ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Ανάλυση Συνδιακύμανσης
(Analysis of covariance)

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

Ανάλυση Συνδιακύμανσης

Σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι δυνατόν ο έλεγχός μιας εξωγενούς πηγής παραλλακτικότητας παρά την ομαδοποίηση. Αν όμως έχουμε την δυνατότητα να αναγνωρίσουμε και να μετρήσουμε μια ανεξάρτητη μεταβλητή η οποία συνδέεται με αυτή την πηγή παραλλακτικότητας, τότε μπορούμε να την ελέγξουμε προσθέτοντας την μεταβλητή αυτή (συμμεταβλητή - covariate) στο μοντέλο.

Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την ανάλυση συνδιακύμανσης (ANCOVA) η οποία συνδυάζει χαρακτηριστικά της ανάλυσης παραλλακτικότητας (διακύμανσης) και της ανάλυσης συμμεταβολής.

Με την ανάλυση συνδιακύμανσης απομακρύνουμε από την παραλλακτικότητα των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, την παραλλακτικότητα που μπορεί να προβλεφτεί από την σχέση της με την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η Ανάλυση συνδιακύμανσης αποσκοπεί στην διόρθωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, με βάση τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και στην σύγκριση των διορθωμένων μέσων των πειραματικών επεμβάσεων. Η σχέση που χρησιμοποιείται για τις διορθώσεις των μέσων των επεμβάσεων είναι η (μέση) γραμμική συμμεταβολή της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Προϋποθέσεις ανάλυσης συνδιακύμανσης

1. Η σχέση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της συμμεταβλητής X είναι γραμμική.
2. Ομοιογένεια συντελεστών συμμεταβολής, η σχέση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της συμμεταβητής X είναι ίδια σε κάθε επέμβαση.
3. Οι διακυμάνσεις είναι ομοιογενείς.
4. Τα πειραματικά σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και κοινή διακύμανση.

Το γραμμικό μοντέλο της ανάλυσης συνδιακύμανσης σε Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + b(X_{ij} - X_{..}) + \varepsilon_{\text{ij}}$$

Όπου: μ = ο γενικός μέσος του πειράματος

τ_i = η επίδραση της επέμβασης

b = ο κοινός συντελεστής συμμεταβολής

X_{ij} = η τιμή του *X* που αντιστοιχεί στο Y_{ij}

X.. = ο γενικός μέσος του πειράματος για το *X*

ε_{ij} = το πειραματικό σφάλμα

Υπολογισμός Αθροισμάτων Τετραγώνων και Γινομένων

Ανάλυση διακύμανσης

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	AT_Y	AT_X	$A\Gamma_{XY}$
Επεμβάσεις	a - 1	E_Y	E_X	E_{XY}
Υπόλοιπο	a(n - 1)	$Y\pi_Y$	$Y\pi_X$	$Y\pi_{XY}$
Σύνολο	an - 1	Σ_Y	Σ_X	Σ_{XY}

Ανάλυση Συμμεταβολής

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ
Συμμεταβολή	1	$(\Sigma_{XY})^2/\Sigma_X$
Αποκλίσεις	an - 2	$\Sigma_Y - (\Sigma_{XY})^2/\Sigma_X$
Σύνολο	an - 1	Σ_Y

$$\Sigma_Y = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$\Sigma_X = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$\Sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$E_Y = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.} - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$E_X = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} x_{i.}^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$E_{XY} = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} x_{i.}y_{i.} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$Y\pi_Y = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \Sigma_Y - E_Y$$

$$Y\pi_X = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 = \Sigma_X - E_X$$

$$Y\pi_{XY} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) = \Sigma_{XY} - E_{XY}$$

$$b_Y = \bar{b} = \frac{Y\pi_{XY}}{Y\pi_X} \qquad b_E = \hat{b} = \frac{E_{XY}}{E_X} \qquad b_A = b = \frac{A_{XY}}{A_X}$$

