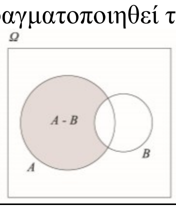
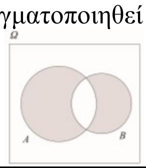
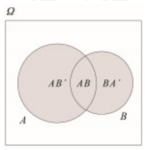
Μάθημα: Στατιστική (Κωδ. 105)

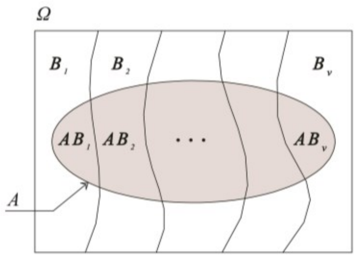
Διδάσκων: Γιώργος Κ. Παπαδόπουλος

2. Πιθανότητα και Δεσμευμένη Πιθανότητα

Σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών, προτάσεων και τύπων

Πείραμα τύχης - Η έννοια του τυχαίου	Σε μια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης το αποτέλεσμα δεν καθορίζεται με βάση την αρχή της αιτιότητας (όπως στα αιτιοκρατικά φαινόμενα και πειράματα) αλλά αποδίδεται στην **τύχη**. Η έννοια του **τυχαίου** συνδέεται με το **πολυσύνθετο** και το **περιορισμένο** της γνώσης των αιτίων που προκαλούν το αποτέλεσμα. Χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι μπορεί να επαναληφθεί υπό τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε (θεωρητικά άπειρες φορές) και ότι σε μια εκτέλεσή του δε μπορούμε να προβλέψουμε **με βεβαιότητα** το αποτέλεσμα που θα εμφανισθεί, όμως μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα **δυνατά** αποτελέσματά του.
Δειγματικός χώρος (δ.χ.)* Ω *ενός πειράματος τύχης	Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του.
Είδη δειγματικών χώρων	**Πεπερασμένοι**: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ **Αριθμησίμως άπειροι**: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ **Συνεχείς**: $\Omega = (-\infty, +\infty)$ ή $\Omega = [\alpha, \beta]$ ή $\Omega = [\alpha, +\infty)$ κτλ. Οι *πεπερασμένοι* και οι *αριθμησίμως άπειροι δ.χ.* ονομάζονται **διακριτοί δ.χ.**
Δειγματικό σημείο	Κάθε στοιχείο ενός δειγματικού χώρου, δηλαδή κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.
Ενδεχόμενα του δ.χ. ενός πειράματος τύχης	Υποσύνολα του δειγματικού χώρου.
Πραγματοποίηση ενδεχομένου	Σε μια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται (εμφανίζεται) όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του.
Απλό και σύνθετο ενδεχόμενο	Αν ένα ενδεχόμενο αποτελείται από μόνο ένα δειγματικό σημείο ονομάζεται απλό ενδεχόμενο ενώ αν αποτελείται από περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζεται σύνθετο ενδεχόμενο.
***Βέβαιο ενδεχόμενο,* Ω**	Πραγματοποιείται πάντα.
Αδύνατο ενδεχόμενο, $\varnothing$	Δεν πραγματοποιείται ποτέ.
***Το ενδεχόμενο* Α *συνεπάγεται το ενδεχόμενο* Β,** $A \subseteq B$	Όταν πραγματοποιείται το *A* πραγματοποιείται και το *B*.
Ίσα ενδεχόμενα $A = B$	Όταν πραγματοποιείται το *A* πραγματοποιείται και το *B* και αντιστρόφως.
Τομή ενδεχομένων $A \cap B$ *ή* AB	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί και το *A* και το *B*.
Ένωση ενδεχομένων $A \cup B$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ή το *A* ή το *B* (ή και τα δύο), ή αλλιώς, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα *A, B*.
Συμπλήρωμα A' ***του ενδεχομένου*** A	Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιηθεί το *A*.
***Ξένα ή ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα* Α, Β**	Ενδεχόμενα τα οποία δεν έχουν κοινά δειγματικά σημεία ($AB = \varnothing$) ή αλλιώς, η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.
Διαφορά $A - B$ *ή* AB'	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το *A* αλλά όχι το *B*. 

