθεση, αν διαφοροποιήσουμε με κάποιο τρόπο τα στοιχεία κάθε είδους (π.χ. αν τα αριθμήσουμε) παίρνουμε $n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$ *μεταθέσεις ν διαφορετικών στοιχείων (σκεφτείτε γιατί). Αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο* $x\cdot(n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!)$ *εκφράζει τον αριθμό όλων των μεταθέσεων ν (διαφορετικών) στοιχείων. Όμως, ο αριθμός αυτός είναι γνωστός και ίσος με ν!. Δηλαδή,* $x\cdot(n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!)=\nu!$ *άρα* $x={}^{\nu!}\!/_{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

Αν εφαρμόσουμε αυτόν τον τύπο για να υπολογίσουμε πόσοι είναι οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΑΛΛΟ, βρίσκουμε ότι πράγματι είναι $\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}=12$, δηλαδή, όσοι καταγράψαμε.

<u>Παρατήρηση:</u> *Προσέξτε ότι οι μεταθέσεις των k ειδών στοιχείων, όπως και οι επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά k (που είδαμε στα προηγούμενα), είναι διατεταγμένοι σχηματισμοί στοιχείων καθένα από τα οποία επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται. Όμως, στις μεταθέσεις των k ειδών στοιχείων* ***υπάρχει περιορισμός*** *στο μέγιστο αριθμό φορών που επαναλαμβάνεται καθένα στοιχείο κάτι το οποίο δε συμβαίνει στις επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά k, όπου δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος περιορισμός (εκτός, φυσικά, από τον προφανή ότι ο μέγιστος αριθμός φορών δε μπορεί να ξεπερνά το k).*

Ας δούμε κάποια παραδείγματα απαρίθμησης *μεταθέσεων των k ειδών στοιχείων*.

- ***<u>Τμήμα αλυσίδας του DNA:</u> Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις Αδενίνη, Κυτοσίνη, Γουανίνη και Θυμίνη αντίστοιχα. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε, πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους 14, αν σε αυτό υπάρχουν 3 στοιχεία ίσα με A, 4 στοιχεία ίσα με C, 2 στοιχεία ίσα με G και 5 ίσα με T.***

Ζητείται να απαριθμήσουμε διατεταγμένες (προφανώς) *14-άδες* που δημιουργούνται από τα στοιχεία του συνόλου $\{A, C, G, T\}$, καθένα από τα οποία επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται, με τον περιορισμό όμως, ότι το *A* επαναλαμβάνεται 3 φορές, το *C* 4 φορές, το *G* 2 φορές και το *T* 5 φορές. Για παράδειγμα, *14-άδες* όπως, *ACTAACTCGCGTTT, CTACTCGGTATCAT, AAATTTTTCCCCGG, κτλ.*

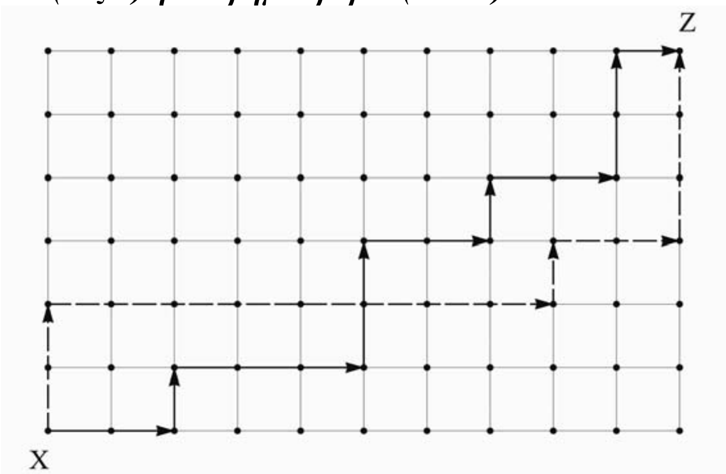
Πρόκειται, επομένως, για πρόβλημα απαρίθμησης ***μεταθέσεων 4 ειδών στοιχείων***, από τα οποία, τα $n_1=3$ είναι είδους *A*, τα $n_2=4$ είναι είδους *C*, τα $n_3=2$ είναι είδους *G* και τα $n_k=5$ είναι είδους *T*. Άρα, οι διαφορετικές συνθέσεις μήκους 14 που μπορούν να προκύψουν από 3 στοιχεία ίσα με *A*, 4 στοιχεία ίσα με *C*, 2 στοιχεία ίσα με *G* και 5 ίσα με *T* είναι $\frac{14!}{3!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 5!}=2522520$.

<u>Ένα ακόμη ερώτημα:</u> Σε πόσα από αυτά τα τμήματα της αλυσίδας του DNA τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί;

Από τα 2522520 διαφορετικά τμήματα DNA μήκους 14, που μπορούν να προκύψουν από 3 στοιχεία ίσα με *A,* 4 στοιχεία ίσα με *C*, 2 στοιχεία ίσα με *G* και 5 ίσα με *T,* ζητείται να απαριθμήσουμε εκείνα που είναι της μορφής,
AAACCCCGGTTTTT, CCCCGGAAATTTTT, AAAGGTTTTTCCCC, κ.ο.κ.

Αν συμβολίσουμε την ομάδα *AAA* με *A**, την ομάδα *CCCC* με *C**, την ομάδα *GG* με *G** και τέλος, την ομάδα *TTTTT* με *T**, είναι προφανές ότι ζητάμε τον αριθμό των μεταθέσεων των τεσσάρων στοιχείων, *A*, C*, G** και *T**. Η απάντηση επομένως είναι, $4! = 24$.

- ***<u>Διαδρομές σε κιγκλιδώματα:</u> Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν από το σημείο X στο σημείο Z, αν σε κάθε μετακίνηση, επιτρέπεται ένα βήμα ανατολικά (δεξιά) ή ένα βήμα[4] βόρια (πάνω).***



Παρατηρείστε ότι, κάθε επιτρεπτή διαδρομή από το ***X*** στο ***Z*** ορίζεται από μια διατεταγμένη αλληλουχία 16 «βημάτων» από τα οποία τα 10 ανατολικά (*A)* (προς τα δεξιά) και τα 6 βόρια *(B)* (προς τα πάνω). Για παράδειγμα, η διαδρομή που έχει σημειωθεί στο σχήμα με διακεκομμένα βέλη ορίζεται από τη *διατεταγμένη 16-άδα,*

B B A A A A A A A A B A A B B B

ενώ η διαδρομή που έχει σημειωθεί με μη διακεκομμένα βέλη ορίζεται από τη *διατεταγμένη 16-άδα*,

A A B A A A B B A A B A A B B A.

