Μάθημα: Στατιστική (Κωδ. 105)
Διδάσκων: Γιώργος Κ. Παπαδόπουλος

6. Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων

Σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών, προτάσεων και τύπων

Διάστημα εμπιστοσύνης	Ένα **100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης** (0<α<1) για μια παράμετρο ενός πληθυσμού, είναι ένα διάστημα που υπολογίζεται από ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό και έχει πιθανότητα 1-α να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Η πιθανότητα 1-α ονομάζεται **συντελεστής εμπιστοσύνης** του διαστήματος.
Ερμηνεία ενός 100(1-α)% διαστήματος εμπιστοσύνης σύμφωνα με την ερμηνεία της πιθανότητας ως οριακή σχετική συχνότητα	Σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος «παίρνω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν από τον πληθυσμό και κατασκευάζω για μια άγνωστη παράμετρο ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης», ποσοστό 1-α των δειγμάτων θα δώσουν διάστημα που θα περιέχει την τιμή της παραμέτρου και ποσοστό α των δειγμάτων θα δώσουν διάστημα που δε θα περιέχει την τιμή της παραμέτρου.
Η γενική ιδέα της διαδικασίας στατιστικού ελέγχου υποθέσεων	Πρόκειται για μια διαδικασία απόφασης μεταξύ δύο υποθέσεων. Η μια υπόθεση ονομάζεται μηδενική (H_0) και η άλλη εναλλακτική (H_1). Θέτουμε ως μηδενική αυτή για την οποία αμφιβάλουμε, αυτή που αμφισβητείται, και εξετάζουμε αν ένα τυχαίο δείγμα που παίρνουμε από τον πληθυσμό συνηγορεί-δίνει αποδείξεις υπέρ της απόρριψής της έναντι της εναλλακτικής. Έτσι, υποθέτοντας ότι η H_0 είναι αληθής, αν «αυτό που παρατηρείται στο δείγμα» είναι ακραίο, δηλαδή, αν έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί, τότε απορρίπτουμε την H_0. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή, αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα δεν είναι ακραίο-σπάνιο (όταν είναι αληθής η H_0) τότε το δείγμα που πήραμε δε μας δίνει αρκετές ενδείξεις για την απόρριψη της H_0 και «αποτυγχάνουμε να την απορρίψουμε».
Είδη σφαλμάτων	***Σφάλμα τύπου Ι:*** Η λανθασμένη απόρριψη της H_0 ***Σφάλμα τύπου ΙΙ:*** Η λανθασμένη μη απόρριψη της H_0
Επίπεδο σημαντικότητας, κρίσιμη τιμή και περιοχή απόρριψης	Το μέγιστο αποδεκτό επίπεδο της πιθανότητας σφάλματος τύπου Ι (λανθασμένης απόρριψης της H_0), συμβολίζεται με α και ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** του ελέγχου. Προκαθορίζεται, και με βάση αυτό ορίζεται η **κρίσιμη τιμή** του ελέγχου, δηλαδή, η τιμή με βάση την οποία κρίνεται αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα είναι ακραίο ή όχι, και επομένως αν δίνει στατιστικά σημαντικές αποδείξεις εναντίον της H_0. Οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για τις οποίες, σε προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α, απορρίπτεται η H_0, ορίζουν την **περιοχή απόρριψης** της H_0 .
P-τιμή	Είναι η ελάχιστη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας για την οποία απορρίπτεται η H_0. • Αν $\alpha \geq$ *P-Τιμή* , τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α , η H_0 **απορρίπτεται**. • Αν $\alpha <$ *P-Τιμή*, τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α , η H_0 **δεν απορρίπτεται**.