Συμμετρική διαφορά $A \Delta B = AB' \cup BA'$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα *A, B*. 
$(A \cup B)'$	Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται ούτε το *A* ούτε το *B*.
$(AB)'$	Πραγματοποιείται όταν από τα *A, B* πραγματοποιηθεί το πολύ ένα.
Ιδιότητες των πράξεων μεταξύ ενδεχομένων	$A \cup \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$ $A \cup A = A$, $AA = A$ $A \cup \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$ $A \cup A' = \Omega$, $AA' = \varnothing$, $(A')' = A$, $\Omega' = \varnothing$, $\varnothing' = \Omega$ $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$ $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ $A \cup (B\Gamma) = (A \cup B)(A \cup \Gamma)$, $A(B \cup \Gamma) = (AB) \cup (A\Gamma)$ Αν $A \subseteq B$ τότε $AB = A$, $A \cup B = B$ και $A - B = AB' = \varnothing$ Τύποι De Morgan: $(A \cup B)' = A'B'$, $(AB)' = A' \cup B'$ $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)' = A_1' A_2' \ldots A_\nu'$ $(A_1 A_2 \ \ldots \ A_\nu)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_\nu'$
Η ένωση $A \cup B$ ως ένωση ξένων ενδεχομένων	$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$  Επίσης, $A = AB' \cup AB$ και $B = BA \cup BA'$
Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας (Laplace, 1812)	Αν ο Ω είναι πεπερασμένος και όλα τα απλά ενδεχόμενά του είναι ισοπίθανα, τότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A}}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau o\upsilon\ \Omega}$.
Ο στατιστικός ορισμός της πιθανότητας (Richard von Mises, 1919)	$P(A) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{\nu_A}{\nu}$, όπου ν_A ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου *A* σε ν επαναλήψεις του πειράματος ***<u>Στατιστική ομαλότητα (statistical regularity):</u>*** *όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται πολλές φορές η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από κάποια τιμή η οποία ονομάζεται οριακή σχετική συχνότητα του ενδεχομένου.*
Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov, 1933)	1. $P(A) \geq 0$, $\forall$ ενδεχόμενο Α του Ω. 2. $P(\Omega) = 1$ 3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$, για $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.
Άλλες ιδιότητες της πιθανότητας (προκύπτουν από τα τρία αξιώματα)	*(α)* $P(\varnothing) = 0$ *(β)* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$ *για* $A_1,\ A_2, \ldots, A_\nu$ *ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.* *(γ) Αν* $A = \{a_1,\ a_2, \ldots\}$, *τότε,* $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots$ *(δ)* $P(A) \leq 1$ *(ε)* $P(A') = 1 - P(A)$ *(στ)* $P(AB') = P(A) - P(AB)$ *(ζ) Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $P(A) \leq P(B)$ *(η)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ *(θ)* $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ *(ι)* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$.

