

## Μάθημα: Στατιστική (Κωδ. 105)

Διδάσκων: Γιώργος Κ. Παπαδόπουλος

### 4. Βασικές κατανομές και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

#### Σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών, προτάσεων και τύπων

<b>Η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους <math>n</math> και <math>p</math></b>	<p>Είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής, έστω <math>X</math>, που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε <math>n</math> ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με ίδια πιθανότητα επιτυχίας <math>p</math>. Συμβολίζεται με <math>B(n, p)</math> και έχει</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• συνάρτηση πιθανότητας <math display="block">f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n</math></li><li>• μέση τιμή <math>\mu = E(X) = np</math></li><li>• διακύμανση <math>\sigma^2 = Var(X) = np(1-p)</math></li><li>• πιο πιθανή τιμή <math>x_0 = \lfloor (n+1)p \rfloor</math> όταν <math>(n+1)p</math> δεν είναι ακέραιος ή <math>x_0 = (n+1)p</math> και <math>x'_0 = (n+1)p - 1</math> όταν <math>(n+1)p</math> είναι ακέραιος.</li></ul>
<b>Η κατανομή Poisson με παράμετρο <math>\lambda</math></b>	<p>Συμβολίζεται με <math>P(\lambda)</math> και είναι γνωστή και ως κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων. Έστω <math>X</math> τ.μ. με <math>X \sim P(\lambda)</math>. Η <math>X</math> έχει</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• συνάρτηση πιθανότητας <math display="block">f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots</math></li><li>• μέση τιμή <math>\mu = E(X) = \lambda</math></li><li>• διακύμανση <math>\sigma^2 = Var(X) = \lambda</math></li><li>• πιο πιθανή τιμή <math>x_0 = \lfloor \lambda \rfloor</math> όταν το <math>\lambda</math> δεν είναι ακέραιος ή <math>x_0 = \lambda</math> και <math>x'_0 = \lambda - 1</math> όταν το <math>\lambda</math> είναι ακέραιος</li></ul>
<b>Προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson</b>	<p>Αν <math>n \rightarrow +\infty</math> και <math>p \rightarrow 0</math> έτσι ώστε <math>np \rightarrow \lambda</math> τότε</p> $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ <p>Πρακτικά, η προσέγγιση της διωνυμικής <math>B(n, p)</math> από την <math>P(np)</math>, είναι ικανοποιητική αν <math>n \geq 10</math> και <math>p \leq 10/n</math> ώστε η μέση τιμή <math>\lambda = np</math> να παίρνει μέτριες τιμές (μικρότερες του 10).</p>
<b>Η διαδικασία Poisson με ρυθμό <math>\lambda</math></b>	<p>Αν <math>X_t</math> ο αριθμός εμφανίσεων ενός ενδεχομένου σε χρόνο <math>t</math> (ή σε μήκος <math>t</math> ή σε επιφάνεια <math>t</math> ή σε όγκο <math>t</math>) τότε κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις η συνάρτηση πιθανότητας της <math>X_t</math> δίνεται από τον τύπο</p> $P(X_t = x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$
<b>Η κανονική κατανομή με παραμέτρους <math>\mu</math> και <math>\sigma</math></b>	<p>Συμβολίζεται με <math>N(\mu, \sigma^2)</math>. Έστω <math>X</math> τ.μ. με <math>X \sim N(\mu, \sigma^2)</math>. Η <math>X</math> έχει</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• συνάρτηση πυκνότητας <math display="block">f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty &lt; x &lt; +\infty, \quad -\infty &lt; \mu &lt; +\infty, \quad \sigma &gt; 0</math></li><li>• μέση τιμή <math>E(X) = \mu</math></li><li>• διακύμανση <math>Var(X) = \sigma^2</math>.</li></ul>
<b>Η τυποποιημένη κανονική κατανομή</b>	<p>Είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή <math>\mu = 0</math> και διακύμανση <math>\sigma^2 = 1</math>. Συμβολίζεται με <math>Z</math>, δηλαδή, <math>Z \sim N(0, 1)</math>. Η συνάρτηση πυκνότητάς της συμβολίζεται με <math>\varphi(z)</math> και δίνεται από τον τύπο</p>