Στατιστικά σημαντικό δείγμα	Όταν σε επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτεται η H_0 , το δείγμα χαρακτηρίζεται **στατιστικά σημαντικό** (σε επίπεδο σημαντικότητας α) και έχει την έννοια ότι δίνει σημαντικές αποδείξεις εναντίον της H_0. Όσο πιο μικρό είναι το επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο απορρίπτεται η H_0 και επομένως όσο πιο μικρή είναι η *P-Τιμή* τόσο πιο σημαντικό (στατιστικά) είναι το δείγμα.
Ισχύς του ελέγχου	Είναι η πιθανότητα να μην αποτύχει ο έλεγχος να απορρίψει την H_0 όταν αληθής είναι η H_1. Δηλαδή, η ισχύς του ελέγχου εκφράζει την ικανότητα του ελέγχου να απορρίπτει σωστά την H_0. Συμβολίζεται με $1-\beta$ όπου β η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, δηλαδή $\beta = P(\text{μη απόρριψη της } H_0 \mid \text{αληθής η } H_1)$ άρα $1-\beta = P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid \text{αληθής η } H_1)$.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε) συντελεστή εμπιστοσύνης (1- α)

1. *Για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν*

Πληθυσμός	***Διακύμανση του πληθυσμού σ^2***	***Μέγεθος του δείγματος (ν)***	***100(1-α)% Δ. Ε. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού***
Κανονικός	*Γνωστή*	*Οτιδήποτε*	$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$
Οποιοσδήποτε	*Γνωστή*	*Μεγάλο*	
Οποιοσδήποτε	*Άγνωστη*	*Μεγάλο*	$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{\nu}}$
Κανονικός	*Άγνωστη*	*Οτιδήποτε*	$\overline{X} \pm t_{\nu-1;\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{\nu}}$
Όχι Κανονικός	*Γνωστή ή Άγνωστη*	*Μικρό*	*?*

2. *Για τη διαφορά μ_1-μ_2 των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα*

Πληθυσμοί	***Διακυμάνσεις των πληθυσμών σ_1^2, σ_2^2***	***Μεγέθη των δειγμάτων ν_1, ν_2***	***100(1-α)% Δ. Ε. για τη διαφορά μ_1-μ_2 των μέσων τιμών των πληθυσμών***
Κανονικοί	*Γνωστές*	*Οτιδήποτε*	$(\overline{X}-\overline{Y}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{\nu_2}}$
Οποιοιδήποτε	*Γνωστές*	*Μεγάλα*	
Οποιοιδήποτε	*Άγνωστες*	*Μεγάλα*	$(\overline{X}-\overline{Y}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{\nu_1}+\dfrac{S_2^2}{\nu_2}}$
Κανονικοί	*Άγνωστες και **ίσες***	*Οτιδήποτε*	$(\overline{X}-\overline{Y}) \pm t_{\nu;\alpha/2} S\sqrt{\dfrac{1}{\nu_1}+\dfrac{1}{\nu_2}}$ *Όπου,* $\nu = \nu_1+\nu_2-2$ *και* $S = \sqrt{\dfrac{(\nu_1-1)S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}}$
Όχι Κανονικοί	*Γνωστές ή άγνωστες (ίσες ή άνισες)*	*Μικρά*	*?*

3. Για το διωνυμικό ποσοστό p με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν

Αν

$$\hat{p} = \frac{\text{αριθμός επιτυχιών στο δείγμα}}{\nu} \quad \text{και} \quad \nu\hat{p} \geq 5 \quad \text{και} \quad \nu(1-\hat{p}) \geq 5$$

το διάστημα

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}}$$

είναι ένα κατά προσέγγιση *100 (1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης* για το *διωνυμικό ποσοστό p*.

4. Για τη διαφορά p_1-p_2 δύο διωνυμικών ποσοστών με δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα

Αν

$$\hat{p}_i = \frac{\text{αριθμός επιτυχιών στο δείγμα } i}{\nu_i}, \quad i = 1, 2 \quad \text{και} \quad \nu_i\hat{p}_i \geq 5 \quad \text{και} \quad \nu_i(1-\hat{p}_i) \geq 5, \quad i = 1, 2$$

το διάστημα

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{\nu_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{\nu_2}}$$

είναι ένα κατά προσέγγιση *100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης* για τη διαφορά $p_1 - p_2$ δύο *διωνυμικών ποσοστών.*

Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α

1. Για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν

	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	**Προϋποθέσεις**
Περιοχή απόρριψης της $H_0 : \mu = \mu_0$	$\lvert Z \rvert = \frac{\lvert \overline{X} - \mu_0 \rvert}{\sigma/\sqrt{\nu}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \geq z_\alpha$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \leq -z_\alpha$	*Η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή και ο πληθυσμός είναι κανονικός ή Η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή και το ν είναι μεγάλο*
	$\lvert Z \rvert = \frac{\lvert \overline{X} - \mu_0 \rvert}{S/\sqrt{\nu}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{\nu}} \geq z_\alpha$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{\nu}} \leq -z_\alpha$	*Η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη και το ν είναι μεγάλο (οτιδήποτε πληθυσμός)*
	$\lvert T \rvert = \frac{\lvert \overline{X} - \mu_0 \rvert}{S/\sqrt{\nu}} \geq t_{\nu-1,\alpha/2}$	$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{\nu}} \geq t_{\nu-1,\alpha}$	$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{\nu}} \leq -t_{\nu-1,\alpha}$	*Η διακύμανση σ^2 άγνωστη και ο πληθυσμός είναι κανονικός (οτιδήποτε ν)*
	?	?	?	*Το ν είναι μικρό, ο πληθυσμός όχι κανονικός και η διακύμανση γνωστή ή άγνωστη*

2. Για το διωνυμικό ποσοστό p με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν

	$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$	**Προϋποθέσεις**
Περιοχή απόρριψης της $H_0 : p = p_0$	$\lvert z \rvert = \frac{\lvert(\hat{p} - p_0)\rvert\sqrt{\nu}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \geq z_{\alpha/2}$	$z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{\nu}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \geq z_\alpha$	$z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{\nu}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \leq -z_\alpha$	$\nu p_0 \geq 5$ *και* $\nu(1-p_0) \geq 5$ *($\hat{p}$ είναι το ποσοστό επιτυχιών στο δείγμα)*

3. Για τη διαφορά μ_1-μ_2 των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα

	$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$	**Προϋποθέσεις**
Περιοχή απόρριψης της $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\lvert Z \rvert = \dfrac{\lvert \overline{X} - \overline{Y} - \delta \rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} \geq z_{\alpha}$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} \leq -z_{\alpha}$	*Οι διακυμάνσεις, σ_1^2, σ_2^2 είναι γνωστές και οι πληθυσμοί είναι κανονικοί* *ή* *Οι διακυμάνσεις, σ_1^2, σ_2^2 είναι γνωστές και τα ν_1, ν_2 είναι μεγάλα*
	$\lvert Z \rvert = \dfrac{\lvert \overline{X} - \overline{Y} - \delta \rvert}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{\nu_1} + \dfrac{S_2^2}{\nu_2}}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{\nu_1} + \dfrac{S_2^2}{\nu_2}}} \geq z_{\alpha}$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{\nu_1} + \dfrac{S_2^2}{\nu_2}}} \leq -z_{\alpha}$	*Οι διακυμάνσεις, σ_1^2, σ_2^2 είναι άγνωστες και τα ν_1, ν_2 είναι μεγάλα (οτιδήποτε πληθυσμοί)*
	$\lvert T \rvert = \dfrac{\lvert \overline{X} - \overline{Y} - \delta \rvert}{S\sqrt{\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}}} \geq t_{\nu,\alpha/2}$	$T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S\sqrt{\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}}} \geq t_{\nu,\alpha}$	$T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S\sqrt{\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}}} \leq -t_{\nu,\alpha}$	*Οι διακυμάνσεις, σ_1^2, σ_2^2 είναι άγνωστες και ίσες, οι πληθυσμοί είναι κανονικοί, και τα ν_1, ν_2 οτιδήποτε.* $\nu = \nu_1 + \nu_2 - 2$ $S^2 = \dfrac{(\nu_1 - 1)S_1^2 + (\nu_2 - 1)S_2^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$
	?	?	?	*Τα ν_1, ν_2 μικρά, οι πληθυσμοί όχι κανονικοί και οι διακυμάνσεις γνωστές ή άγνωστες (ίσες ή όχι)*

