

Μάθημα: Στατιστική (Κωδ. 105)

Διδάσκων: Γιώργος Κ. Παπαδόπουλος

1. Πώς απαριθμούμε

Σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών, προτάσεων και τύπων

Η πολλαπλασιαστική αρχή	Αν το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με V_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του α_1 , το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με V_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$, το στοιχείο α_k μπορεί να επιλεγεί με V_k διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά, κατά $V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_k$ τρόπους.
Διάταξη των n στοιχείων ανά k	Κάθε διατεταγμένη k -άδα που αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία που επιλέγονται από n στοιχεία.
Πλήθος διατάξεων των n στοιχείων ανά k	$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$
Μετάθεση των n στοιχείων	Διάταξη των n στοιχείων ανά n
Πλήθος μεταθέσεων των n στοιχείων	$(n)_n = n!, n \geq 1$
Επαναληπτική διάταξη των n στοιχείων ανά k	Κάθε διατεταγμένη k -άδα που αποτελείται από στοιχεία που επιλέγονται από n στοιχεία.
Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων των n στοιχείων ανά k	$n^k, n \geq 1, k \geq 1$
Μετάθεση των k ειδών στοιχείων	Κάθε μετάθεση n στοιχείων που ανήκουν σε k διαφορετικά είδη.
Πλήθος μεταθέσεων των k ειδών στοιχείων	$\binom{n}{v_1, v_2, \dots, v_k} = \frac{n!}{v_1!v_2!\dots v_k!}, n = v_1 + v_2 + \dots + v_k$
Συνδυασμός των n στοιχείων ανά k	Κάθε μη διατεταγμένη συλλογή k διαφορετικών μεταξύ τους στοιχείων που επιλέγονται από n στοιχεία.
Πλήθος συνδυασμών των n στοιχείων ανά k	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$
Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ με $x, y \in (-\infty, +\infty)$ και $n \geq 0$.

Κριτήρια

Ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής;	Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μια φορές;	Σχηματισμός	Πλήθος σχηματισμών	Ερμηνεία με όρους δειγματοληψίας
NAI	OXI	<i>Διάταξη των n ανά k</i> $(1 \leq k \leq n)$	$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$	Διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση
	NAI	<i>Επαναληπτική Διάταξη των n ανά k</i> [†] $(n \geq 1, k \geq 1)$	n^k	Διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία με επανάθεση
	NAI	<i>Μετάθεση των k ειδών στοιχείων με $v_i, i = 1, 2, \dots, k$ στοιχεία από κάθε είδος</i> [‡] .	$\binom{n}{v_1, v_2, \dots, v_k} = \frac{n!}{v_1! v_2! \dots v_k!}$ Όπου, $n = v_1 + v_2 + \dots + v_k$	—
OXI	OXI	<i>Συνδυασμός των n ανά k</i> $(1 \leq k \leq n)$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Μη διατεταγμένα δείγματα μεγέθους k σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση

[†] Αν δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγιστο αριθμό φορών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κάθε στοιχείο

[‡] Αν υπάρχει περιορισμός στο μέγιστο αριθμό φορών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κάθε στοιχείο

Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Η πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω τριών δρόμων, η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω πέντε δρόμων και η πόλη Γ συνδέεται με την πόλη Δ μέσω οκτώ δρόμων. Από πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να επιλέξει κάποιος για να ταξιδεύσει α) από την πόλη Α στην πόλη Γ β) από την πόλη Β στην πόλη Δ γ) από την πόλη Α στην πόλη Δ και δ) από την πόλη Α στην πόλη Δ και στη συνέχεια να επιστρέψει στην πόλη Β.
2. Ένας γεωπόνος του Οργανισμού Ελληνικών Γεωργικών Ασφαλίσεων (ΕΛ.Γ.Α.) πρέπει να επισκεφθεί 6 περιοχές για να εκτιμήσει τις ζημιές που έγιναν σε καλλιέργειες αυτών των περιοχών από πρόσφατη πλημμύρα. Η συνολική απόσταση που πρέπει να διανύσει (και το συνολικό κόστος) εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θα επισκεφθεί τις 6 περιοχές. Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ο γεωπόνος για να αποφασίσει τη σειρά με την οποία θα επισκεφθεί τις 6 περιοχές;
3. Ένας φοιτητής, στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας του, ενδιαφέρεται να μελετήσει το αποτέλεσμα μιας χημικής αντίδρασης σε διαφορετικές (και ελεγχόμενες) συνθήκες θερμοκρασίας, πίεσης και συγκέντρωσης καταλύτη. Αν ενδιαφέρεται να διερευνήσει το αποτέλεσμα της χημικής αντίδρασης για δύο (διαφορετικές) τιμές θερμοκρασίας, τρεις (διαφορετικές) τιμές πίεσης και δύο (διαφορετικά) επίπεδα συγκέντρωσης καταλύτη, άραγε, πόσες φορές πρέπει να εκτελέσει τη χημική αντίδραση ώστε να καλύψει όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις θερμοκρασίας-πίεσης-καταλύτη και μάλιστα από τρεις φορές την κάθε μια;
4. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων δημιουργούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται τα 14 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου τα οποία συμπίπτουν με λατινικούς χαρακτήρες (A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T, Y, X) ενώ στην πρώτη θέση του δεύτερου τμήματος δε χρησιμοποιείται ο αριθμός 0. α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να δημιουργηθούν. β) Πόσοι από τους διαφορετικούς αριθμούς που μπορούν να δημιουργηθούν i) έχουν και τα τρία γράμματα του πρώτου τμήματος διαφορετικά μεταξύ τους ii) έχουν ως πρώτο γράμμα φωνήεν iii) έχουν στην πρώτη και στην τρίτη θέση φωνήεντα και iv) δεν περιέχουν στο δεύτερο τμήμα τους ίδια ψηφία.
5. Ένα σύνολο n στοιχείων, πόσα υποσύνολα έχει;
6. Μια τράπεζα διαθέτει 3 διαφορετικά ταμεία. Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργασθούν 8 διαφορετικοί υπάλληλοι της τράπεζας, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα 3 ταμεία (με έναν υπάλληλο σε κάθε ταμείο). Ποια θα ήταν η απάντηση αν η τράπεζα διέθετε 8 ταμεία.
7. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία υπάρχουν.
8. Κτηνίατρος πρόκειται να εξετάσει δέκα ζώα το ένα μετά το άλλο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.
9. Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις Αδενίνη, Κυτοσίνη, Γουανίνη και Θυμίνη