	$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty$ <p>και η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με <math>\Phi(z)</math> και δίνεται από τον τύπο</p> $\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < z < +\infty.$
<b>Υπολογισμός πιθανοτήτων κανονικής τ.μ.</b>	<p>α) Τυποποιημένη κανονική <math>Z \sim N(0,1)</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>P(Z \leq z) = \Phi(z)</math> και <math>P(Z \leq -z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)</math></li> </ul> <p>(δίνονται από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)</math></li> <li><math>P(Z &gt; a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a)</math></li> <li><math>P(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1</math></li> </ul> <p>β) Κανονική με <math>X \sim N(\mu, \sigma^2)</math>          Αν <math>X \sim N(\mu, \sigma^2)</math> τότε <math>Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)</math></li> <li><math>P(X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)</math></li> <li><math>P(X \geq \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)</math></li> </ul>
<b>Γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών</b>	<p>Αν <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> ανεξάρτητες τ.μ. με <math>X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)</math> και <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta</math> πραγματικοί, τότε η τ.μ.</p> $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i + \beta = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + \beta$ <p>ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή</p> $\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_n \mu_n + \beta$ <p>και διακύμανση <math>\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2</math>.</p> <p>Επίσης, αν <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> ανεξάρτητες τ.μ. με <math>X_i \sim N(\mu, \sigma^2)</math>, τότε</p> $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$
<b>Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα</b>	<p>Αν <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή με <math>E(X_i) = \mu</math> και <math>Var(X_i) = \sigma^2</math>, τότε για μεγάλα <math>n</math>, κατά προσέγγιση,</p> $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ <p>ή, ισοδύναμα, <math>S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)</math>.</p> <p>Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αν <math>n \geq 30</math>.</p>
<b>Προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής από την Κανονική (Θεώρημα De Moivre-Laplace)</b>	<p>Αν <math>X \sim B(n, p)</math> τότε για μεγάλα <math>n</math>, κατά προσέγγιση,</p> $X \sim N(np, np(1-p)).$ <p>Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αν <math>np \geq 5</math> και <math>n(1-p) \geq 5</math>.</p>
<b>Προσέγγιση της κατανομής Poisson από την Κανονική</b>	<p>Αν <math>X \sim P(\lambda)</math> τότε για μεγάλα <math>\lambda</math>, κατά προσέγγιση,</p> $X \sim N(\lambda, \lambda).$ <p>Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αν <math>\lambda &gt; 10</math>.</p>

## Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Έχει διαπιστωθεί ότι το 30% των ζώων που κατά τον εμβολιασμό εκτίθενται σε μολυσμένη βελόνα από ηπατίτιδα Β, αναπτύσσει ηπατίτιδα Β. Επιλέγουμε τυχαία 5 ζώα από ένα πληθυσμό ζώων που έχουν εμβολιασθεί με μολυσμένη βελόνα. α) Ποια είναι πιθανότητα από τα 5 ζώα να βρεθούν άρρωστα από ηπατίτιδα Β i) ακριβώς 2 ii) το πολύ 1 iii) τουλάχιστον 3. β) Πόσα ζώα (από τα 5) αναμένεται να βρεθούν άρρωστα από ηπατίτιδα Β.
2. Σε έναν πληθυσμό της μύγας *Drosophila melanogaster* το 25% είναι μαύρες λόγω κάποιας μετάλλαξης, ενώ το υπόλοιπο 75% έχουν το φυσιολογικό τους γκρι χρώμα. (I) Από 7 μύγες που παγιδεύσαμε τυχαία από αυτό τον πληθυσμό α) πόσες αναμένεται να είναι μαύρες β) ποια είναι η πιθανότητα να βρεθούν να είναι μαύρες i) όλες ii) καμία iii) τουλάχιστον μια iv) λιγότερες από 7 v) ακριβώς 3 vi) λιγότερες από 3 vii) τουλάχιστον 3 viii) το πολύ 3 γ) πόσες μύγες είναι πιο πιθανό να βρεθούν να είναι μαύρες. (II) Από 20 μύγες που παγιδεύσαμε τυχαία από αυτό τον πληθυσμό πόσες αναμένεται να είναι μαύρες;
3. Από τους σπόρους πιπεριάς συγκεκριμένου είδους βλαστάνει μόνο το 80%. Από μια συσκευασία 10 τέτοιων σπόρων α) πόσοι αναμένεται να βλαστήσουν β) ποια είναι η πιθανότητα να βλαστήσει i) τουλάχιστον ένας ii) όλοι iii) τουλάχιστον οκτώ γ) πόσοι είναι πιο πιθανό να βλαστήσουν.
4. Έχει παρατηρηθεί ότι από τα άτομα που κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν με συγκεκριμένη αεροπορική εταιρεία, ένα ποσοστό 5% δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Αν σε μια πτήση που γίνεται με ένα αεροσκάφος 40 θέσεων η εταιρεία κάνει κράτηση για 43 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να ταξιδέψουν όλα τα άτομα που θα εμφανισθούν για να ταξιδέψουν (από τα 43 που έχουν κάνει κράτηση).
5. Το δίκτυο ομβρίων μιας αγροτικής περιοχής δε μπορεί να ανταποκριθεί σε δυσμενείς καιρικές συνθήκες που εμφανίζονται στην περιοχή κατά μέσο όρο μια φορά στα 25 χρόνια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα από πέντε χρονιές να πλημμυρίσει η περιοχή α) το πολύ δύο χρονιές β) τουλάχιστον τρεις χρονιές αν ήδη έχει πλημμυρίσει τουλάχιστον μια χρονιά.
6. Ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από 6 εξαρτήματα λειτουργεί αν τουλάχιστον 4 από τα εξαρτήματά του λειτουργούν. Αν η πιθανότητα λειτουργίας (η αξιοπιστία) κάθε εξαρτήματος είναι 0.9 να βρεθεί α) η πιθανότητα λειτουργίας (η αξιοπιστία) του συστήματος β) η πιθανότητα να υποστούν βλάβη τουλάχιστον τρία εξαρτήματα δεδομένου ότι έχουν υποστεί βλάβη τουλάχιστον δύο. (Θεωρείστε ότι τα εξαρτήματα του συστήματος λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.)
7. Ένα σύστημα αποτελείται από  $n$  εξαρτήματα τύπου E1 και  $m$  εξαρτήματα τύπου E2 που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η πιθανότητα λειτουργίας κάθε εξαρτήματος τύπου E1 είναι  $p_1$  και κάθε εξαρτήματος τύπου E2 είναι  $p_2$  και το σύστημα λειτουργεί αν λειτουργούν συγχρόνως τουλάχιστον 3 εξαρτήματα τύπου E1 και τουλάχιστον δύο εξαρτήματα τύπου E2. Να βρεθεί η αξιοπιστία (η πιθανότητα λειτουργίας) του συστήματος.