Παρατηρείστε ότι και στις δύο *16-άδες,* το σύμβολο *A* εμφανίζεται 10 φορές και το σύμβολο *B,* 6 φορές.

Η απάντηση πλέον είναι απλή. Πρόκειται για απαρίθμηση των ***μεταθέσεων 2 ειδών στοιχείων*** από τα οποία, τα $n_1 = 10$ είναι είδους *A* και τα $n_2 = 6$ είναι είδους *B*. Άρα υπάρχουν $\dfrac{\nu!}{n_1! \cdot n_2!} = \dfrac{16!}{10! \cdot 6!} = 8008$ διαφορετικές διαδρομές!

Ας δούμε μια ακόμη παραλλαγή του προβλήματος με τις δενδροστοιχίες.

- ***<u>Δενδροστοιχίες:</u> Πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για να δημιουργήσετε μια δενδροστοιχία που θα αποτελείται από 5 όμοιες ελιές (Ε), 3 όμοιες νεραντζιές (Ν), 5 όμοιες πορτοκαλιές (Π) και 7 όμοιες[5] λεμονιές (Λ).***

[4] *Ως βήμα ορίζεται ένα οριζόντιο ή ένα κατακόρυφο τμήμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων*
[5] *Δένδρα του ιδίου είδους τα θεωρούμε όμοια όταν έχουν ίδιο ύψος και ίδια κόμη*

Οι σχηματισμοί (δενδροστοιχίες) που μας ζητείται να απαριθμήσουμε, αποτελούνται ο καθένας από $\nu = 20$ διατεταγμένα (προφανώς) στοιχεία (δένδρα, εν προκειμένω), τα οποία δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά $n_1 = 5$ από αυτά είναι είδους *Ε*, $n_2 = 3$ είναι είδους *Ν*, $n_3 = 5$ είναι είδους *Π* και $n_4 = 7$ είναι είδους *Λ*. Ένας τέτοιος σχηματισμός, είναι για παράδειγμα, ο σχηματισμός,

ΕΛΛΕΠΕΝΛΝΠΛΕΛΠΛΠΕΠΝΛ.

Πρόκειται, επομένως, για απαρίθμηση των ***μεταθέσεων 4 ειδών στοιχείων*** από τα οποία, $n_1 = 5$ είναι είδους *Ε*, $n_2 = 3$ είναι είδους *Ν*, $n_3 = 5$ είναι είδους *Π* και $n_4 = 7$ είναι είδους *Λ*. Άρα για τη δημιουργία της δενδροστοιχίας, υπάρχουν $\dfrac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3\cdot n_4!} = \dfrac{20!}{5!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 7!} = 5587021440$ διαφορετικές επιλογές!

<u>Πολυωνυμικοί συντελεστές (multinomial coefficients):</u> Τα κλάσματα της μορφής,

$$\frac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!},$$

όπου, $\nu,\ n_1,\ n_2,\ \ldots, n_k$ φυσικοί αριθμοί με $\nu = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$,
ονομάζονται πολυωνυμικοί συντελεστές γιατί εμφανίζονται στον γενικό όρο,

$$\frac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k},$$

του αναπτύγματος, του $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^\nu$. Δηλαδή, ο αριθμός των *μεταθέσεων k ειδών στοιχείων* συνδέεται με ένα πολυωνυμικό ανάπτυγμα! Πρόκειται για πολύ ενδιαφέρουσα σχέση, αλλά δε θα επεκταθούμε.

- ***<u>Διαίρεση συνόλου:</u>*** Ως μια τελευταία εφαρμογή (μάλλον κατηγορία εφαρμογών) των πολυωνυμικών συντελεστών, $\dfrac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$ με $\nu = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, αναφέρουμε την εξής:

  Ένα σύνολο **ν διαφορετικών** στοιχείων μπορεί να διαιρεθεί/χωρισθεί σε ***k*** **διακριτά/ξένα ανά δύο** υποσύνολά του, $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_k$, μεγέθους, $n_1,\ n_2,\ \ldots, n_k$, αντίστοιχα, κατά $\dfrac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$ τρόπους.

  Σημειώνουμε ότι αναφερόμαστε σε διαίρεση συνόλου σε υποσύνολα που εμφανίζονται με συγκεκριμένη σειρά $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_k$, δηλαδή, που είναι διατεταγμένα, γι' αυτό και αποφύγαμε, όπως ίσως παρατηρήσατε, τον όρο διαμέριση συνόλου, όπου εκεί τα υποσύνολα δεν είναι διατεταγμένα. Ως ένα σχετικό παράδειγμα, δείτε το *Πρόβλημα-23* στο τέλος της *Ενότητας*.

Απαριθμώντας Συνδυασμούς (Combinations)

Σε όλες τις περιπτώσεις σχηματισμών στοιχείων που μελετήσαμε στα προηγούμενα, μας ενδιέφερε, όπως είδαμε, η ***διάταξη*** των στοιχείων τους. Υπάρχουν όμως προβλήματα απαρίθμησης σχηματισμών όπου η διάταξη των στοιχείων τους δεν ενδιαφέρει.

Για παράδειγμα, ας δούμε πάλι το πρόβλημα της επιλογής 2 δένδρων από ένα σύνολο τεσσάρων δένδρων $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ *(μια ελιά (Ε), μια νεραντζιά (Ν), μια πορτοκαλιά (Π) και μια λεμονιά (Λ))* που συζητήσαμε όταν μιλήσαμε για την απαρίθμηση *διατάξεων*. Θεωρείστε όμως τώρα, ότι θέλουμε να επιλέξουμε 2 δένδρα από τα τέσσερα του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$, **όχι για να δημιουργήσουμε μια δενδροστοιχία των 2 δένδρων**, αλλά για να τα χρησιμοποιήσουμε σε μια πρακτική άσκηση των φοιτητών στο θερμοκήπιο του πανεπιστημίου.

Παρατηρείστε ότι πλέον δεν προκύπτει από κάπου ότι για τις *2-άδες* των δένδρων που επιλέγουμε ενδιαφέρει οποιουδήποτε είδους διάταξη. Αυτό θα συνέβαινε όπως είδαμε, αν για παράδειγμα, επιλέγαμε τα δύο δένδρα για να δημιουργήσουμε μια δενδροστοιχία ή για να χρησιμοποιούσαμε το ένα σε ένα πείραμα (έστω Π1) και το άλλο σε ένα άλλο πείραμα (έστω Π2). Κάτι τέτοιο όμως δε φαίνεται να συμβαίνει. Έτσι, ο σχηματισμός π.χ. *ΕΝ* δε διαφοροποιείται από το σχηματισμό *ΝΕ*. Τέτοιες περιπτώσεις σχηματισμών στοιχείων, όπου **δεν ενδιαφέρει η διάταξη** των στοιχείων τους ονομάζονται ***συνδυασμοί***.