4. Για τη διαφορά p_1-p_2 δύο διωνυμικών ποσοστών με δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα

	$H_0: p_1 \neq p_2$	$H_0: p_1 > p_2$	$H_0: p_1 < p_2$	**Προϋποθέσεις και συμβολισμοί**
Περιοχή απόρριψης της $H_0: p_1 = p_2$	$\dfrac{\lvert \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \rvert}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}\right)}} \geq z_{\alpha/2}$	$\dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}\right)}} \geq z_{\alpha}$	$\dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}\right)}} \leq -z_{\alpha}$	Πρέπει $\nu_i \hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1 - \hat{p}_i) \geq 5$, $i = 1,2$ $\hat{p}_1$*: το ποσοστό επιτυχιών στο δείγμα μεγέθους* ν_1 $\hat{p}_2$*: το ποσοστό επιτυχιών στο δείγμα μεγέθους* ν_2 $\hat{p} = \dfrac{\nu_1 \hat{p}_1 + \nu_2 \hat{p}_2}{\nu_1 + \nu_2}$

Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Μια μηχανή εμφιάλωσης κρασιού γεμίζει φιάλες του μισού κιλού με ποσότητα κρασιού η οποία είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με γνωστή τυπική απόκλιση ίση με 5gr. Επιλέξαμε 25 φιάλες του μισού κιλού που είχαν γεμίσει από τη συγκεκριμένη μηχανή και μετρήσαμε την ποσότητα κρασιού που περιείχαν. Η μέση ποσότητα κρασιού σε αυτές τις 25 φιάλες βρέθηκε ίση με 485gr. α) Βρείτε ένα 95% και ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση ποσότητα κρασιού που περιέχεται στις φιάλες του μισού κιλού που γεμίζει η συγκεκριμένη μηχανή. β) Μετρήσαμε την ποσότητα κρασιού σε 25 άλλες φιάλες του μισού κιλού που είχαν γεμίσει επίσης από τη συγκεκριμένη μηχανή και βρήκαμε μέση ποσότητα κρασιού 480gr. Να απαντήσετε στο ερώτημα (α) χρησιμοποιώντας τα ευρήματα από το νέο δείγμα. γ) Μετρήσαμε την ποσότητα κρασιού σε 40 ακόμη φιάλες του μισού κιλού που είχαν γεμίσει από τη συγκεκριμένη μηχανή και βρήκαμε μέση ποσότητα κρασιού, σε αυτές, 482gr. Να απαντήσετε και πάλι στο ερώτημα (α) χρησιμοποιώντας τα νέα ευρήματα. δ) Πώς σχολιάζετε και πώς ερμηνεύετε (συγκριτικά) τα πλάτη των έξι διαστημάτων που υπολογίσατε στα (α), (β) και (γ); ε) Τι μεγέθους δείγμα πρέπει να πάρουμε προκειμένου, με πιθανότητα 95% το περιθώριο σφάλματος για την εκτίμηση της μέσης ποσότητας κρασιού που περιέχεται στις φιάλες μισού κιλού που γεμίζει η συγκεκριμένη μηχανή, να είναι 1.5gr; στ) Τι υποθέσεις χρειάσθηκε να κάνετε για να απαντήσετε στα ερωτήματα (α), (β) και (γ);