8. Οι σπόροι του μπιζελιού *Pisum sativum* είναι πράσινοι ή κίτρινοι. Μια συγκεκριμένη διασταύρωση δίνει σπόρους σε αναλογία 3 κίτρινοι:1 πράσινο. Αν από τους σπόρους που προέκυψαν από μια τέτοια διασταύρωση επιλέξουμε τυχαία τέσσερις, ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε (α) τρεις κίτρινους και έναν πράσινο (β) και τους τέσσερις πράσινους (γ) και τους τέσσερις του ίδιου χρώματος.
9. Έχει παρατηρηθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί σοβαρό ατύχημα με γεωργικό μηχάνημα σε μια μεγάλη αγροτική περιοχή είναι 0.0001. Αν κατά τη διάρκεια μιας εργάσιμης ημέρας στην περιοχή αυτή χρησιμοποιούνται 1000 γεωργικά μηχανήματα, ποια είναι η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον δύο ατυχήματα; (Για την επιλογή της κατανομής που θα χρησιμοποιήσετε παρατηρείστε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων είναι πολύ μεγάλος και η πιθανότητα «επιτυχίας» πολύ μικρή).
10. Από παρατηρήσεις πολλών ετών έχει επαληθευθεί ότι ο αριθμός  $X_t$  των σεισμών μεγέθους μεγαλύτερου των 5.5 Richter που συμβαίνουν σε μια σεισμογόνο περιοχή σε χρόνο  $t$ , περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson. Αν ο ρυθμός εμφάνισής τους είναι 2 ανά έτος α) ποια είναι η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον 3 σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 5.5 Richter σε ένα χρονικό διάστημα i. ενός έτους ii. τριών μηνών iii. δύο ετών β) ποια είναι η πιθανότητα στα επόμενα 20 έτη να υπάρξουν ακριβώς 5 έτη σε καθένα από τα οποία να συμβούν τουλάχιστον 3 σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 5.5 Richter γ) ποια είναι η πιθανότητα σε χρονικό διάστημα 20 ετών να συμβούν τουλάχιστον 2 σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 5.5 Richter.
11. Έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός  $X_t$  ενός σπάνιου είδους φυτών σε έκταση εμβαδού  $t$ , περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson με μέσο αριθμό φυτών ανά στρέμμα 3 φυτά. α) Να βρεθεί η πιθανότητα i. σε μια έκταση ενός στρέμματος να υπάρχουν τουλάχιστον δύο φυτά ii. σε μια έκταση μισού στρέμματος να υπάρχει το πολύ ένα φυτό iii. σε μια έκταση 2 στρεμμάτων να υπάρχουν τουλάχιστον τρία φυτά. β) Σε μια έκταση 3 στρεμμάτων ποιος είναι ο πιθανότερος αριθμός φυτών; Επίσης, να βρεθεί η πιθανότητα εμφάνισης αυτού του αριθμού φυτών.
12. Συνέχεια της άσκησης 6 του φυλλαδίου 3): Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα τριών τέτοιων εξαρτημάτων. Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς ένα από αυτά να λειτουργήσει από 200 έως 250 ώρες.
13. Συνέχεια της άσκησης 18 του φυλλαδίου 2: Επιλέγονται τυχαία 6 άτομα, υποβάλλονται στην εξέταση και το αποτέλεσμα και στις έξι περιπτώσεις είναι θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον τρία από αυτά πράγματι να πάσχουν από AIDS.
14. Σε μια μεγάλη μονάδα θερμοκηπίων έχει εγκατασταθεί σύστημα αυτόματου ποτίσματος. Έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός  $X_t$  των ελαττωματικών μπεκ σε μήκος σωλήνα  $t$ , περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson με μέσο αριθμό ελαττωματικών μπεκ, 3 μπεκ ανά κομμάτι σωλήνα. α) Να βρεθούν οι πιθανότητες: i. σε ένα κομμάτι σωλήνα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ελαττωματικά μπεκ ii. σε ένα τρίτο κομματιού σωλήνα να υπάρχει το πολύ ένα ελαττωματικό μπεκ iii. σε μήκος σωλήνα όσο τρία κομμάτια να υπάρχουν

τουλάχιστον δύο ελαττωματικά μπεκ iv. από τρία τυχαία επιλεγμένα κομμάτια σωλήνα να υπάρχει το πολύ ένα με τουλάχιστον δύο ελαττωματικά μπεκ. β) Σε μήκος σωλήνα όσο τρία κομμάτια, ποιος είναι ο πιθανότερος αριθμός ελαττωματικών μπεκ.