<u>Ορισμός:</u> Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο *ν* στοιχείων και *k* ένας θετικός ακέραιος αριθμός με $k \leq \nu$. ***Συνδυασμός των ν στοιχείων του Χ ανά k*** ή απλούστερα, ***<u>Συνδυασμός των ν ανά k</u>***, ονομάζεται κάθε υποσύνολο του X που έχει *k* στοιχεία, ή αλλιώς, κάθε *μη διατεταγμένη* συλλογή *k* διαφορετικών μεταξύ τους στοιχείων του X.

Οι σχηματισμοί του παραδείγματός μας ονομάζονται ***συνδυασμοί των 4 στοιχείων του συνόλου {Ε, Ν, Π, Λ} ανά 2,*** ή ***συνδυασμοί των 4 ανά 2***.

Το πρώτο ερώτημα που, φυσικά, γεννάται, αφορά τον αριθμό (το πλήθος) των *συνδυασμών των ν ανά k*. Ο αριθμός των ***συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k***, συμβολίζεται με $\binom{\nu}{k}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}, \qquad 1 \leq k \leq \nu$$

Ας δούμε την απόδειξη αυτού του τύπου ως μια άσκηση (παρουσιάζει ενδιαφέρον): Στο παράδειγμά μας, εύκολα μπορούμε να καταγράψουμε τους *συνδυασμούς των 4 στοιχείων του συνόλου* $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ *ανά 2*. Είναι προφανώς οι εξής έξι:

ΕΝ, ΕΠ, ΕΛ, ΝΠ, ΝΛ, ΠΛ.

Για να δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος τους, $\binom{4}{2}$, χωρίς να χρειασθεί να τους καταγράψουμε και να τους καταμετρήσουμε.

Ως πολύ καλά εξοικειωμένοι με την *πολλαπλασιαστική αρχή* (αυτό ουσιαστικά κάναμε μέχρι τώρα, δε μάθαμε να κάνουμε κάτι άλλο), ας τη χρησιμοποιήσουμε και πάλι.

Υπάρχουν 4 διαφορετικές επιλογές για το 1ο δένδρο και για κάθε μια από αυτές υπάρχουν 3 διαφορετικές επιλογές για το 2ο, επομένως, σύμφωνα με την *πολλαπλασιαστική αρχή,* μπορούν να δημιουργηθούν $4 \cdot 3 = 12$ διαφορετικές *2-άδες,* οι οποίες όμως είναι διατεταγμένες. Αυτό σημαίνει ότι η *2-άδα* που δημιουργείται π.χ. από τα στοιχεία *Ε* και *Ν*, έχει μετρηθεί (στις 12) και ως *ΕΝ* και ως *ΝΕ*. Δηλαδή, κάθε *2-άδα* στοιχείων του συνόλου $\{Ε, Ν, Π, Λ\}$, έχει μετρηθεί 2 φορές, όσες είναι οι *μεταθέσεις 2 στοιχείων* ($2! = 1 \cdot 2 = 2$). Άρα, το πλήθος των διαφορετικών *2-άδων* που δεν ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων τους, δηλαδή, το πλήθος των διαφορετικών *συνδυασμών των 4 ανά 2*, είναι,

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{(4)_2}{2!} = 6.$$

Είναι φανερό, ότι ο αριθμός των *συνδυασμών* συνδέεται με τον αριθμό των αντίστοιχων *διατάξεων*. Για να ανιχνεύσουμε καλύτερα αυτή τη σχέση ώστε να την κατανοήσουμε και καλύτερα, ας δούμε την παραπάνω διαδικασία και αντίστροφα. Παρατηρείστε στον πίνακα που ακολουθεί πώς/με ποια διαδικασία προκύπτουν οι *διατάξεις* από τους *συνδυασμούς*.

*Οι **Συνδυασμοί** των 4 στοιχείων του συνόλου {Ε, Ν, Π, Λ} ανά 2.*	*Οι **Μεταθέσεις** που προκύπτουν από κάθε συνδυασμό 2 στοιχείων*	*Οι **Διατάξεις** των 4 στοιχείων του συνόλου {Ε, Ν, Π, Λ} ανά 2*
{Ε, Ν}	{Ε, Ν} {Ν, Ε}	{Ε, Ν} {Ν, Ε} {Ε, Π} {Π, Ε} {Ε, Λ} {Λ, Ε} {Ν, Π} {Π, Ν} {Ν, Λ} {Λ. Ν} {Π, Λ} {Λ. Π}
{Ε, Π}	{Ε, Π} {Π, Ε}	
{Ε, Λ}	{Ε, Λ} {Λ, Ε}	
{Ν, Π}	{Ν, Π} {Π, Ν}	
{Ν, Λ}	{Ν, Λ} {Λ. Ν}	
{Π, Λ}	{Π, Λ} {Λ. Π}	
***6** Συνδυασμοί · **2** Μεταθέσεις ανά Συνδυασμό = **12** Διατάξεις*		

Είναι πλέον φανερό ότι: από κάθε *συνδυασμό ν ανά k*, δημιουργούνται *k!* μεταθέσεις των *k* στοιχείων του, που είναι *διατάξεις των ν ανά k*. Επομένως, ο αριθμός, $\binom{\nu}{k}$, των *συνδυασμών των ν ανά k*, συνδέεται με τον αριθμό, $(\nu)_k$, των *διατάξεων των ν ανά k*, με τη σχέση:

$$\binom{\nu}{k} \cdot k! = (\nu)_k$$

Δηλαδή, $\binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!}$. Και επειδή, ο αριθμός $(\nu)_k$ των *διατάξεων ν ανά k* μας είναι γνωστός, έχουμε,

$$\binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots (\nu - k + 1)}{k!} = \frac{\nu!}{k!(\nu - k)!}.$$

Σημείωση: *α) Επαληθεύστε ότι,* $\binom{\nu}{\nu}=1$, $\binom{\nu}{1}=\nu$ *και ότι* $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-k}$

β) Συμβατικά (γιατί συνδυαστική ερμηνεία δεν έχει), ορίζουμε, $\binom{\nu}{0}=1$

γ) Μπορείτε να αποδείξετε τη σχέση $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-k}$ με *συλλογισμούς συνδυαστικής και μόνο, δηλαδή, χωρίς πράξεις και τύπους;*

Ας δούμε μερικά παραδείγματα απαρίθμησης *συνδυασμών*.