Πίνακας Ανάλυσης Συνδιακύμανσης

Πηγή Παρ/τας	**ΒΕ**	**Άθροισμα Τετραγώνων**	**Μέσο Τετράγωνο**	**F**
Συμμεταβολή	**1**	$\mathbf{(\Sigma_{XY})^2/\Sigma_X}$	$AT_{συμ}/1$	$MT_{συμ}/MTυπ'$
Επεμβάσεις διορθ.	a - 1	$\Sigma_Y - (\Sigma_{XY})^2/\Sigma_X - [Yπ_Y - (Yπ_{XY})^2/Yπ_X]$	$ATεπ'/(an - 1)$	$MTεπ'/MTυπ'$
Υπόλοιπο διορθ.	a(n - 1) - **1**	$Yπ_Y - \mathbf{(Yπ_{XY})^2/Yπ_X}$	$ATυπ'/[a(n - 1) – 1]$	
Σύνολο	an - 1	Σ_Y		

Ο υπολογισμός του διορθωμένου αθροίσματος τετραγώνου των επεμβάσεων γίνεται έμμεσα. Αρχικά αφαιρούμε από την ολική παραλλακτικότητα των τιμών Y, την παραλλακτικότητα που εξηγείται από τη συμμεταβολή με το X και από την παραλλακτικότητα των τιμών (Y_{ij} - $\bar{Y}_{i.}$), αφαιρούμε την παραλλακτικότητα που εξηγείται από τη συμμεταβολή με τις τιμές (X_{ij} - $\bar{X}_{..}$) και στην συνέχεια αφαιρούμε το πρώτο αποτελέσματα της αφαίρεσης από το δεύτερο.

Δοκιμασία ομοιογένειας συντελεστών συμμεταβολής

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	Άθροισμα Τετραγώνων	Μέσο Τετράγωνο	F
Ανάμεσα στις συμμεταβολές	a - 1	$\sum\left[\frac{(A\Gamma_{iXY})^2}{AT_{iX}}\right]-\frac{(Y\pi_{XY})^2}{Y\pi_X}$	ΑΤσυμ/(a - 1)	ΜΤσυμ/ΜΤαπ
Μέσα στις συμμεταβολές	a(n – 2)	$Y\pi_Y-\sum\left[\frac{(A\Gamma_{iXY})^2}{AT_{iX}}\right]$	Ατατ./a(n - 2)	
Σύνολο (Υπόλοιπο διορθ.)	an - 1	$Y\pi_Y-\frac{(Y\pi_{XY})^2}{Y\pi_X}$		

Διόρθωση μέσων όρων των επεμβάσεων

Η διόρθωση των μέσων όρων των επεμβάσεων γίνεται σύμφωνα με την έκφραση:

$$\overline{Y}_{i\ adj.} = \overline{Y}_{i.} - b_Y(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})$$

Σύγκριση μέσων όρων των επεμβάσεων

Το τυπικό σφάλμα της διαφοράς δύο διορθωμένων μέσων όρων επεμβάσεων:

$$s_{(\overline{Y}_{i.\ adj.} - \overline{Y}_{j.\ adj.})} = \sqrt{s^2_{XY}\left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{j.})^2}{Y\pi_X}\right]}$$

όπου: $$s^2_{XY} = \left[Y\pi_Y - \frac{(Y\pi_{XY})^2}{Y\pi_X}\right] \Big/ [a(n-1)-1]$$

Παράδειγμα: Πείραμα με τρεις επεμβάσεις και 8 επαναλήψεις σε Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο (Καλτσίκης)