Δεσμευμένη πιθανότητα του Α δοθέντος του Β	$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)},\ P(B) > 0$ (δηλ. $P(B) \neq 0$)
Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας	1. $P(A \mid B) \geq 0$ 2. $P(\Omega \mid B) = 1$ 3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \ldots$ *για* $A_1,\ A_2, \ldots$ *ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.*
Άλλες ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας	$P(\varnothing \mid B) = 0$ $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$ $P(A\Gamma' \mid B) = P(A \mid B) - P(A\Gamma \mid B)$ Αν $\Gamma \subseteq A$ τότε $P(\Gamma \mid B) \leq P(A \mid B)$ $P(A \cup \Gamma \mid B) = P(A \mid B) + P(\Gamma \mid B) - P(A\Gamma \mid B)$ Όταν $B \subseteq A$ τότε $P(A \mid B) = 1$.
Ο πολλαπλασιαστικός τύπος	$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$ αν $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Γενικότερα: αν $P(A_1A_2 \ldots A_{\nu-1}) > 0$, $P(A_1A_2 \ldots A_\nu) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_\nu \mid A_1A_2 \ldots A_{\nu-1})$
Το θεώρημα ολικής πιθανότητας	Αν $\{B_1,\ B_2, \ldots B_\nu\}$ μια διαμέριση του Ω με $P(B_i) > 0,\ i = 1,2,\ldots,\nu$, τότε $P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_\nu) \Leftrightarrow$ $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_\nu) \Leftrightarrow$ $P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_\nu)P(B_\nu)$ ή $P(A) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A \mid B_i)P(B_i)$ 
Ο τύπος του Bayes	Αν $\{B_1,\ B_2, \ldots B_\nu\}$ διαμέριση του Ω με $P(B_i) > 0$ για κάθε i, τότε $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{\nu} P(A \mid B_i)P(B_i)},\ i = 1,2,\ldots,\nu$ όπου $P(A)$ υπολογίζεται από το θεώρημα ολικής πιθανότητας.
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α, Β	$P(AB) = P(A)P(B)$. Αν *Α, Β* ανεξάρτητα και $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ τότε $P(A \mid B) = P(A)$ και $P(B \mid A) = P(B)$
Εξαρτημένα ενδεχόμενα Α, Β	$P(AB) \neq P(A)P(B)$
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α, Β, Γ	$P(AB) = P(A)P(B)$, $P(A\Gamma) = P(A)P(\Gamma)$ $P(B\Gamma) = P(B)P(\Gamma)$ και $P(AB\Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$
Ανεξαρτησία και συμπληρωματικά ενδεχόμενα	Αν *Α, Β* ανεξάρτητα τότε είναι ανεξάρτητα και τα ζεύγη *α) Α, Β΄ β) Α΄, Β γ) Α΄, Β΄*
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα και ξένα ενδεχόμενα	Αν *Α, Β* **ξένα** (με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$) τότε: $P(A \mid B) = 0 \neq P(A)$ και $P(B \mid A) = 0 \neq P(B)$ συνεπώς τα *Α, Β* είναι **εξαρτημένα**. Αν *Α, Β* **ξένα** τότε: $P(AB) = 0$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Αν *Α, Β* **ανεξάρτητα** τότε: $P(AB) = P(A)P(B)$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Για καθένα από τα πειράματα τύχης που ακολουθούν, δώστε κατάλληλο δειγματικό χώρο και προσδιορίστε το είδος του (πεπερασμένος, αριθμησίμως άπειρος, συνεχής). Επίσης, εξηγείστε γιατί πρόκειται για πειράματα τύχης.
   α. Μετράμε την ποσότητα παραθείου που απέμεινε σε φυτό σέλινου ένα μήνα μετά το ράντισμα.
   β. Μετράμε τον αριθμό α-σωματιδίων που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή σε ένα μήνα.
   γ. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και μετράμε πόσες φορές εμφανίσθηκε κεφαλή.
   δ. Μετράμε τον αριθμό παράσιτων σε αλεπού που αιχμαλωτίσθηκε στο Μαίναλο
   ε. Μετράμε το χρόνο που χρειάσθηκε για να συνέλθει ένας ασθενής που βρίσκεται σε κατάσταση νάρκωσης.
   στ. Μετράμε τη διάμετρο ενός ροδάκινου που επιλέξαμε από την παραγωγή συγκεκριμένου παραγωγού.
   ζ. Μετράμε την ποσότητα καλίου που περιέχεται σε μια μπανάνα που επιλέξαμε από συγκεκριμένη παρτίδα συγκεκριμένου εισαγωγέα.
   η. Μετράμε πόσες κληρώσεις του Λαϊκού Λαχείου απαιτήθηκαν μέχρι να κληρωθεί ο αριθμός 24658.
   θ. Μετράμε τον αριθμό ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από τη γραμμή παραγωγής Α ενός εργοστασίου στη διάρκεια μιας νυκτερινής βάρδιας.
   ι. Μετράμε τη μηνιαία κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας μιας βιοτεχνίας.
   κ. Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανισθεί για πρώτη φορά κεφαλή.