- ***Από 8 άτομα, θέλουμε να επιλέξουμε τρία για να σχηματίσουμε μια τριμελή επιτροπή. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;***

Εφόσον δεν προκύπτει από κάπου ότι σε αυτούς τους σχηματισμούς των 3 στοιχείων (τριμελείς επιτροπές) μας ενδιαφέρει κάποιου είδους διάταξη, είναι προφανές ότι πρόκειται για απαρίθμηση των *συνδυασμών των 8 ανά 3*. Επομένως, η απάντηση είναι, $\binom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8}{3!}=56$. Δηλαδή, έχουμε 56 διαφορετικές επιλογές για να σχηματίσουμε μια τριμελή επιτροπή από μια ομάδα 8 ατόμων.

Ερώτηση: Ας αλλάξουμε, … λίγο, τη διατύπωση στο προηγούμενο παράδειγμα: ***από 8 άτομα, θέλουμε να επιλέξουμε τρία για να σχηματίσουμε μια τριμελή επιτροπή στην οποία ένα από τα τρία άτομα ορίζεται πρόεδρος, ένα αντιπρόεδρος και ένα γραμματέας. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;***

Τώρα οι σχηματισμοί που μας ζητείται να απαριθμήσουμε είναι διατεταγμένοι αφού με την απονομή διαφορετικών «τίτλων» στα τρία άτομα, προφανώς προκύπτει μια σχέση διάταξης μεταξύ τους (θυμηθείτε και το παράδειγμα με το πλήρωμα της διαστημικής αποστολής όταν μιλήσαμε για *διατάξεις*). Συνεπώς, η απάντηση τώρα είναι, $(8)_3=8\cdot 7\cdot 6=336$. Η … μικρή αλλαγή στη διατύπωση είχε σοβαρές μάλλον συνέπειες… Απλά, **ορίσθηκε άλλο πρόβλημα!!!**

- ***Στο πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού μαθήματος που παρακολουθείτε, ο καθηγητής σας δίνει 9 δημοσιευμένες εργασίες (papers) σχετικές με κάποιο θέμα που συζητήθηκε στο μάθημα και σας ανακοινώνει ότι πρέπει να τις μελετήσετε και ότι θα εξετασθείτε σε 5 από αυτές. Πόσες είναι οι δυνατές 5-άδες εργασιών, σε μια από τις οποίες θα εξεταστείτε;***

Είναι προφανές, ότι αυτό που ενδιαφέρει είναι μόνο σε ποιες 5 από τις 9 εργασίες θα εξετασθείτε και όχι με ποια σειρά. Επομένως κάθε *5-άδα* εργασιών από τις 9 είναι ένας *συνδυασμός των 9 ανά 5,* και άρα η απάντηση στο ερώτημα είναι,

$$\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!}=\frac{3024}{24}=126\,.$$

- ***Ένας κοινωνιολόγος ερευνητής, στο πλαίσιο μιας μελέτης, πρόκειται να επιλέξει, με βάση ένα σχέδιο τυχαίας δειγματοληψίας, 6 άτομα από μια ομάδα 20 ατόμων, από τα οποία τα 10 είναι άνδρες και τα υπόλοιπα 10 γυναίκες. α) Πόσες ομάδες των 6 ατόμων είναι δυνατόν να σχηματισθούν. β) Πόσες ομάδες των 6 ατόμων που αποτελούνται i) μόνο από άνδρες ii)***

μόνο από γυναίκες iii) από 3 άνδρες και 3 γυναίκες είναι δυνατόν να σχηματισθούν.

α) Πρόκειται προφανώς για τον αριθμό (το πλήθος) των διαφορετικών *συνδυασμών των 20 ανά 6*, επομένως η απάντηση είναι,

$$\binom{20}{6} = \frac{20!}{6!\cdot 14!} = \frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{6!} = \frac{27907200}{720} = 38760.$$

β_i) Η απάντηση είναι: με όσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 άνδρες από 10 και δεν μας ενδιαφέρει κάποιου είδους διάταξη, δηλαδή, με $\binom{10}{6} = \ldots = 210$ τρόπους.

β_{ii}) Όπως στο (β_i) ερώτημα, με $\binom{10}{6} = \ldots = 210$ τρόπους.

β_{iii}) Σκεπτόμενοι όπως στα προηγούμενα ερωτήματα, 3 άνδρες από 10, μπορούν να επιλέγουν με $\binom{10}{3} = \ldots = 120$ τρόπους. Το ίδιο και 3 γυναίκες από 10, μπορούν να επιλεγούν με $\binom{10}{3} = \ldots = 120$ τρόπους. Επομένως (σκεφθείτε γιατί) τρεις άνδρες και τρεις γυναίκες μπορούν να επιλεγούν με $\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{3} = 120\cdot 120 = 14400$ τρόπους.

<u>Διωνυμικοί συντελεστές (Binomial coefficients):</u> Οι αριθμοί $\binom{\nu}{k}$ ονομάζονται ***διωνυμικοί συντελεστές***, γιατί εμφανίζονται ως συντελεστές στο ανάπτυγμα της *ν-οστής* δύναμης του διωνύμου, $(x+y)$. Πιο, συγκεκριμένα, μπορεί να αποδειχθεί ότι,

$$(x+y)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x^k y^{\nu-k}, \text{ όπου } x,\ y\in R.$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα, γιατί αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Issac Newton.

Παρατηρείστε, ότι μέσω του τύπου του Νεύτωνα, οι αριθμοί $\binom{\nu}{k}$, που εκφράζουν το πλήθος των *συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k,* εμφανίζονται και στο διωνυμικό ανάπτυγμα!

Ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα αξιοποιείται σε πολλά και ποικίλα προβλήματα και εφαρμογές. Όμως δε θα επεκταθούμε. Ως ένα μόνο παράδειγμα, δείτε πώς, εφαρμόζοντας τον τύπο του Νεύτωνα για $x = y = 1$, μπορεί να αποδειχθεί η σχέση ,

$$2^\nu = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}.$$

*<u>Ερώτηση:</u> Όταν μιλήσαμε για τους **πολυωνυμικούς συντελεστές**,*

$$\frac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!},$$

αναφέραμε, μεταξύ άλλων, ότι:

Ένα σύνολο ***ν διαφορετικών*** *στοιχείων μπορεί να διαιρεθεί/χωρισθεί σε* ***k διακριτά/ξένα ανά δύο*** *υποσύνολά του,* $A_1, A_2, ..., A_k$*, μεγέθους,* $n_1, n_2, ..., n_k$*, αντίστοιχα, κατά* $\dfrac{\nu!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$ *τρόπους.*

Τι λέτε, για τους ***διωνυμικούς συντελεστές,***

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!},$$

*ισχύει κάτι ανάλογο****;***

Απαριθμώντας Επαναληπτικούς Συνδυασμούς (Combinations with repetition)

Από τον ορισμό των *συνδυασμών ν στοιχείων* (ενός συνόλου *X*) *ανά k*, είναι φανερό ότι για το σχηματισμό ενός *συνδυασμού ν στοιχείων ανά k*, δεν επιτρέπεται να επιλέξουμε κάποιο στοιχείο (του συνόλου *X*) περισσότερες από μια φορές. Στην περίπτωση που υπάρχει αυτή η δυνατότητα, ο *συνδυασμός ν στοιχείων ανά k* που δημιουργείται λέγεται ***επαναληπτικός συνδυασμός ν στοιχείων ανά k*** ή ***συνδυασμός με επανάληψη ν στοιχείων ανά k***

Μπορούμε, έτσι, να δημιουργήσουμε *συνδυασμούς k στοιχείων* από τα στοιχεία ενός συνόλου που έχει λιγότερα από *k* στοιχεία, αφού οποιοδήποτε στοιχείο επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές.