15. Σε έναν πληθυσμό (ας πούμε γυναίκες ηλικίας 20 – 30 ετών σε μια πόλη), η μέση συστολική πίεση είναι 120mmHg, με τυπική απόκλιση 20mmHg και ο πληθυσμός (των πιέσεων) ακολουθεί κανονική κατανομή. α) Τι ποσοστό του πληθυσμού έχει πίεση i) μεταξύ 110 και 125mmHg ii) μεγαλύτερη από 135mmHg iii) μικρότερη από 135mmHg. β) Ποια είναι εκείνη η τιμή της πίεσης μεγαλύτερη από την οποία έχει i) μόνο το 1% του πληθυσμού ii) το 95% του πληθυσμού. γ) Η συστολική πίεση ενός ατόμου κρίνεται ως φυσιολογική αν βρίσκεται σε εκείνο το συμμετρικό διάστημα γύρω από τον μέσο που περιέχει το 95% των πιέσεων του πληθυσμού. Να βρεθεί εκείνη η τιμή πίεσης πάνω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υπερτασικό. Να βρεθεί επίσης εκείνη η τιμή της πίεσης κάτω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υποτασικό. δ) Να χωρίσετε το διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  σε 4 διαστήματα καθένα από τα οποία να περιέχει το ίδιο ποσοστό πιέσεων, δηλαδή, σε 4 ισοπίθανα διαστήματα. Ομοίως, ο χωρισμός να γίνει σε 5 ισοπίθανα διαστήματα. ε) Αν στην πόλη αυτή οι γυναίκες ηλικίας 20 – 30 ετών είναι 5000, πόσες από αυτές τις γυναίκες αναμένεται να έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη από 135mmHg.
16. Σε ένα πείραμα μετρήθηκε η αύξηση (σε χρονικό διάστημα δύο εβδομάδων) του ύψους φυτών ηλιόσπορου και βρέθηκε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 3.18cm και τυπική απόκλιση 0.53cm. α) Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα από τα φυτά, ποια η πιθανότητα να έχει αυξηθεί το ύψος του i) περισσότερο από 4cm ii) λιγότερο από 3cm iii) τουλάχιστον 2.5 και όχι περισσότερο από 3.5cm. β) Αν επιλέξουμε τρία από τα φυτά στην τύχη i) ποια η πιθανότητα να βρούμε τουλάχιστον ένα με αύξηση ύψους λιγότερο από 3cm ii) ποια η πιθανότητα η μέση αύξηση του ύψους τους να είναι τουλάχιστον 2.5 και όχι περισσότερο από 3.5cm. γ) Πώς συγκρίνετε τις πιθανότητες που υπολογίσατε στα ερωτήματα (α-iii) και (β-ii).
17. Ένας μεγάλος πειραματικός αγρός χωρίστηκε σε πολλά αγροτεμάχια (2x30m το καθένα) και σπάρθηκε με σιτάρι συγκεκριμένης ποικιλίας. Μετρήθηκε η παραγωγή ανά αγροτεμάχιο (σε Kg) και βρέθηκε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 39.9Kg και τυπική απόκλιση 3.2Kg. α) Τι ποσοστό των αγροτεμαχίων έδωσε παραγωγή i) περισσότερο από 45Kg ii) τουλάχιστον 36Kg iii) μεταξύ 39.5 και 40.5Kg. β) Ποια είναι η πιθανότητα η συνολική παραγωγή 5 αγροτεμαχίων που επιλέξαμε τυχαία να είναι μεγαλύτερη από 220Kg.
18. Σε ένα κλασικό πείραμα που έγινε για να διαχωριστούν γενετικοί από περιβαλλοντικούς παράγοντες, μετρήθηκαν τα βάρη 5494 σπόρων φασολιού (*phaseolus vulgaris*) και βρέθηκε ότι αυτά ακολουθούν μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 504mg και διακύμανση 9082.09mg<sup>2</sup>. α) Τι ποσοστό αυτών των σπόρων έχουν βάρη μεταξύ 400 και 550mg. β) Βρείτε εκείνο το βάρος, μεγαλύτερο από το οποίο έχει i) μόνο το 1% των σπόρων ii) το 99% των σπόρων. γ) Βρείτε το 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο της κατανομής των βαρών.
19. Έχει διαπιστωθεί ότι από τα δένδρα ενός συγκεκριμένου είδους μιας μεγάλης περιοχής, ποσοστό 2% προσβάλλεται κάθε χρόνο από μια συγκεκριμένη ασθένεια (η οποία τις περισσότερες φορές τελικά αντιμετωπίζεται). α) Αν ένας γεωπόνος

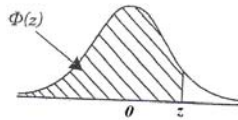
εξετάσει ένα τυχαίο δείγμα 10 δένδρων από την περιοχή, ποια η πιθανότητα στα 10 αυτά δένδρα να υπάρχουν i) ακριβώς 2 δένδρα που έχουν προσβληθεί ii) τουλάχιστον 2 δένδρα που έχουν προσβληθεί. β) Αν ο γεωπόνος εξετάσει ένα τυχαίο δείγμα 300 δένδρων από την περιοχή, ποια η πιθανότητα να βρει i) μεταξύ τριών και οκτώ δένδρων να έχουν προσβληθεί ii) τουλάχιστον 15 δένδρα να έχουν προσβληθεί. γ) Αν όντως βρει 15 στα 300 δένδρα να έχουν προσβληθεί, υπάρχει λόγος ανησυχίας ότι το ποσοστό των δένδρων που έχουν προσβληθεί παρουσιάζει αύξηση;