Επεμβάσεις						
	1		**2**		**3**	
	Y	X	Y	X	Y	X
1	15	10	6	4	14	7
2	1	6	13	8	9	8
3	4	5	5	8	16	7
4	6	8	18	8	7	3
5	10	9	9	6	13	6
6	0	4	7	11	18	8
7	7	9	15	10	13	6
8	13	12	15	9	6	8
Σύνολο	56	63	88	64	96	53
Μ.Ο.	7	7,9	11	8	12	6,6

$$X_{..} = 63 + 64 + 53 = 180, \quad \bar{X}_{..} = 7{,}5$$

$$Y_{..} = 56 + 88 + 96 = 240, \quad \bar{Y}_{..} = 10$$

$$E_{\mathrm{Y}} = \frac{(56)^2 + (88)^2 + (96)^2}{8} - \frac{(240)^2}{24} = 112 \qquad A_{\mathrm{Y}} = 15^2 + 1^2 + \ldots + 13^2 + 6^2 - \frac{(240)^2}{24} = 610$$

$$\mathrm{Y}\pi_{\mathrm{Y}} = 610 - 112 = 498$$

$$E_{\mathrm{X}} = \frac{(63)^2 + (64)^2 + (53)^2}{8} - \frac{(180)^2}{24} = 9{,}25 \qquad A_{\mathrm{X}} = 10^2 + 6^2 + \ldots + 6^2 + 8^2 - \frac{(180)^2}{24} = 114$$

$$\mathrm{Y}\pi_{\mathrm{X}} = 114 - 9{,}25 = 104{,}75$$

$$E_{\mathrm{XY}} = \frac{(56)(63) + (64)(88) + (53)(96)}{8} - \frac{(180)(240)}{24} = -19$$

$$A_{\mathrm{XY}} = (10)(15) + (6)(1) + \ldots + (6)(13) - \frac{(180)(240)}{24} = 112$$

$$\mathrm{Y}\pi_{\mathrm{XY}} = 112 - (-19) = 131$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Ανάλυση διακύμανσης για τη μεταβλητή Υ

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F
Επεμβάσεις	2	112	56	$2,36^{ns}$
Υπόλοιπο	21	498	23,71	
Σύνολο	23	610		

Ανάλυση διακύμανσης για τη συμμεταβλητή Χ

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F
Επεμβάσεις	2	9,725	4,62	$0,93^{ns}$
Υπόλοιπο	21	104,75	4,99	
Σύνολο	23	114		

Ανάλυση Συμμεταβολής

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F
Συμμεταβολή	1	110,04	110,04	4,84*
Αποκλίσεις	22	499,96	22,73	
Σύνολο	23	610		

Ομοιογένεια συντελεστών συμμεταβολής

$$AT_{iX} = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij})^2 - \frac{(X_{i.})^2}{n}$$

$$AT_{1X} = (10)^2 + (6)^2 + \ldots + (9)^2 + (12)^2 - \frac{(63)^2}{8} = 50{,}88$$

$$AT_{2X} = (4)^2 + (8)^2 + \ldots + (10)^2 + (9)^2 - \frac{(64)^2}{8} = 34$$

$$AT_{3X} = (7)^2 + (8)^2 + \ldots + (6)^2 + (8)^2 - \frac{(53)^2}{8} = 19{,}88$$

$$A\Gamma_{iXY} = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij})(Y_{ij}) - \frac{(X_{i.})(Y_{i.})}{n}$$

$$AT_{1XY} = (10)(15) + (6)(1) + \ldots + (9)(7) + (12)(13) - \frac{(63)(56)}{8} = 92$$

$$AT_{2XY} = (4)(6) + (8)(13) + \ldots + (10)(15) + (9)(15) - \frac{(64)(88)}{8} = 24$$

$$AT_{3XY} = (7)(14) + (8)(9) + \ldots + (6)(13) + (8)(6) - \frac{(53)(96)}{8} = 15$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

$$AT\pi\alpha\lambda. = \sum\left[\frac{(A\Gamma_{iXY})^2}{AT_{iX}}\right] - \frac{(Y\pi_{XY})^2}{Y\pi_X} = \frac{(92)^2}{50,88} + \frac{(24)^2}{34} + \frac{(15)^2}{19,88} - \frac{(131)^2}{104,75} = 30,78$$

$$AT\alpha\pi. = Y\pi_Y - \sum\left[\frac{(A\Gamma_{iXY})^2}{AT_{iX}}\right] = 498 - \frac{(92)^2}{50,88} - \frac{(24)^2}{34} - \frac{(15)^2}{19,88} = 303,39$$