Για παράδειγμα, οι *επαναληπτικοί συνδυασμοί των 2 στοιχείων του συνόλου* $\{\alpha, \beta\}$ *ανά 4*, είναι οι εξής: *αααα, αααβ, ααββ, αβββ, ββββ.*

Είναι προφανές, αλλά το επισημαίνουμε, ότι η σειρά καταγραφής των στοιχείων δεν ενδιαφέρει (αφού πρόκειται για *συνδυασμούς*), δηλαδή, για παράδειγμα, η επιλογή *αααβ* είναι ίδια με την επιλογή *αβαα* ή με την *βααα,* κ.ο.κ.. Κάθε επιλογή καθορίζεται μόνο από το **ποια στοιχεία** και **πόσες φορές** το καθένα εμφανίζονται**.**

Ορισμός: Έστω *X* ένα πεπερασμένο σύνολο *ν* στοιχείων και *k* ένας θετικός ακέραιος αριθμός. ***Επαναληπτικός συνδυασμός των ν*** **στοιχείων του** ***X*** **ανά** ***k*** ή ***Συνδυασμός των ν*** **στοιχείων του** ***X*** **ανά** ***k με επανάληψη*** ή απλούστερα, ***Επαναληπτικός συνδυασμός των ν ανά k***, ονομάζεται κάθε επιλογή *k* στοιχείων του X, όπου επιτρέπεται κάποιο ή κάποια από τα στοιχεία του να χρησιμοποιηθούν περισσότερες από μια φορές.

Ο αριθμός (το πλήθος) των *επαναληπτικών συνδυασμών ν στοιχείων ανά k* συμβολίζεται με $\begin{bmatrix}\nu\\k\end{bmatrix}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{bmatrix}\nu\\k\end{bmatrix} = \binom{\nu+k-1}{k} = \frac{(\nu+k-1)!}{k!(\nu-1)!} = \frac{\nu\cdot(\nu+1)\cdot...\cdot(\nu+k-1)}{k!}, \qquad \nu \ge 1,\ k \ge 1$$

Για το παράδειγμά μας, ο τύπος αυτός δίνει ότι ο αριθμός των *επαναληπτικών συνδυασμών των 2 στοιχείων του συνόλου* $\{\alpha, \beta\}$ *ανά 4 είναι,* $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$, δηλαδή, πράγματι, όσοι καταγράψαμε.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα:

- ***Το ζαχαροπλαστείο της γειτονιάς σας, φτιάχνει σοκολατάκια γάλακτος, υγείας και άσπρης σοκολάτας. Αν ζητήσετε από τον υπάλληλο να σας συσκευάσει σε ένα σακουλάκι 15 σοκολατάκια, πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για να του υποδείξετε πόσα από το κάθε είδος να βάλει στο σακουλάκι.***

Πρόκειται για απαρίθμηση των *επαναληπτικών συνδυασμών των 3 στοιχείων του συνόλου {γάλακτος, υγείας, άσπρης} ανά 15,* αφού δεν ενδιαφέρει κάποιου είδους διάταξη και η επανάληψη επιτρέπεται (επιβάλλεται, μάλλον). Η απάντηση επομένως είναι, $\begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} = \binom{3+15-1}{15} = \binom{17}{15} = 136$.

Οι εφαρμογές των επαναληπτικών συνδυασμών είναι ποικίλες και ενδιαφέρουσες. Όμως, δε θα επεκταθούμε. Αναφέρουμε μόνο μια ακόμη: το πρόβλημα με τις ***διαδρομές σε κιγκλιδώματα*** που συζητήσαμε και στα προηγούμενα.

- ***Διαδρομές σε κιγκλιδώματα:* Ας θεωρήσουμε ένα κιγκλίδωμα που αποτελείται από ν οριζόντια και k κάθετα σύρματα. Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν από το σημείο X στο σημείο Z, αν σε κάθε μετακίνηση, επιτρέπεται ένα βήμα ανατολικά (δεξιά) ή ένα βήμα[6] βόρια (πάνω).**

Θα δείξουμε ότι, ο αριθμός των διαδρομών είναι, $\begin{bmatrix} \nu \\ k-1 \end{bmatrix} = \binom{\nu+k-2}{k-1}$.

Σκεπτόμαστε ως εξής: τα k κατακόρυφα σύρματα ορίζουν $k-1$ τμήματα επί των οριζόντιων διαδρομών. Το σημείο κλειδί σε αυτή την απόδειξη είναι να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμός των οριζόντιων τμημάτων **κάθε** δυνατής διαδρομής είναι ακριβώς $k-1$ και ότι η επιλογή αυτών των $k-1$ οριζόντιων τμημάτων επί των ν οριζόντιων συρμάτων καθορίζει μονοσήμαντα την κάθε διαδρομή. Καθένα από τα ν οριζόντια σύρματα μπορεί να επιλεγεί μέχρι και $k-1$ φορές. Άρα, ο συνολικός αριθμός των δυνατών διαδρομών είναι όσοι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν ανά $k-1$, δηλαδή, $\begin{bmatrix} \nu \\ k-1 \end{bmatrix} = \binom{\nu+k-1-1}{k-1} = \binom{\nu+k-2}{k-1}$.

Έτσι, για το κιγκλίδωμα που φαίνεται παραπάνω, όπου $\nu = 7$ και $k = 11$, οι δυνατές επιτρεπτές διαδρομές είναι,

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \binom{7+11-2}{11-1} = \binom{16}{10} = 8008.$$

[6] *Ως βήμα ορίζεται ένα οριζόντιο ή ένα κατακόρυφο τμήμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων*

Το αποτέλεσμα είναι πράγματι αυτό που περιμέναμε, δηλαδή, το ίδιο με αυτό που προέκυψε όταν προσεγγίσαμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πολυωνυμικούς συντελεστές!

