

**Γραπτή Εξέταση Προόδου στο Α' Μέρος του Μαθήματος Στατιστική**  
για τα Τμήματα Βιοτεχνολογίας και Ε.Τ.&Δ.Α.

**11/12/2019**

**1<sup>ο</sup> Θέμα [45]** Η συγκέντρωση, έστω  $X$ , ολικού DNA που απομονώθηκε στα άτομα δάκου που προσβάλλουν τις ελιές σε περιοχές της Κρήτης είναι κανονική τυχαία μεταβλητή, με μέση τιμή  $\mu = 100 \text{ ng}/\mu\text{L}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 8 \text{ ng}/\mu\text{L}$ .

**α)** Σε τι ποσοστό των ατόμων δάκου η συγκέντρωση ολικού DNA που απομονώθηκε είναι **i)** κάτω από  $50 \text{ ng}/\mu\text{L}$  **ii)** μεταξύ  $90$  και  $110 \text{ ng}/\mu\text{L}$ .

**β)** Να προσδιορίσετε τη συγκέντρωση ολικού DNA, έστω  $x_0$ , πάνω από την οποία απομονώθηκε μόνο στο 1% των ατόμων δάκου.

**γ)** Ποια είναι η πιθανότητα σε τουλάχιστον 2 από 5 άτομα δάκου να απομονωθεί ολικό DNA μεταξύ  $90$  και  $110 \text{ ng}/\mu\text{L}$ .

**δ)** Να προσδιορίσετε το  $z_{0,025}$  της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και να το δείξετε γραφικά.

**2<sup>ο</sup> Θέμα [25]** Το βάρος των τυποποιημένων γευμάτων κοτόπουλου που παράγει μια μονάδα τυποποίησης τροφίμων είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu = 400 \text{ g}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 30 \text{ g}$ .

**α)** Ποια είναι η πιθανότητα το **συνολικό** βάρος  $50$  γευμάτων που προμηθεύθηκε σήμερα το φοιτητικό εστιατόριο του ΓΠΑ, να είναι λιγότερο από  $19600 \text{ g}$ ;

**β)** Τι μπορείτε να πείτε για την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο γεύμα να έχει βάρος λιγότερο από  $390 \text{ g}$ .

**3<sup>ο</sup> Θέμα [15]** Μια πλάκα Petri με αποικίες βακτηριδίων χωρίζεται σε μικρά τετραγωνίδια. Έχει επαληθευθεί πειραματικά ότι ο αριθμός  $X_i$  των βακτηριδίων σε τετραγωνίδια εμβαδού  $t$  περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson. Αν ο μέσος αριθμός βακτηριδίων ανά  $\text{cm}^2$  είναι 3 βακτηρίδια, να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρξουν τουλάχιστον 2 βακτηρίδια **i)** σε  $1 \text{ cm}^2$  **ii)** σε  $4 \text{ cm}^2$ .

**4<sup>ο</sup> Θέμα [15]** **α)** Από 5 διαφορετικά αμινοξέα, πόσες διαφορετικές πολυπεπτιδικές αλυσίδες είναι δυνατόν να δημιουργηθούν αν αποτελούνται **i)** από 3 διαφορετικά αμινοξέα η κάθε μια **ii)** από 5 διαφορετικά αμινοξέα η κάθε μια.

**β)** Πώς αντιλαμβάνεσθε την έννοια της **στατιστικής ομαλότητας**;

**Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες**

**Καλή επιτυχία!**



### Ενδεικτικές απαντήσεις

#### 1<sup>ο</sup> Θέμα

$$X \sim N(100, 8^2)$$

α) i.

$$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-100}{8}\right) = P(Z < -6.25) = \Phi(-6.25) = 1 - \Phi(6.25) \cong 1 - 1 \cong 0$$

ii.

$$\begin{aligned} P(90 < X < 110) &= P\left(\frac{90-100}{8} < Z < \frac{110-100}{8}\right) = P(-1.25 < Z < 1.25) = 2\Phi(1.25) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0.8944 - 1 = 0.7888 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} P(X > x_0) &= 0.01 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{x_0 - 100}{8}\right) = 0.01 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{x_0 - 100}{8}\right) = 0.01 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0 - 100}{8}\right) = 0.99 \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{x_0 - 100}{8} \cong 2.33 \Rightarrow x_0 \cong 118.64$$