Πηγή Παρ/τας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**
Ανάμεσα στις συμμεταβολές	2	30,78	15,39	$0,913^{ns}$
Μέσα στις συμμεταβολές	18	303,39	16,86	
Σύνολο (Υπόλοιπο διορθ.)	20	334,17		

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

$$b_1 = \frac{A\Gamma_{1XX}}{AT_{1X}} = \frac{92}{50{,}88} = 1{,}81 \qquad a_1 = \bar{Y}_1 - b_1\bar{X}_1 = 7 - 1{,}81 * 7{,}88 = 7{,}3 \qquad Y_1 = 7{,}3 + 1{,}81X_1$$

$$b_2 = \frac{A\Gamma_{2XX}}{AT_{2X}} = \frac{24}{34} = 0{,}71 \qquad a_2 = \bar{Y}_2 - b_2\bar{X}_2 = 11 - 0{,}71 * 8 = 5{,}4 \qquad Y_2 = 5{,}4 + 0{,}71X_2$$

$$b_3 = \frac{A\Gamma_{3XX}}{AT_{3X}} = \frac{15}{19{,}88} = 0{,}75 \qquad a_3 = \bar{Y}_3 - b_3\bar{X}_3 = 12 - 0{,}75 * 6{,}62 = 7 \qquad Y_3 = 7 + 0{,}75X_3$$

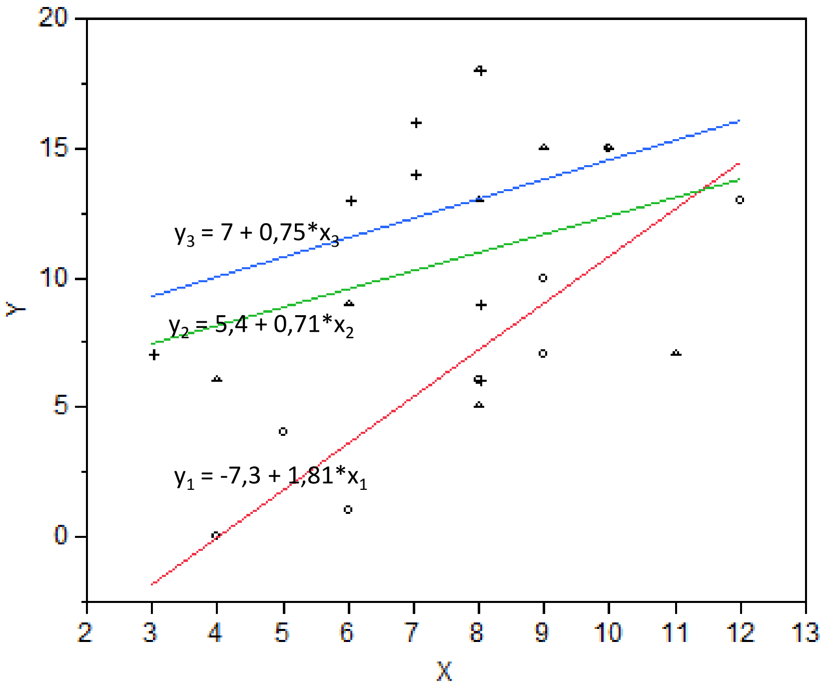
$$b_Y = \frac{Y\pi_{XY}}{Y\pi_X} = \frac{b_1AT_{1X} + b_2AT_{2X} + b_3AT_{3X}}{AT_{1X} + AT_{2X} + AT_{3X}} = \frac{(50{,}88)(1{,}81) + (34)(0{,}71) + (19{,}88)(0{,}75)}{50{,}88 + 34 + 19{,}88} = \frac{131{,}14}{104{,}76} = 1{,}25$$