2. Από εξετάσεις που έγιναν σε 2000 ζώα μιας κτηνοτροφικής μονάδας, διαπιστώθηκε ότι 400 είχαν προσβληθεί από μια ασθένεια Α, 320 είχαν προσβληθεί από μια ασθένεια Β ενώ 80 από αυτά είχαν προσβληθεί και από την ασθένεια Α και από την ασθένεια Β. Θεωρώντας ότι οι 2000 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθεί η πιθανότητα σε ένα ζώο της κτηνοτροφικής μονάδας που επιλέγεται τυχαία να διαπιστωθεί ότι έχει προσβληθεί α) από την ασθένεια Α β) από την ασθένεια Β γ) και από τις δύο ασθένειες δ) τουλάχιστον από μια από τις δύο ασθένειες ε) από την ασθένεια Α, όχι όμως από την ασθένεια Β στ) από την ασθένεια Β, όχι όμως από την ασθένεια Α, ζ) ακριβώς από μία από τις δύο ασθένειες η) από καμία από τις δύο ασθένειες και θ) το πολύ από μία από τις δύο ασθένειες.

3. Ένας οργανισμός ελέγχου ποιότητος γεωργικών προϊόντων έχει ορίσει τέσσερα επίπεδα ποιότητας α, β, γ και δ. Κάθε προϊόν κατατάσσεται σε ένα μόνο από τα τέσσερα επίπεδα. Από στατιστικά στοιχεία που έχουν συγκεντρωθεί, έχει εκτιμηθεί ότι τα δύο πρώτα επίπεδα εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα ενώ το τρίτο και τέταρτο επίπεδο εμφανίζονται με τριπλάσια και πενταπλάσια πιθανότητα από το πρώτο αντίστοιχα. Για ένα προϊόν που επιλέγεται τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να κατατάσσεται i) στο επίπεδο α ii) στο επίπεδο β iii) στο επίπεδο γ iv) στο επίπεδο δ v) στο επίπεδο α ή β vi) στο επίπεδο α ή β ή δ και vii) στο επίπεδο γ και δ.

4. Εξετάσθηκαν 800 ζώα για να διαπιστωθεί αν είναι υγιή ή άρρωστα. Επίσης, για κάθε ζώο καταγράφηκε το φύλο του. Τα αποτελέσματα των εξετάσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Υγιή	Άρρωστα
Αρσενικά	150	350
Θηλυκά	80	220

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: το ζώο που εξετάσθηκε είναι υγιές

B: το ζώο που εξετάσθηκε είναι αρσενικό.

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα και θεωρώντας ότι οι 800 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B, AB, A', B', $A'B'$, $A'B$, AB', $A'B \cup AB'$, $AB \cup A'B'$.

5. Η πιθανότητα σε ένα έτος να συμβεί σεισμός έντασης πάνω από 6.3 βαθμούς της κλίμακας ρίχτερ σε μια σεισμογόνο περιοχή είναι 0.02. Η αντίστοιχη πιθανότητα να πληγεί η περιοχή από καταιγίδα είναι 0.10, ενώ υπάρχει πιθανότητα 0.01 σε διάρκεια ενός έτους να εμφανισθούν και τα δύο φαινόμενα. Να υπολογισθούν η πιθανότητα, σε ένα έτος, η περιοχή να πληγεί α) μόνο από σεισμό β) μόνο από καταιγίδα γ) τουλάχιστον από ένα από τα δύο φαινόμενα και δ) από κανένα από τα δύο φαινόμενα.

6. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας να εμφανισθεί μια τουλάχιστον κεφαλή σε δύο ρίψεις ενός νομίσματος ο D' Alembert πρότεινε την ακόλουθη λύση. Ως δειγματικό χώρο του πειράματος θεώρησε το σύνολο $\Omega=\{0, 1, 2\}$ όπου τα απλά ενδεχόμενα $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ περιγράφουν πόσες φορές εμφανίσθηκε κεφαλή σε δύο ρίψεις. Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο $A=\{1,2\}$, ο D' Alembert ισχυρίσθηκε ότι

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{3}.$$

Θα μπορούσε όμως κάποιος να δώσει την εξής λύση: ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$ ενώ το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $A=\{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ\}$ και επομένως

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{4}.$$

α) Ο D' Alembert έκανε λάθος!! Σκεφθείτε γιατί. β) Χρησιμοποιώντας το δειγματικό χώρο που όρισε ο D' Alembert να υπολογίσετε σωστά την $P(A)$.

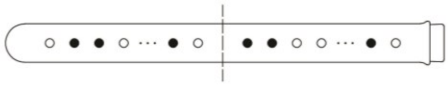
7. Ποια είναι η πιθανότητα σε μια τάξη k φοιτητών, ένας συγκεκριμένος φοιτητής (από τους k), να έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους k-1 φοιτητές. Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και ότι $k \le 365$.