2. Είναι γνωστό ότι η πετρελαϊκή ρύπανση των θαλασσών προκαλεί, μεταξύ άλλων, την ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου τύπου βακτηρίων. Μια ομάδα ερευνητών, προκειμένου να μελετήσει αυτό το φαινόμενο σε μια θαλάσσια περιοχή που έχει πληγεί από πετρελαϊκή ρύπανση, πήρε νερό από 10 διαφορετικά σημεία αυτής της περιοχής και έκανε σχετικές μετρήσεις. Συγκεκριμένα, μέτρησε τον αριθμό, έστω X, αυτών των βακτηρίων ανά 100 milliliters νερού. Οι τιμές, $x_1, x_2, ..., x_{10}$, της μεταβλητής X στα δέκα σημεία ήταν 49, 70, 54, 67, 59, 40, 61, 69, 71, 52. α) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο αριθμό βακτηρίων ανά 100 milliliters νερού στην υπό μελέτη θαλάσσια περιοχή. β) Τι υποθέσεις χρειάσθηκε να κάνετε για να απαντήσετε στο ερώτημα (α); γ) Εξηγείστε πώς αντιλαμβάνεσθε (πώς ερμηνεύετε) το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που βρήκατε στο (α). δ) Αν 20 ερευνητικές ομάδες πάρουν, η κάθε μία, από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 10 από την υπό μελέτη περιοχή, και υπολογίσουν (με την ίδια διαδικασία) από ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο αριθμό βακτηρίων ανά 100 milliliters νερού η κάθε μία, πόσα από αυτά τα 20 διαστήματα εμπιστοσύνης περιμένετε να περιέχουν το μέσο αριθμό βακτηρίων ανά 100 milliliters νερού στην υπό μελέτη θαλάσσια περιοχή; ε) Βρείτε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο αριθμό βακτηρίων ανά 100 milliliters νερού στην υπό μελέτη θαλάσσια περιοχή. στ) Ποια εκτίμηση είναι πιο ακριβής, του ερωτήματος (α) ή του (ε); Για ποια έχουμε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη;
3. Ένας φοιτητής, στο πλαίσιο της πτυχιακής του εργασίας, μελέτησε μεταξύ άλλων, την ποσότητα νατρίου, έστω X, που περιέχεται στο κασέρι συνήθους τύπου (όχι light) που παράγει μια γνωστή γαλακτοβιομηχανία. Τα αποτελέσματα (σε mg/100gr) εννέα σχετικών μετρήσεων που έκανε ο φοιτητής σε κασέρι που επέλεξε τυχαία από την παραγωγή της γαλακτοβιομηχανίας ήταν 340, 300, 340, 320, 320, 290, 330, 320, 310. α) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση ποσότητα νατρίου που περιέχεται στο κασέρι συνήθους τύπου που παράγει η συγκεκριμένη γαλακτοβιομηχανία. β) Τι υποθέσεις χρειάσθηκε να κάνετε για να απαντήσετε στο ερώτημα (α); γ) Σύμφωνα με τις προδιαγραφές της γαλακτοβιομηχανίας, η μέση ποσότητα νατρίου στο κασέρι συνήθους τύπου που παράγει είναι 320mg/100gr. Με βάση το δείγμα που πήρε ο φοιτητής, να ελέγξετε σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν ο ισχυρισμός της γαλακτοβιομηχανίας ευσταθεί. δ) Τι υποθέσεις χρειάσθηκε να κάνετε για να απαντήσετε στο ερώτημα (γ); ε) Σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, ο ισχυρισμός της γαλακτοβιομηχανίας ευσταθεί;
4. (Συνέχεια του προηγούμενου προβλήματος): Ο φοιτητής μελέτησε επίσης την ποσότητα νατρίου στο κασέρι τύπου light της ίδιας γαλακτοβιομηχανίας. Τα αποτελέσματα (σε