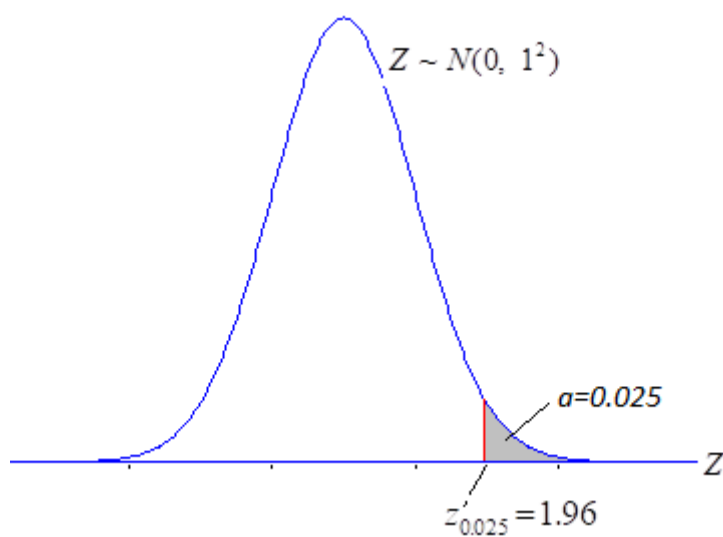
γ) Έστω  $W$  ο αριθμός των ατόμων δάκου από τα πέντε που επιλέξαμε σε καθένα από τα οποία απομονώθηκε ολικό DNA μεταξύ 90 και 110 ng/μL.

Προφανώς  $W \sim B(5, 0.79)$ .

Ζητάμε την πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(W \geq 2) &= 1 - P(W < 2) = 1 - P(W = 0) - P(W = 1) = \\ &= 1 - \binom{5}{0} \cdot (0.79)^0 \cdot (1 - 0.79)^5 - \binom{5}{1} \cdot (0.79)^1 \cdot (1 - 0.79)^4 \cong 0.9919 \end{aligned}$$

δ)  $z_{0.025} = 1.96$



## 2° Θέμα

α) Έστω  $X_i$  το βάρος του  $i$  γεύματος ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ).

Ζητάμε την πιθανότητα  $P(Y < 19600)$ , όπου  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$ .

Οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή  $\mu_i = E(X_i) = 400g$  και διακύμανση  $\sigma_i^2 = 30^2 g^2$  και επομένως από το Κ.Ο.Θ. (επειδή  $n = 50 > 30$ ) προκύπτει ότι η  $Y$  προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή  $N(50 \cdot 400, 50 \cdot 30^2)$ . Δηλαδή κατά προσέγγιση  $Y \sim N(20000, 45000)$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y < 19600) = P\left(Z < \frac{19600 - 20000}{\sqrt{45000}}\right) = P\left(Z < \frac{-400}{212.13}\right) = \Phi(-1.88) = 1 - \Phi(1.88) = \\ = 1 - 0.9699 = 0.0301$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα δεν μπορεί να υπολογισθεί γιατί δεν δίνεται η κατανομή της τ.μ.  $X$  που εκφράζει τα βάρη των γευμάτων (δίνεται μόνο η μέση τιμή της και η τυπική απόκλιση της).

## 3° Θέμα

Ισχύει  $P(X_t = x) = e^{-3t} \frac{(3 \cdot t)^x}{x!}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$

α)

$$P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X_1 < 2) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) = 1 - e^{-3} \frac{3^0}{0!} - e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 1 - 4e^{-3}$$

β)

$$P(X_4 \geq 2) = 1 - P(X_4 < 2) = 1 - P(X_4 = 0) - P(X_4 = 1) = 1 - e^{-12} \frac{12^0}{0!} - e^{-12} \frac{12^1}{1} = 1 - 13e^{-12}$$

## 4° Θέμα

α) i.  $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  ii.  $(5)_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

β) Θεωρία