Στον *Πίνακα-1* που ακολουθεί συνοψίζουμε, σε μορφή τυπολογίου (χρήσιμου πιστεύουμε), κάποιες βασικές πληροφορίες για τους σχηματισμούς που παρουσιάσαμε. Στην τελευταία στήλη του πίνακα δίνουμε την ερμηνεία των αντίστοιχων σχηματισμών με όρους ***Δειγματοληψίας***. Επ' αυτού, σε αυτό το σημείο, δε θα επεκταθούμε. Διευκρινίζουμε μόνο ότι ***δειγματοληψία με επανάθεση*** σημαίνει, ένα στοιχείο που επιλέγεται, επανατοποθετείται στον πληθυσμό πριν την επιλογή του επόμενου και έτσι υπάρχει η δυνατότητα να επιλεγεί και πάλι ενώ ***δειγματοληψία χωρίς επανάθεση*** σημαίνει ότι ένα στοιχείο που επιλέγεται δεν επανατοποθετείται στον πληθυσμό.

<table>
<tr><th colspan="2">Κριτήρια</th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><th>Ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής;</th><th>Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μια φορές;</th><th>Σχηματισμός</th><th>Αριθμός (πλήθος) Σχηματισμών</th><th>Ερμηνεία με όρους Δειγματοληψίας</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ΝΑΙ</td><td>ΟΧΙ</td><td>Διάταξη των ν ανά κ
$(1 \le k \le \nu)$</td><td>$(\nu)_k =$
$= \nu(\nu-1)...(\nu-k+1)$</td><td>Διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ΝΑΙ</td><td>Επαναληπτική Διάταξη των ν ανά κ †
$(\nu \ge 1,\ k \ge 1)$</td><td>ν^k</td><td>Διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία με επανάθεση</td></tr>
<tr><td>Μετάθεση των k ειδών στοιχείων με
$n_i,\ i = 1, 2, ..., k$
στοιχεία από κάθε είδος ‡.</td><td>$\binom{\nu}{n_1,\ n_2, ...,\ n_k} =$
$= \dfrac{\nu!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$
Όπου,
$\nu = n_1 + n_2 + ... + n_k$</td><td>—</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ΟΧΙ</td><td>ΟΧΙ</td><td>Συνδυασμός των ν ανά κ
$(1 \le k \le \nu)$</td><td>$\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu!}{k! \cdot (\nu - k)!}$</td><td>Μη διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση</td></tr>
<tr><td>ΝΑΙ</td><td>Επαναληπτικός συνδυασμός των ν ανά κ
$(\nu \ge 1,\ k \ge 1)$</td><td>$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \binom{\nu + k - 1}{k}$</td><td>Μη διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία με επανάθεση</td></tr>
</table>

† *Αν δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγιστο αριθμό φορών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κάθε στοιχείο*
‡ *Αν υπάρχει περιορισμός στο μέγιστο αριθμό φορών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κάθε στοιχείο*

Πίνακας-1

Ασκήσεις και Προβλήματα Απαρίθμησης

1. Η πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω τριών δρόμων, η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω πέντε δρόμων και, τέλος, η πόλη Γ συνδέεται με την πόλη Δ μέσω οκτώ δρόμων. Από πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να επιλέξει κάποιος για να ταξιδεύσει: α) από την πόλη Α στην πόλη Γ β) από την πόλη Β στην πόλη Δ γ) από την πόλη Α στην πόλη Δ και δ) από την πόλη Α στην πόλη Δ και στη συνέχεια να επιστρέψει στην πόλη Β.
2. Ένας γεωπόνος του Οργανισμού Ελληνικών Γεωργικών Ασφαλίσεων (ΕΛ.Γ.Α.) πρέπει να επισκεφθεί 6 περιοχές για να εκτιμήσει τις ζημιές που έγιναν σε καλλιέργειες αυτών των περιοχών από πρόσφατη πλημμύρα. Η συνολική απόσταση που πρέπει να διανύσει (και το συνολικό κόστος) εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θα επισκεφθεί τις 6 περιοχές. Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ο γεωπόνος για να αποφασίσει τη σειρά με την οποία θα επισκεφθεί τις 6 περιοχές;
3. Ένας φοιτητής, στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας του, ενδιαφέρεται να μελετήσει το αποτέλεσμα μιας χημικής αντίδρασης σε διαφορετικές (και ελεγχόμενες) συνθήκες θερμοκρασίας, πίεσης και συγκέντρωσης καταλύτη. Αν ενδιαφέρεται να διερευνήσει το αποτέλεσμα της χημικής αντίδρασης για δύο (διαφορετικές) τιμές θερμοκρασίας, τρεις (διαφορετικές) τιμές πίεσης και δύο (διαφορετικά) επίπεδα συγκέντρωσης καταλύτη, άραγε, πόσες φορές πρέπει να εκτελέσει τη χημική αντίδραση ώστε να καλύψει όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις θερμοκρασίας-πίεσης-καταλύτη και μάλιστα από τρεις φορές την κάθε μια;
4. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων δημιουργούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται τα 14 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου τα οποία συμπίπτουν με λατινικούς χαρακτήρες (A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T, Y, X) ενώ στην πρώτη θέση του δεύτερου τμήματος δε χρησιμοποιείται ο αριθμός 0.
   α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να δημιουργηθούν.
   β) Πόσοι από τους διαφορετικούς αριθμούς που μπορούν να δημιουργηθούν: i) έχουν και τα τρία γράμματα του πρώτου τμήματος διαφορετικά μεταξύ τους ii) έχουν ως πρώτο γράμμα φωνήεν iii) έχουν στην πρώτη και στην τρίτη θέση φωνήεντα και iv) δεν περιέχουν στο δεύτερο τμήμα τους ίδια ψηφία.
5. Ένα σύνολο ν στοιχείων, πόσα υποσύνολα έχει.
6. Μια τράπεζα διαθέτει 3 διαφορετικά ταμεία. Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργασθούν 8 διαφορετικοί υπάλληλοι της τράπεζας, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα 3 ταμεία; Ποια θα ήταν η απάντηση αν η τράπεζα διέθετε 8 ταμεία.
7. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία υπάρχουν.
8. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν και πόσοι από αυτούς δεν περιέχουν το 0.
9. Πόσοι άρτιοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν από τα ψηφία 1, 2, 5, 6, 8, 9. Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά.
10. Πόσοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία μεταξύ 3000 και 4000 σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
11. Κτηνίατρος πρόκειται να εξετάσει δέκα ζώα (το ένα μετά το άλλο). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.
12. Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις Αδενίνη, Κυτοσίνη, Γουανίνη και Θυμίνη

αντίστοιχα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους r αν σε αυτό υπάρχουν r_1 στοιχεία ίσα με A, r_2 στοιχεία ίσα G, r_3 στοιχεία ίσα με C και r_4 ίσα με T ($r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$). Σε πόσα από τα τμήματα αυτά, τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί (π.χ. AA..ACC…CTT…TGG…G ή TT…TAA…AGG…GCC…C).

13. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί προκύπτουν από όλες τις μεταθέσεις των ψηφίων του αριθμού, 2434433;
14. Αν σε έναν οργανισμό κάθε *διπλοειδές κύτταρο* έχει 23 ζεύγη χρωμοσωμάτων (όπως, για παράδειγμα, στον ανθρώπινο), πόσοι διαφορετικοί *γαμέτες* είναι δυνατόν να δημιουργηθούν; (κάθε *γαμέτης* σε αυτό τον οργανισμό, έχει 23 χρωμοσώματα, ένα από κάθε ζεύγος χρωμοσωμάτων του διπλοειδούς κυττάρου).
15. Χρησιμοποιώντας και τα επτά ψηφία 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, πόσους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε.
16. Χρησιμοποιώντας και τα επτά ψηφία 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4, πόσους αριθμούς μεγαλύτερους του 1.000.000 μπορούμε να σχηματίσουμε.
17. Όταν δεν εκδίδονταν επιστημονικά περιοδικά (πριν τον $17^{ο}$ αιώνα), οι επιστήμονες αντιμετώπιζαν προβλήματα στην κατοχύρωση των επιστημονικών εργασιών τους. Έπρεπε, ή να περιμένουν να συγκεντρώσουν αρκετό υλικό για να το εκδώσουν σε βιβλίο ή να στείλουν αντίγραφο της εργασίας σε κάποιο συνάδελφό τους, διακινδυνεύοντας όμως, να τη διεκδικήσει ο συνάδελφός τους ως δική του. Έτσι, σαν μια ενδιάμεση λύση, συνήθιζαν να ανταλλάσσουν επιστολές με αναγραμματισμένες μια ή δύο προτάσεις στις οποίες συνόψιζαν το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας τους. Όταν ο Ολλανδός επιστήμονας (φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός) Christiaan Huygens (1629-1695) ανακάλυψε τον δακτύλιο γύρω από τον Κρόνο, συνέταξε για τη φράση,
    «Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad ecplicticam inclinato», τον εξής αναγραμματισμό:
    aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, llll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.
    Τι λέτε, διακινδύνευσε ο Huygens να αποκρυπτογραφηθεί ο αναγραμματισμός;
18. Ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ περιλαμβάνει 13 αγώνες καταχωρημένους σε μία στήλη και δίπλα σε κάθε αγώνα σημειώνεται 1, Χ ή 2. α) Πόσες διαφορετικές στήλες μπορούν να σχηματισθούν β) Αν για 6 συγκεκριμένους αγώνες χρησιμοποιήσουμε 1 σύμβολο, για 5 άλλους συγκεκριμένους αγώνες 2 σύμβολα και για τους υπόλοιπους 2 αγώνες 3 σύμβολα, πόσες διαφορετικές στήλες θα προκύψουν.
19. Στις εκλογές για την ανάδειξη ενός Δ.Σ. έχουν θέσει υποψηφιότητα 5 άτομα για το αξίωμα του προέδρου, 3 άτομα για το αξίωμα του αντιπροέδρου και 7 άτομα για το αξίωμα του γενικού γραμματέα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις του Δ.Σ. μπορούν να προκύψουν.
20. Σε 8 πολίτες πρόκειται να απονεμηθούν τρία (διαφορετικά) βραβεία. Αν κάθε άτομο μπορεί να πάρει το πολύ ένα από τα τρία βραβεία, πόσες διαφορετικές κατανομές των τριών βραβείων είναι δυνατόν να υπάρξουν;
21. Για το γεύμα σας στο φοιτητικό εστιατόριο έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε μια σαλάτα από 3 διαφορετικές, ένα κυρίως πιάτο από 4 διαφορετικά και ένα φρούτο από 2 διαφορετικά. Άραγε, από πόσα διαφορετικά γεύματα αποφασίζετε ποιο θα επιλέξετε;
22. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να ανταλλάξουν χειραψίες 10 (διαφορετικά) άτομα.
23. Σε μια Διεύθυνση της Περιφέρειας Θεσσαλίας υπηρετούν 10 γεωπόνοι, οι οποίοι πρέπει να κατανεμηθούν σε τρεις ομάδες. Αν για την πρώτη ομάδα η οποία έχει

αντικείμενο εργασίας τις αυτοψίες σε αγροτικές καλλιέργειες πρέπει να επιλεγούν 5 από τους 10 γεωπόνους, για τη δεύτερη η οποία έχει αντικείμενο τις αυτοψίες σε μονάδες ζωικής παραγωγής πρέπει να επιλεγούν 3 από τους 10 γεωπόνους και για την τρίτη που έχει αντικείμενο τη διεκπεραίωση γραφειοκρατικών εργασιών στα γραφεία της Περιφέρειας πρέπει να επιλεγούν 2 από τους 10 γεωπόνους, πόσες διαφορετικές κατανομές των 10 γεωπόνων αυτής της Διεύθυνσης στις τρεις ομάδες μπορούν να υπάρξουν (με την προϋπόθεση ότι κάθε γεωπόνος μπορεί να ανήκει σε μια μόνο ομάδα).

24. Από τους 20 εργαζόμενους μιας μικρής επιχείρησης οι 5 είναι γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν 2 γυναίκες και 6 άνδρες έτσι ώστε α) να συσταθεί μια οκταμελής επιτροπή β) να τοποθετηθούν στις 8 αμειβόμενες με διαφορετικούς μισθούς θέσεις μιας ομάδας εργασίας.
25. Από οκτώ φοιτητές και τέσσερις καθηγητές πόσες ομάδες των έξι ατόμων στις οποίες συμμετέχει τουλάχιστον ένας καθηγητής μπορούν να σχηματισθούν.
26. Μια επιτροπή αποτελείται από 2 Γεωπόνους και 3 Μηχανικούς που επιλέγονται από 5 Γεωπόνους και 7 Μηχανικούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματισθεί αυτή η επιτροπή α) χωρίς άλλους περιορισμούς β) έτσι ώστε ένας συγκεκριμένους Μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε γ) έτσι ώστε 2 συγκεκριμένοι Γεωπόνοι να μην συμμετέχουν.
27. Πόσες διαφορετικές σαλάτες μπορούν να γίνουν αν έχουμε στη διάθεσή μας πέντε διαφορετικά λαχανικά.
28. Πέντε άτομα βρίσκονται στο ισόγειο ενός πενταόροφου κτιρίου. Μπαίνουν στο ασανσέρ και κατεβαίνουν ένας σε κάθε όροφο. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.
29. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με κ άτομα. Μέχρι να φθάσει στο τέρμα κάνει ν στάσεις (συμπεριλαμβανομένου του τέρματος).