20. Από τη συνολική παραγωγή ενός παραγωγού καρπουζιών, πρώτης ποιότητας είναι το 80% των καρπουζιών. Σε μια τυχαία παρτίδα (φορτίο) 500 καρπουζιών από τη συγκεκριμένη παραγωγή, ποια είναι η πιθανότητα τα πρώτης ποιότητας καρπούζια να είναι μεταξύ 75% και 82% .
21. Ένα τρυβλίο Petri με αποικίες βακτηριδίων χωρίζεται σε μικρά τετραγωνίδια. Έχει επαληθευθεί πειραματικά ότι ο αριθμός  $X_i$  των βακτηριδίων σε τετραγωνίδια εμβαδού  $t$  περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson. Αν έχει παρατηρηθεί ότι ο μέσος αριθμός βακτηριδίων ανά  $\text{cm}^2$  είναι 4 βακτηρίδια, να βρεθεί η πιθανότητα α) να υπάρξουν τουλάχιστον 2 βακτηρίδια i) σε  $1 \text{ cm}^2$  ii) σε  $3 \text{ cm}^2$  β) να υπάρξει τουλάχιστον 1 βακτηρίδιο σε καθένα από 3 τετραγωνίδια του  $1 \text{ cm}^2$  γ) να υπάρξουν το πολύ 80 βακτηρίδια σε  $50 \text{ cm}^2$  δ) από 5 τετραγωνίδια του  $1 \text{ cm}^2$  να υπάρξουν σε τουλάχιστον 3 από αυτά, το πολύ 2 βακτηρίδια.
22. Η ποσότητα νικοτίνης που περιέχεται σε ένα τσιγάρο συγκεκριμένης μάρκας είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $0.8\text{mg}$  και τυπική απόκλιση  $0.1\text{mg}$ . Αν ένα άτομο καπνίζει 100 τσιγάρα την εβδομάδα ποια είναι η πιθανότητα η συνολική ποσότητα νικοτίνης στην οποία θα εκτεθεί να είναι τουλάχιστον  $82\text{mg}$ .
23. Κατά την παραγωγή ενός πακέτου φυτοφαρμάκου έχει βρεθεί ότι η ποσότητα ξένων προσμίξεων που υπάρχει στο πακέτο είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $4 \text{ gr}$  και τυπική απόκλιση  $1.5\text{gr}$ . Αν πάρουμε δείγμα 50 τέτοιων πακέτων, ποια είναι η πιθανότητα η μέση ποσότητα ξένων προσμίξεων (στα 50 πακέτα) να βρίσκεται μεταξύ  $3.5\text{gr}$  και  $3.8\text{gr}$ .
24. Στο πλαίσιο ενός πειράματος, ένας μεγάλος αριθμός πειραματικών αγρών σπάρθηκαν με σιτάρι συγκεκριμένης ποικιλίας. Κάθε πειραματικός αγρός είχε χωρισθεί σε 100 αγροτεμάχια ( $2 \times 30\text{m}$  το καθένα). Η μέση παραγωγή ανά αγροτεμάχιο βρέθηκε  $39.9\text{Kg}$  με τυπική απόκλιση  $3.2\text{Kg}$ . α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πειραματικός αγρός να έδωσε μέση παραγωγή ανά αγροτεμάχιο i) περισσότερο από  $45\text{Kg}$  ii) τουλάχιστον  $36\text{Kg}$  iii) μεταξύ  $39.5$  και  $40.5\text{Kg}$ . β) Να εκφράσετε τις πιθανότητες που ζητούνται στο ερώτημα (α) ως ποσοστά.
25. Ο χρόνος ζωής μιας λυχνίας ορισμένου τύπου είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $1285$  ώρες και τυπική απόκλιση  $150$  ώρες. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα 100 λυχνιών αυτού του τύπου. Να βρεθεί η πιθανότητα ο μέσος χρόνος ζωής των 100 λυχνιών του δείγματος να είναι μεγαλύτερος από  $1300$  ώρες.
26. Το 2% των ζώων μιας μεγάλης κτηνοτροφικής μονάδας έχει προσβληθεί από μια ασθένεια. Για τη διάγνωση της συγκεκριμένης ασθένειας μπορεί να γίνει μια εξέταση η οποία όταν το ζώο έχει προσβληθεί από την ασθένεια δίνει σωστή