mg/100gr) οκτώ σχετικών μετρήσεων ήταν 300, 300, 310, 290, 280, 280, 285, 275. α) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση ποσότητα νατρίου που περιέχεται στο κασέρι τύπου light που παράγει η συγκεκριμένη γαλακτοβιομηχανία. β) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης ποσότητας νατρίου στο κασέρι τύπου light που παράγει η συγκεκριμένη γαλακτοβιομηχανία από τη μέση ποσότητα νατρίου στο κασέρι συνήθους τύπου (που παράγει η ίδια γαλακτοβιομηχανία). γ) Με βάση το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που υπολογίσατε στο ερώτημα (β), μπορείτε να συμπεράνετε αν οι δύο πληθυσμιακοί μέσοι διαφέρουν ή όχι και αν ναι με τι πιθανότητα το συμπέρασμά σας μπορεί να είναι λάθος; δ) Να διατυπώσετε και να κάνετε, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, κατάλληλο στατιστικό έλεγχο για να ελέγξετε αν η μέση ποσότητα νατρίου που περιέχεται στο κασέρι που παράγει η συγκεκριμένη γαλακτοβιομηχανία είναι ίδια ή όχι στους δύο τύπους κασεριού. Συμφωνεί το συμπέρασμά σας με αυτό του ερωτήματος (γ); ε) Να κάνετε τον έλεγχο που ζητείται στο ερώτημα (δ) σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. στ) Για να υποστηρίξετε καλύτερα το συμπέρασμα του ελέγχου που κάνατε στα (δ)&(ε) σε ποιο επίπεδο σημαντικότητας θα αναφερθείτε; Στο 1%, στο 5% ή και στα δύο; ζ) Να κάνετε σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, κατάλληλο στατιστικό έλεγχο για να ελέγξετε αν η μέση ποσότητα νατρίου που περιέχεται στο κασέρι συνήθους τύπου είναι μεγαλύτερη από τη μέση ποσότητα νατρίου που περιέχεται στο κασέρι τύπου light περισσότερο από 15mg/100gr. η) Για να απαντήσετε στα ερωτήματα (β), (δ), (ε) και (ζ) χρειάσθηκε να κάνετε κάποιες υποθέσεις; θ) Να απαντήσετε στα ερωτήματα (δ) και (ε) αν γνωρίζετε ότι η P-τιμή του ζητούμενου ελέγχου είναι 0.0012.

5. Η πτυχιακή μελέτη ενός φοιτητή αφορούσε στα άνθη μιας συγκεκριμένης ποικιλίας ενός φυτού που καλλιεργείται στο νομό Κοζάνης. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, ο φοιτητής μέτρησε, μεταξύ άλλων, τον αριθμό των πετάλων σε 115 άνθη της συγκεκριμένης ποικιλίας που επέλεξε από καλλιέργειες του νομού Κοζάνης. Τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων ήταν τα ακόλουθα.

7	*5*	*8*	*7*	*5*	*5*	*6*	*6*	*5*	*7*	*5*	*5*	*5*	*9*	*6*	*8*	*5*
5	*5*	*6*	*6*	*5*	*5*	*6*	*5*	*9*	*6*	*5*	*5*	*7*	*6*	*6*	*7*	*5*
7	*5*	*5*	*6*	*6*	*5*	*6*	*5*	*6*	*5*	*5*	*5*	*5*	*6*	*6*	*5*	*5*
8	*5*	*5*	*5*	*5*	*6*	*5*	*5*	*5*	*6*	*5*	*5*	*6*	*5*	*5*	*5*	*6*
7	*5*	*7*	*5*	*5*	*8*	*5*	*5*	*5*	*6*	*5*	*10*	*5*	*6*	*5*	*5*	*6*
5	*7*	*5*	*5*	*5*	*9*	*5*	*5*	*7*	*5*	*5*	*5*	*5*	*6*	*7*	*5*	*5*
6	*5*	*6*	*5*	*7*	*5*	*10*	*5*	*6*	*5*	*5*	*5*	*8*				

α) Βρείτε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο αριθμό πετάλων ανά άνθος της συγκεκριμένης ποικιλίας του φυτού στο νομό Κοζάνης. β) Τι υποθέσεις χρειάσθηκε να κάνετε για να απαντήσετε στο ερώτημα (α); γ) Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι ο μέσος αριθμός πετάλων της συγκεκριμένης ποικιλίας του φυτού είναι 6 πέταλα ανά άνθος. Να διατυπώσετε και να κάνετε, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, κατάλληλο στατιστικό έλεγχο για να ελέγξετε αν τα ευρήματα στο δείγμα που πήρε ο φοιτητής συμφωνούν ή όχι με τη βιβλιογραφία. δ) Ποια είναι απάντηση στο ερώτημα (γ) αν ο ζητούμενος έλεγχος γίνει σε επίπεδο σημαντικότητας 5%; (ε) Η P-τιμή του ελέγχου στο ερώτημα (γ) και (δ) θα μπορούσε να είναι ίση με 0.059; (στ) Μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα το συμπέρασμά σας στο (γ) να είναι λάθος;