8. **Το πρόβλημα του Chevalier de Mere:** Ποιο είναι πιο πιθανό, ότι θα φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή ότι θα φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές.

9. Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις αδενίνη, κυτοσίνη, γουανίνη και θυμίνη αντίστοιχα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους r αν σε αυτό υπάρχουν r_1 στοιχεία ίσα με A, r_2 στοιχεία ίσα με G, r_3

στοιχεία ίσα με C και r_4 ίσα με T ($r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$). Ας υποθέσουμε ότι όλες οι ακολουθίες (σειρές, συνθέσεις) τέτοιου τύπου έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει μια ακολουθία, για την οποία τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις 4 βάσεις να είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί (π.χ. AA..ACC…CTT…TGG…G ή TT…TAA…AGG…GCC…C, κτλ).

10. Σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα υπάρχουν *2n* κόκκοι άμμου από τους οποίους οι *n* είναι μαύροι και οι *n* άσπροι. Αναταράσσουμε τον σωλήνα με δύναμη. Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο είδη κόκκων να διαχωρισθούν πλήρως (ως προς το χρώμα).



11. Το 10% ενός πληθυσμού είναι άνεργοι. Επίσης, το 8% του πληθυσμού είναι γυναίκες άνεργες. Αν επιλέξουμε στην τύχη (από τον πληθυσμό αυτό) ένα άτομο και διαπιστώσουμε ότι είναι άνεργος, ποια είναι η πιθανότητα να είναι α) γυναίκα β) άνδρας.

12. Συνέχεια του Προβλήματος 7: α) Από τα ζώα που έχουν προσβληθεί από μια τουλάχιστον ασθένεια ποιο ποσοστό έχει προσβληθεί και από τις δύο; β) Από τα ζώα που δεν έχουν προσβληθεί από την ασθένεια Α ποιο ποσοστό έχει προσβληθεί από την ασθένεια Β;

13. Συνέχεια του Προβλήματος 8: α) Αν διαπιστωθεί ότι ένα ζώο είναι υγιές ποια είναι η πιθανότητα να είναι αρσενικό και ποια να είναι θηλυκό; β) Ποιο ποσοστό των άρρωστων ζώων είναι αρσενικά; γ) Να ελέγξετε αν ισχύει η ισότητα $P(B \mid A') = 1 - P(B \mid A)$.

14. Γνωρίζουμε ότι το 8% των εργαζομένων σε μια εταιρεία είναι ανώτερα στελέχη. Επίσης γνωρίζουμε ότι το 30% των εργαζομένων στην εταιρεία είναι γυναίκες και ότι το 1.5% των εργαζομένων είναι γυναίκες ανώτερα στελέχη. Μεταξύ των εργαζομένων υπάρχει η εντύπωση ότι στο θέμα της επαγγελματικής εξέλιξής τους υπάρχει διάκριση εις βάρος των γυναικών. Τι λέτε, είναι βάσιμη αυτή η εντύπωση;

15. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν 10 κουνέλια από τα οποία τα 3 είναι θηλυκά. Για τον έλεγχο του πληθυσμού των κουνελιών κρίθηκε σκόπιμο να απομακρυνθούν δύο από τα θηλυκά. Έτσι, στήθηκε μια παγίδα όπου πιάνονταν τα κουνέλια το ένα μετά το άλλο έως ότου πιαστούν 2 θηλυκά. Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό όταν πιαστεί το τέταρτο στη σειρά κουνέλι;

16. Από επτά όμοια κλειδιά ένα μόνο ανοίγει μια κλειδαριά. Δοκιμάζουμε χωρίς επανάθεση ένα-ένα τα κλειδιά μέχρι η κλειδαριά να ανοίξει. Ποια είναι η πιθανότητα να ανοίξει η κλειδαριά στην τρίτη δοκιμή; Γενικότερα στην *κ* δοκιμή; $(\kappa = 1,2,\ldots,7)$.