διάγνωση με πιθανότητα 95% ενώ όταν το ζώο δεν έχει προσβληθεί από την ασθένεια δίνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 98%. α) Επιλέγονται τυχαία 5 ζώα για να εξετασθούν. Πριν υποβληθούν στην εξέταση, ποια είναι η πιθανότητα να έχει προσβληθεί το πολύ ένα από αυτά. β) Επιλέγεται τυχαία ένα ζώο και εξετάζεται. i) Ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα της εξέτασης να είναι θετικό. ii) Αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό ποια είναι η πιθανότητα το ζώο να έχει πράγματι προσβληθεί. Επίσης, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει προσβληθεί. iii) Τα ενδεχόμενα «το ζώο έχει προσβληθεί» και «η εξέταση δίνει θετικό αποτέλεσμα» είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. γ) Από 5 ζώα που εξετάστηκαν και η εξέταση έδωσε και στις 5 περιπτώσεις θετικό αποτέλεσμα, ποια είναι η πιθανότητα το πολύ ένα να έχει πράγματι προσβληθεί. δ) Από 300 ζώα που εξετάστηκαν και η εξέταση έδωσε και στις 300 περιπτώσεις θετικό αποτέλεσμα i) πόσα ζώα αναμένεται να έχουν πράγματι προσβληθεί ii) ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 10 να έχουν πράγματι προσβληθεί.

27. *Συνέχεια της άσκησης 6 του φυλλαδίου 3:* Ποια είναι η πιθανότητα ο μέσος χρόνος λειτουργίας 50 εξαρτημάτων που επιλέγονται τυχαία να βρίσκεται μεταξύ 200 και 250 ωρών.
28. Σε μια ανθοκομική μονάδα έχει συγκεντρωθεί ένας μεγάλος αριθμός σπόρων τουλίπας σε αναλογία, ως προς το χρώμα των λουλουδιών που θα παράγουν, 2 κόκκινα:2 λευκά:1 κίτρινο. Μια αυτόματη μηχανή συσκευασίας ανακατεύει πολύ καλά τους σπόρους και τους συσκευάζει σε σακουλάκια των 100 σπόρων (περίπου). Επιλέγουμε τυχαία ένα σακουλάκι. Ποια είναι η πιθανότητα να περιέχει α) το πολύ 50 σπόρους που παράγουν λευκά λουλούδια β) τουλάχιστον 65 σπόρους που δεν παράγουν λευκά λουλούδια.
29. Η εθνική επιτροπή για την ασφάλεια και την υγιεινή της εργασίας ολοκλήρωσε μια μελέτη για το επίπεδο διοξίνης TCDD στο οποίο εκτίθενται οι εργαζόμενοι σε μια βιομηχανική περιοχή. Η μελέτη έδειξε ότι το επίπεδο διοξίνης είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu = 293 \text{ ppt}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 847 \text{ ppt}$ . Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα 50 εργαζομένων από την περιοχή. α) Αν το συμπέρασμα της μελέτης είναι σωστό, ποια είναι η πιθανότητα το μέσο επίπεδο διοξίνης που δέχονται οι 50 εργαζόμενοι να ξεπερνά τα 600 ppt. β) Αν βρεθεί ότι το μέσο επίπεδο διοξίνης που δέχονται οι 50 εργαζόμενοι του δείγματος είναι 625 ppt και το συμπέρασμα της μελέτης είναι σωστό, πώς μπορεί να ερμηνευθεί η τιμή 625 ppt που παρατηρήθηκε στο δείγμα;
30. Η ποσότητα, έστω  $X$ , καλίου που περιέχεται σε ένα πορτοκάλι μεσαίου μεγέθους είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu = 550 \text{ mg}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 20 \text{ mg}$ . α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο πορτοκάλι μεσαίου μεγέθους να περιέχει τουλάχιστον 510mg κάλιο; β) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τρία τυχαία επιλεγμένα πορτοκάλια μεσαίου μεγέθους να περιέχει τουλάχιστον 510mg κάλιο; γ) Σε ένα διαιτολόγιο εντάσσουμε τέσσερα πορτοκάλια μεσαίου μεγέθους ημερησίως και έστω  $Y$  η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τη συνολική ποσότητα καλίου που περιέχεται σε αυτά. i) Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ ; ii) Ποια είναι η πιθανότητα η συνολική ποσότητα καλίου που περιέχεται σε τέσσερα τυχαία επιλεγμένα πορτοκάλια μεσαίου μεγέθους να είναι τουλάχιστον 2120mg και το πολύ 2280mg;

Τιμές των  
πιθανοτήτων  
 $\Phi(z) = P(Z \leq z)$   
της  $N(0,1)$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998