6. Η αποτελεσματικότητα του φυτοφαρμάκου που χρησιμοποιεί ένας αγρότης για την αντιμετώπιση κάποιας συγκεκριμένης ασθένειας είναι γνωστό ότι είναι 60%, δηλαδή το 60% των άρρωστων φυτών στα οποία χορηγείται το εν λόγω φάρμακο θεραπεύονται. Για να ελέγξει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου που καταπολεμά την ίδια ασθένεια, ο αγρότης χορήγησε αυτό το νέο φάρμακο σε 15 άρρωστα φυτά και από αυτά θεραπεύθηκαν τα 12. α) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, υποστηρίζουν αυτά τα δεδομένα ότι το νέο φάρμακο είναι πιο αποτελεσματικό από αυτό που ήδη χρησιμοποιεί ο αγρότης; β) Αν ο αγρότης είχε εκτελέσει το πείραμα με 150 άρρωστα φυτά και είχε βρει ότι θεραπεύτηκαν 120 από αυτά τι έπρεπε να έχουμε συμπεράνει; γ) Βρείτε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την αποτελεσματικότητα του νέου φαρμάκου με τα δεδομένα από τα 15 φυτά και ένα αντίστοιχο διάστημα με τα δεδομένα από τα 150 φυτά. Σχολιάστε τα πλάτη των δύο διαστημάτων. δ) Πόσα φυτά πρέπει να χρησιμοποιηθούν

στο πείραμα ώστε με πιθανότητα 99% το περιθώριο σφάλματος της εκτίμησης του ποσοστού των φυτών που θεραπεύονται με το νέο φυτοφάρμακο να είναι 0.10 (10%);

7. Για να συγκριθεί η ευαισθησία δύο διαφορετικών ποικιλιών καλαμποκιού σε κάποια ασθένεια, έγινε κατάλληλο πείραμα στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν 250 φυτά της ποικιλίας Α και 250 φυτά της ποικιλίας Β. Βρέθηκε ότι από τα 250 φυτά της ποικιλίας Α προσβλήθηκαν από την ασθένεια τα 74 και από τα 250 φυτά της ποικιλίας Β τα 92. α) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά στην ευαισθησία στη συγκεκριμένη ασθένεια μεταξύ των δύο ποικιλιών καλαμποκιού. β) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι υπάρχει διαφορά στην ευαισθησία στη συγκεκριμένη ασθένεια μεταξύ των δύο ποικιλιών καλαμποκιού; Σε επίπεδο σημαντικότητας 1%; γ) Τι υποθέσεις κάνατε για να απαντήσετε στα ερωτήματα (α)&(β);
8. Τα φυτά σιταριού με ύψος μικρότερο από 91.44cm (συμπεριλαμβανομένης και της ταξιανθίας) χαρακτηρίζονται «κοντά». Ένα τυχαίο δείγμα 50 φυτών σιταριού από μια αγροτική περιοχή έδωσε μέσο ύψος 89.2cm με τυπική απόκλιση 14.58cm. α) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσος ύψος των φυτών σιταριού της συγκεκριμένης αγροτικής περιοχής. β) Τα ευρήματα στο τυχαίο δείγμα υποστηρίζουν σε επίπεδο σημαντικότητας 5% ότι τα φυτά σιταριού στη συγκεκριμένη αγροτική περιοχή, με βάση το μέσο ύψος τους, είναι κοντά;
9. Στο πλαίσιο μιας μελέτης για τη φυσιολογία του σιταριού κατά τη διάρκεια ωρίμανσης, ένας γεωπόνος επέλεξε από έναν πειραματικό αγρό έξι φυτά σιταριού και για κάθε φυτό μέτρησε την υγρασία σε δύο ομάδες σπόρων: μια ομάδα από το κεντρικό και μια από το πάνω μέρος της ταξιανθίας.