17. **Πολλαπλές γραμμές παραγωγής:** Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν τρεις διαφορετικές γραμμές παραγωγής στις οποίες κατασκευάζεται το 40%, 35% και 25% των προϊόντων του εργοστασίου αντίστοιχα. Το 2% των προϊόντων της πρώτης γραμμής είναι ελαττωματικά, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες δύο γραμμές είναι 3% και 5%. Τα προϊόντα των τριών γραμμών παραγωγής αναμιγνύονται δημιουργώντας μια ενιαία σειρά και στη συνέχεια προωθούνται στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου. α) Στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου επιλέγεται τυχαία

ένα προϊόν. Ποια είναι η πιθανότητα το προϊόν αυτό να είναι ελαττωματικό; β) Στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου επιλέγεται τυχαία ένα προϊόν και διαπιστώνεται ότι είναι ελαττωματικό. Ποια είναι η πιθανότητα το προϊόν αυτό να προέρχεται από την πρώτη γραμμή παραγωγής; Ερμηνεύστε τις πιθανότητες που υπολογίσατε στα α) και β) με όρους ποσοστών (δηλαδή τι εκφράζει ως ποσοστό η κάθε πιθανότητα και επί ποιου συνόλου).

18. **Διαγνωστικά τεστ:** Το 2% ενός πληθυσμού πάσχει από AIDS. Η εξέταση που εφαρμόζεται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει σωστή διάγνωση στο 90% των περιπτώσεων, όταν το εξεταζόμενο άτομο πάσχει από AIDS, και στο 95% των περιπτώσεων όταν δεν πάσχει από AIDS. Επιλέγεται ένα άτομο από τον πληθυσμό αυτό στην τύχη και υποβάλλεται στην εξέταση. α) Ποια είναι η πιθανότητα η εξέταση να βγει θετική, δηλαδή να δείξει ότι πάσχει από AIDS. β) Ποια είναι η πιθανότητα λανθασμένης διάγνωσης γ) Ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από AIDS ένα άτομο για το οποίο η εξέταση ήταν θετική δ) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι υγιές ένα άτομο για το οποίο η εξέταση ήταν θετική.

19. **Διαγνωστικά τεστ:** Από μελέτες που έγιναν σε μια χώρα, διαπιστώθηκε ότι το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν από καρκίνο της μήτρας είναι 1‰. Ένα από τα πλέον δημοφιλή τεστ για τη διάγνωση της ασθένειας, το τεστ Παπανικολάου, έχει ευαισθησία 98%, δηλαδή όταν μια γυναίκα πάσχει από καρκίνο της μήτρας το τεστ κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0.98. Επίσης, και η ειδικότητα του τεστ Παπανικολάου είναι 98%, δηλαδή αν μια γυναίκα δεν πάσχει από καρκίνο της μήτρας, το τεστ κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα επίσης 0.98. α) Αν μια γυναίκα αυτής της χώρας υποβληθεί στο τεστ και βγει θετικό, ποια είναι η πιθανότητα η γυναίκα να έχει πράγματι καρκίνο της μήτρας. Είναι δικαιολογημένος ο υπερβολικός φόβος της κυρίας μετά το αποτέλεσμα του τεστ; Σχολιάστε επίσης, τη διαγνωστική αξία του τεστ σε σχέση με την τιμή της πιθανότητας που υπολογίσατε. β) Το ενδεχόμενο το τεστ να βγει θετικό και το ενδεχόμενο η εξεταζόμενη γυναίκα να έχει καρκίνο της μήτρας είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

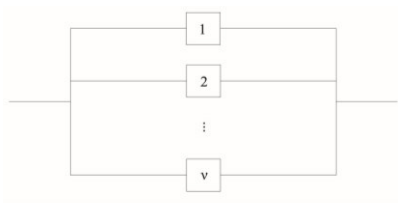
20. Το 50% του πληθυσμού μιας χώρας είναι καπνιστές. Από μια ασθένεια των πνευμόνων πάσχει το 80% των καπνιστών και το 30% των μη καπνιστών. α) Ποιο ποσοστό του πληθυσμού πάσχει από αυτή την ασθένεια. β) Αν ένα άτομο από τον πληθυσμό πάσχει από αυτή την ασθένεια, ποια είναι η πιθανότητα να είναι καπνιστής. Ερμηνεύστε την πιθανότητα αυτή ως ποσοστό. γ) Το ενδεχόμενο ένα άτομο να είναι καπνιστής και το ενδεχόμενο ένα άτομο να πάσχει από τη συγκεκριμένη ασθένεια είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