αντίστοιχα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους r αν σε αυτό υπάρχουν r_1 στοιχεία ίσα με A, r_2 στοιχεία ίσα με G, r_3 στοιχεία ίσα με C και r_4 ίσα με T ($r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$). Σε πόσα από τα τμήματα αυτά, τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί (π.χ. AA...ACC...CTT...TGG...G ή TT...TAA...AGG...GCC...C).

10. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί προκύπτουν από όλες τις μεταθέσεις των ψηφίων του αριθμού, 2434433;
11. Αν σε έναν οργανισμό κάθε διπλοειδές κύτταρο έχει 23 ζεύγη χρωμοσωμάτων (όπως, για παράδειγμα, στον ανθρώπινο), πόσοι διαφορετικοί γαμέτες είναι δυνατόν να δημιουργηθούν; (κάθε γαμέτης σε αυτό τον οργανισμό, έχει 23 χρωμοσώματα, ένα από κάθε ζεύγος χρωμοσωμάτων του διπλοειδούς κυττάρου).
12. Ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ περιλαμβάνει 13 αγώνες καταχωρημένους σε μία στήλη και δίπλα σε κάθε αγώνα σημειώνεται 1, X ή 2. α) Πόσες διαφορετικές στήλες μπορούν να σχηματισθούν. β) Αν για 6 συγκεκριμένους αγώνες χρησιμοποιήσουμε 1 σύμβολο, για 5 άλλους συγκεκριμένους αγώνες 2 σύμβολα και για τους υπόλοιπους 2 αγώνες 3 σύμβολα, πόσες διαφορετικές στήλες θα προκύψουν.
13. Για το γεύμα σας στο φοιτητικό εστιατόριο έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε μια σαλάτα από 3 διαφορετικές, ένα κυρίως πιάτο από 4 διαφορετικά και ένα φρούτο από 2 διαφορετικά. Άραγε, από πόσα διαφορετικά γεύματα αποφασίζετε ποιο θα επιλέξετε;
14. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να ανταλλάξουν χειραψίες 10 (διαφορετικά) άτομα.
15. Από τους 20 εργαζόμενους μιας μικρής επιχείρησης οι 5 είναι γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν 2 γυναίκες και 6 άνδρες έτσι ώστε α) να συσταθεί μια οκταμελής επιτροπή β) να τοποθετηθούν στις 8 αμειβόμενες με διαφορετικούς μισθούς θέσεις μιας ομάδας εργασίας.
16. Μια επιτροπή αποτελείται από 2 γεωπόνους και 3 μηχανικούς που επιλέγονται από 5 γεωπόνους και 7 μηχανικούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματισθεί αυτή η επιτροπή α) χωρίς άλλους περιορισμούς β) έτσι ώστε ένας συγκεκριμένος μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε γ) έτσι ώστε 2 συγκεκριμένοι γεωπόνοι να μην συμμετέχουν.
17. Πόσες διαφορετικές σαλάτες αποτελούμενες από τρία διαφορετικά λαχανικά μπορούν να δημιουργηθούν αν έχουμε στη διάθεσή μας πέντε διαφορετικά λαχανικά
18. Πόσες διαφορετικές σαλάτες μπορούν να δημιουργηθούν αν έχουμε στη διάθεσή μας πέντε διαφορετικά λαχανικά.
19. Πόσες διαφορετικές τριπλέτες νουκλεοτιδίων είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από τις τέσσερις βάσεις *Αδενίνη (A)*, *Κυτοσίνη (C)*, *Γουανίνη (G)* και *Θυμίνη (T)*;
20. Από 12 διαφορετικά αμινοξέα, πόσες διαφορετικές πολυπεπτιδικές αλυσίδες, αποτελούμενες από 5 διαφορετικά αμινοξέα η κάθε μια, είναι δυνατόν να δημιουργηθούν;