		Φυτό					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Υγρασία	*Κεντρικό*	62.7	63.6	60.9	63.0	62.7	63.7
	Πάνω	59.7	61.6	58.2	60.5	60.6	60.8

α) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, υποστηρίζουν αυτά τα δεδομένα ότι υπάρχει διαφορά στην υγρασία μεταξύ κεντρικού και πάνω μέρους της ταξιανθίας; β) Βρείτε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά στην υγρασία μεταξύ κεντρικού και πάνω μέρους της ταξιανθίας. γ) Για να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα χρειάσθηκε να κάνετε κάποιες παραδοχές;

10. Ερευνητές που ήθελαν να μελετήσουν την επίδραση ενός λιπάσματος στην ανάπτυξη των ραπανιών (Raphanus sativus), επέλεξαν τυχαία 32 σπόρους ραπανιού τους οποίους χρησιμοποίησαν σαν μάρτυρες (δεν χρησιμοποιήθηκε το λίπασμα) και άλλους 32 στους οποίους χρησιμοποιήθηκε το λίπασμα. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα ύψη των φυτών (σε cm) μετά δύο εβδομάδες.

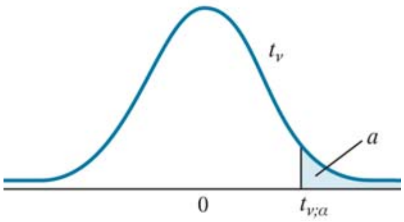
Χρησιμοποιήθηκε λίπασμα	*3.4*	*4.4*	*3.5*	*2.9*	*2.7*	*2.6*	*3.7*	*2.7*
	2.3	*2.0*	*1.8*	*2.3*	*2.4*	*2.5*	*1.9*	*3.2*
	1.6	*2.9*	*2.3*	*2.8*	*2.5*	*2.3*	*1.6*	*1.6*
	3.0	*2.3*	*3.2*	*2.0*	*2.6*	*2.4*	*2.7*	*2.5*
Μάρτυρες	*2.8*	*1.9*	*3.6*	*1.2*	*2.4*	*2.2*	*3.6*	*1.2*
	1.5	*2.4*	*1.7*	*1.4*	*1.8*	*2.2*	*1.9*	*0.9*
	1.9	*2.7*	*2.3*	*1.8*	*2.7*	*2.6*	*1.3*	*3.0*
	1.4	*1.2*	*2.6*	*1.8*	*1.7*	*1.5*	*1.8*	*2.3*

α) Σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, μπορούν οι ερευνητές να ισχυριστούν ότι το συγκεκριμένο λίπασμα επιδρά στην ανάπτυξη των ραπανιών; Σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01; β) Ποιον από τους δύο ελέγχους προτείνετε στους ερευνητές να επικαλεστούν για να είναι πιο πειστικοί για το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν, τον έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01 ή τον έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05; γ) Να απαντήσετε στο ερώτημα (α) αν γνωρίζετε ότι η P-τιμή του ελέγχου είναι 0.0016. δ) Δώστε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αύξηση στο μέσος ύψος λόγω της λίπανσης.

11. Σε ένα πείραμα που έγινε για να μελετηθεί η απόδοση δύο νέων ποικιλιών σίτου (έστω Α και Β), σπάρθηκαν από δύο όμοιοι αγροί σε 9 διαφορετικές περιοχές, από ένας αγρός για κάθε ποικιλία σε κάθε περιοχή. Οι αποδόσεις, σε κιλά, φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Περιοχή								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Ποικιλία Α	*38*	*23*	*35*	*41*	*44*	*29*	*37*	*31*	*38*
Ποικιλία Β	*45*	*25*	*31*	*38*	*50*	*33*	*36*	*40*	*43*

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, δίνουν αυτά τα πειραματικά δεδομένα στατιστικά σημαντικές αποδείξεις ότι η απόδοση των δύο ποικιλιών διαφέρει; Σε επίπεδο σημαντικότητας 1%;



Ο πίνακας δίνει τα σημεία $t_{\nu;\alpha}$ για τα οποία

$$P(T > t_{\nu;\alpha}) = \alpha$$

με $T \sim t_\nu$.

ν	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576