

**Γραπτή Εξέταση Προόδου στο Α' Μέρος του Μαθήματος Στατιστική**  
για τα Τμήματα Βιοτεχνολογίας και Ε.Τ.&Δ.Α.

**12/12/2018**

**1<sup>ο</sup> Θέμα [30]** Ο χρόνος διαίρεσης κυττάρου (μίτωσης) είναι κανονική τυχαία μεταβλητή, έστω  $X$ , με μέση τιμή  $\mu = 60 \text{ min}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 5 \text{ min}$ .

**α)** Ποια είναι η πιθανότητα ένα κύτταρο να διαιρεθεί σε χρόνο **i)** μικρότερο από  $50 \text{ min}$  **ii)** μεταξύ 45 και  $65 \text{ min}$ .

**β)** Να προσδιορίσετε το χρόνο, έστω  $x_0$ , εντός του οποίου θα έχει διαιρεθεί το 95% των κυττάρων.

**2<sup>ο</sup> Θέμα [20]** Το βάρος των τυποποιημένων γευμάτων κοτόπουλου που παράγει μια μονάδα τυποποίησης τροφίμων είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu = 350 \text{ g}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 17 \text{ g}$ . Ποια είναι η πιθανότητα το **μέσο βάρος** 100 τέτοιων γευμάτων που προμηθεύθηκε σήμερα το φοιτητικό εστιατόριο του ΓΠΑ, να είναι τουλάχιστον  $335 \text{ g}$ ;

**3<sup>ο</sup> Θέμα [15]** Το τμήμα διασφάλισης ποιότητας μιας βιομηχανίας τροφίμων έχει διαπιστώσει ότι ποσοστό 2% των παραγομένων προϊόντων είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία 50 προϊόντα.

**α)** Πόσα προϊόντα αναμένεται να βρεθούν ελαττωματικά;

**β)** Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθούν τουλάχιστον 2 ελαττωματικά;

**4<sup>ο</sup> Θέμα [25]** Μια παρτίδα προϊόντων έχει προσβληθεί από ένα μύκητα σε ποσοστό 3%. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για ταχεία ανίχνευση του συγκεκριμένου μύκητα έχει ευαισθησία 95%, δηλαδή, όταν ένα προϊόν έχει προσβληθεί η μέθοδος κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.95. Αντίστοιχα, η ειδικότητα της μεθόδου είναι 99%, δηλαδή, όταν ένα προϊόν δεν έχει προσβληθεί η μέθοδος κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.99.

**α)** Αν ένα προϊόν ελεγχθεί με τη μέθοδο αυτή, ποια είναι η πιθανότητα να είναι θετικό το αποτέλεσμα, δηλαδή, η μέθοδος να δείξει ότι το προϊόν έχει προσβληθεί.

**β)** Αν ένα προϊόν ελεγχθεί με τη μέθοδο αυτή και το αποτέλεσμα βγει θετικό, ποια είναι η πιθανότητα το προϊόν πράγματι να έχει προσβληθεί;

**γ)** Το ενδεχόμενο «το αποτέλεσμα είναι θετικό» και το ενδεχόμενο «το προϊόν έχει προσβληθεί» είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

**5<sup>ο</sup> Θέμα [10]**

**α)** Δύο ξένα ενδεχόμενα είναι και ανεξάρτητα; Εξηγείστε.

**β)** Με βάση την προέλευση/γένεση της κατανομής Poisson πώς εξηγείται ότι η μέση τιμή και η διακύμανσή της είναι ίσες;

**Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες**

**Καλή επιτυχία!**



### Ενδεικτικές απαντήσεις

#### 1<sup>ο</sup> Θέμα

$$X \sim N(60, 5^2)$$

α) i.  $P(X < 50) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$

ii.  $P(45 < X < 65) = P(-3 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) - 1 + \Phi(3) = \dots$

β)  $P(X \leq x_0) = 0.95 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{x_0 - 60}{5}) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(\frac{x_0 - 60}{5}) = 0.95$

Άρα

$$\frac{x_0 - 60}{5} = 1.645 \Rightarrow x_0 = 68.2$$

#### 2<sup>ο</sup> Θέμα

Έστω  $X_i$  το βάρος του  $i$  γεύματος ( $i = 1, 2, \dots, 100$ ).

Ζητάμε την πιθανότητα  $P(\bar{X} \geq 335)$ , όπου  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$ .

Οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή  $\mu_i = E(X_i) = 350g$  και διακύμανση  $\sigma_i^2 = 17^2 g^2$  και επομένως από το Κ.Ο.Θ. (επειδή  $n = 100 > 30$ ) προκύπτει ότι η  $\bar{X}$  προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την

κανονική κατανομή  $N(350, \frac{17^2}{100})$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\bar{X} \geq 335) = P(Z \geq \frac{335 - 350}{1.7}) = P(Z \geq -8.8) = 1 - \Phi(-8.8) = \Phi(8.8) \cong 1.$$

#### 3<sup>ο</sup> Θέμα

Έστω  $X$  ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων από τα πενήντα που επιλέξαμε. Προφανώς  $X \sim B(50, 0.02)$ .

α)  $50 \cdot 0.02 = 1$

β)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \binom{50}{0} \cdot (0.02)^0 \cdot (0.98)^{50} - \binom{50}{1} \cdot (0.02)^1 \cdot (0.98)^{49} = 0.2642$$

#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A$ : Το προϊόν έχει προσβληθεί

$\Theta$ : Το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι θετικό.

Δίνονται οι πιθανότητες:  $P(A) = 0.03$ ,  $P(\Theta/A) = 0.95$  και  $P(\Theta'/A') = 0.99$

α) Ζητείται η πιθανότητα  $P(\Theta)$ . Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Theta) = P(\Theta/A) \cdot P(A) + P(\Theta/A') \cdot P(A') = 0.95 \cdot 0.03 + 0.01 \cdot 0.97 = 0.0382$$

β) Ζητείται η πιθανότητα  $P(A/\Theta)$ . Από τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(A/\Theta) = \frac{P(\Theta/A)P(A)}{P(\Theta)} = \frac{0.95 \cdot 0.03}{0.0382} = 0.7461.$$

γ) Είναι εξαρτημένα διότι  $P(A/\Theta) \neq P(A)$

#### 5<sup>ο</sup> Θέμα

.....