    α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα κ άτομα να κατέβουν στις ν στάσεις.

    β) Αν $\kappa \le \nu$, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα κ άτομα να κατέβουν στις ν στάσεις έτσι ώστε σε κάθε στάση να κατεβαίνει το πολύ ένα άτομο.

    γ) Αν είναι γνωστό ότι τουλάχιστον σε μια στάση κατέβηκαν περισσότερα από ένα άτομα, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα κ άτομα να κατέβουν στις ν στάσεις.

30. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 φοιτήτριες και 4 φοιτητές σε 12 καθίσματα α) χωρίς κανένα περιορισμό β) έτσι ώστε όλοι οι φοιτητές να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις γ) κανένας φοιτητής να μην κάθεται δίπλα σε άλλο φοιτητή δ) τουλάχιστον ένας φοιτητής να κάθεται δίπλα σε άλλο φοιτητή.
31. Ένας καθηγητής ζητάει από τους κ φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημά του, να γράψουν σε έναν κατάλογο την ημερομηνία των γενεθλίων τους. α) Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν β) Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν αν είναι γνωστό ότι κανένας φοιτητής δεν έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον άλλο γ) Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν αν είναι γνωστό ότι τουλάχιστον δύο φοιτητές έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.
32. Το πλήρωμα μιας επανδρωμένης διαστημικής αποστολής που προγραμματίζεται να πραγματοποιηθεί, θα αποτελείται από τον κυβερνήτη, τον συγκυβερνήτη και δύο γεωλόγους. Θεωρείστε ότι την εκπαίδευση για τις θέσεις του κυβερνήτη και

του συγκυβερνήτη την έχουν ολοκληρώσει με επιτυχία 9 άτομα και την εκπαίδευση για τις 2 θέσεις γεωλόγων την έχουν ολοκληρώσει με επιτυχία 5 άτομα. Από πόσες διαφορετικές δυνατές συνθέσεις πληρώματος έχουν τη δυνατότητα οι υπεύθυνοι να επιλέξουν τη σύνθεση του πληρώματος;

33. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης k έργα από r τόμους το καθένα και ν-k έργα από s τόμους το καθένα έτσι ώστε οι τόμοι του ιδίου έργου να μην χωρίζονται.
34. Έστω **α** ένα συγκεκριμένο στοιχείο ενός συνόλου ν στοιχείων. Έστω επίσης κ θετικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του ν.

    α) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του συνόλου ανά κ που <u>περιέχουν</u> το συγκεκριμένο στοιχείο **α**.

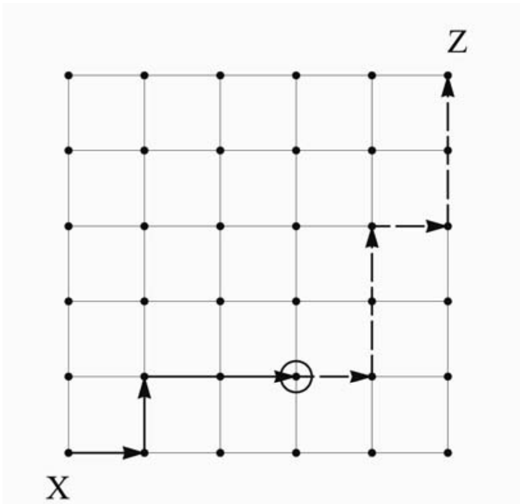
    β) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του συνόλου ανά κ που <u>δεν περιέχουν</u> το συγκεκριμένο στοιχείο **α**.

    γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που βρήκατε στα προηγούμενα ερωτήματα να αποδείξετε την ταυτότητα (τρίγωνο του Pascal):

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{k-1} + \binom{\nu-1}{k}.$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

35. Ας θεωρήσουμε ένα κιγκλίδωμα αποτελούμενο από 6 οριζόντια και 6 κατακόρυφα σύρματα.



Αν πρέπει να μετακινηθείτε από το X στο Z με μια ενδιάμεση στάση στο σημείο που σημειώνεται στο σχήμα με κύκλο, από πόσες διαφορετικές διαδρομές έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε αν σε κάθε μετακίνηση, επιτρέπεται ένα βήμα ανατολικά (δεξιά) ή ένα βήμα βόρια (πάνω). (Ως βήμα ορίζεται ένα οριζόντιο ή ένα κατακόρυφο τμήμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων).

Απαντήσεις

1. **α)** $3 \cdot 5$ **β)** $5 \cdot 8$ **γ)** $3 \cdot 5 \cdot 8$ **δ)** $3 \cdot 5^2 \cdot 8^2$
2. $6!$
3. $(2 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 3$
4. **α)** $14^3 \cdot 9 \cdot 10^3$ **β)** **i.** $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10^3$ **ii.** $6 \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot 10^3$ **iii.** $6^2 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10^3$ **iv.** $14^3 \cdot 9^2 \cdot 8 \cdot 7$
5. 2^{ν}
6. $(8)_3$, $8!$
7. $9^2 \cdot 8 \cdot 7$
8. $9 \cdot 10^2$, 9^3
9. $3 \cdot 6^3$, $3^2 \cdot 5 \cdot 4$
10. $(8)_3$
11. $10!$
12. $\dfrac{r!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot r_4!}$, $4!$
13. $\dfrac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 3!}$
14. 2^{23}
15. $\dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$
16. $\dfrac{7!}{2! \cdot 3!} - \dfrac{6!}{2! \cdot 3!}$
17. Όχι, φυσικά αφού οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί που μπορεί να προκύψουν είναι, $\dfrac{62!}{7! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 7! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 9! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 5!}$
18. **α)** 3^{13} **β)** $2^5 \cdot 3^2$
19. $5 \cdot 3 \cdot 7$
20. $(8)_3$
21. $3 \cdot 4 \cdot 2$
22. $\binom{10}{2}$
23. $\dfrac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$
24. **α)** $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{6}$ **β)** $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{6} \cdot 8!$
25. $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5} + \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{8}{2}$
26. **α)** $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3}$ **β)** $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2}$ **γ)** $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3}$
27. $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

28. $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

29. α) ν^k **β)** $(\nu)_k$ **γ)** $\nu^k - (\nu)_k$

30. α) $12!$ **β)** $9!\cdot 4!$ **γ)** $8!\cdot(9)_4$ **δ)** $12! - 8!\cdot(9)_4$

31. α) 365^k **β)** $(365)_k$ **γ)** $365^k - (365)_k$

32. $(9)_2\cdot\binom{5}{2}$

33. $\nu!\cdot(r!)^k\cdot(s!)^{\nu-k}$

34. α) $\binom{\nu-1}{k-1}$ **β)** $\binom{\nu-1}{k}$

35. $\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}$