21. **Αξιοπιστία:** Σε ένα εργαστηριακό όργανο χρησιμοποιούνται δύο εξαρτήματα τα οποία λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Στο 80% του χρόνου λειτουργίας του οργάνου, και τα δύο εξαρτήματα λειτουργούν χωρίς να παρουσιάζουν κάποια βλάβη. Όμως, στο 1% του χρόνου λειτουργίας, παρουσιάζουν βλάβη και τα δύο εξαρτήματα (ταυτόχρονα). Για να λειτουργήσει το όργανο πρέπει να λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα δύο εξαρτήματα. Να υπολογισθεί α) η αξιοπιστία του οργάνου (δηλαδή η πιθανότητα λειτουργίας του) και β) η αξιοπιστία καθενός από τα δύο εξαρτήματα (δηλαδή η πιθανότητα λειτουργίας καθενός εξαρτήματος).

22. Η πιθανότητα να συμβεί τροχαίο ατύχημα σε ορισμένη διαδρομή είναι 0.05. Ποια είναι η πιθανότητα στις 20 φορές που θα κάνει κάποιος τη διαδρομή αυτή να του συμβεί ατύχημα τουλάχιστον μια φορά;

23. **Αξιοπιστία:** Ένα ***σειριακό σύστημα*** ν μονάδων λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν και οι ν μονάδες του. Αντίστοιχα, ένα ***παράλληλο σύστημα*** ν **μονάδων** λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργεί μια τουλάχιστον από τις ν μονάδες του.

Σειριακό σύστημα



Παράλληλο σύστημα

Αν όλες οι ν μονάδες ενός συστήματος έχουν την ίδια αξιοπιστία *p* $(0<p<1)$ και λειτουργούν ανεξάρτητα να δείξετε ότι αν είναι σειριακό τότε η αξιοπιστία του είναι p^{ν} ενώ αν είναι παράλληλο τότε η αξιοπιστία του είναι $1-(1-p)^{\nu}$.

24. Ένα εξάρτημα μπορεί να παρουσιάσει είτε βλάβη τύπου Ι με πιθανότητα 10% είτε βλάβη τύπου ΙΙ με πιθανότητα 8%. Αν οι δύο τύποι βλαβών εμφανίζονται **ανεξάρτητα**, βρείτε την πιθανότητα α) να παρουσιασθεί βλάβη τύπου ΙΙ αν είναι γνωστό ότι ήδη έχει παρουσιασθεί βλάβη τύπου Ι β) να παρουσιασθεί μία τουλάχιστον από τις δύο βλάβες γ) να παρουσιασθούν συγχρόνως και οι δύο βλάβες.

25. Πώς σχολιάζετε τον παρακάτω συλλογισμό, γνωστό ως ***πλάνη του χαρτοπαίκτη (the gambler's fallacy)***: Αν σε πολλές συνεχόμενες επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης δεν έχει εμφανισθεί κάποιο από τα δυνατά αποτέλεσμα (π.χ. σε πολλές συνεχόμενες κληρώσεις δεν έχει εμφανισθεί ζυγός αριθμός) τότε αυξάνεται η πιθανότητα στην επόμενη επανάληψη το αποτέλεσμα αυτό να εμφανισθεί.

26. Σε μια συγκεκριμένη περιοχή, το 10% των κατοίκων ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου καρδιακού εμφράγματος. α) Επιλέγουμε τυχαία τρεις κατοίκους από αυτή την περιοχή. Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς ένας από τους τρεις να ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου (καρδιακού εμφράγματος). β) Γνωρίζουμε ότι το 49% των κατοίκων είναι γυναίκες και επίσης ότι το 8% των γυναικών ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου (καρδιακού εμφράγματος). Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από την περιοχή αυτή. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα που ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου. γ) Γνωρίζουμε επίσης ότι το 12% των ανδρών ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου (καρδιακού εμφράγματος). Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από την περιοχή αυτή και διαπιστώνουμε ότι ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου. Ποια είναι η πιθανότητα το άτομο αυτό να είναι άνδρας.