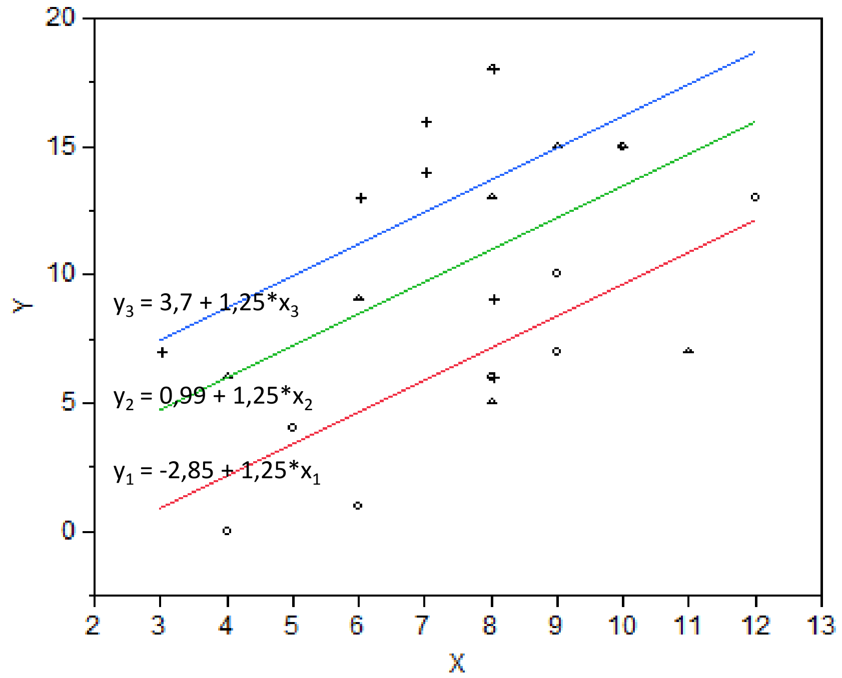
$$a_1 = \bar{Y}_1 - b_1\bar{X}_1 = 7 - 1{,}25 * 7{,}88 = 7{,}3 \qquad Y_1 = -2{,}85 + 1{,}25X_1$$

$$a_2 = \bar{Y}_2 - b_2\bar{X}_2 = 11 - 1{,}25 * 8 = 5{,}4 \qquad Y_2 = 0{,}99 + 1{,}25X_2$$

$$a_3 = \bar{Y}_3 - b_3\bar{X}_3 = 12 - 1{,}25 * 6{,}62 = 7 \qquad Y_3 = 3{,}4 + 1{,}25X_3$$

Οι ευθείες των συμμεταβολών ανά επέμβαση (JMP)





Πίνακας Ανάλυσης Συνδιακύμανσης

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	Αθροίσματα Γινομένων και Τετραγώνων			ΒΕ’	Διορθωμένα Αθροίσματα Τετραγώνων	Μέσα Τετράγωνα	F
		Y	X	XY				
Επεμβάσεις	2	112	9,25	-19	2	165,79	82,9	4,96*
Υπόλοιπο	21	498	104,75	131	20	334,17	16,71	
Σύνολο	23	610	114	112	22	499,96		

$AT_{Συν.}' = Σ_Y – (Σ_{XY})^2/Σ_X = 610 – (112)^2/114 = 610 – 110,04 = 499,96$

$AT_{Υπ.}' = Υπ_Y – (Υπ_{XY})^2/Υπ_X = 498 – (131)^2/104,75 = 498 – 163,83 = 334,17$

$AT_{Επ.}' = 499,96 – 334,17 = 165,79$

Διόρθωση μέσων των επεμβάσεων

$$\overline{Y}_{i\ adj.} = \overline{Y}_{i.} - b_Y(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})$$

$$\overline{Y}_{1\ adj.} = \overline{Y}_{1.} - b_Y(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{..}) = 7 - 1{,}25(7{,}88 - 7{,}5) = 7 - 1{,}25 * 0{,}38 = 6{,}52$$

$$\overline{Y}_{2\ adj.} = \overline{Y}_{2.} - b_Y(\overline{X}_{2.} - \overline{X}_{..}) = 11 - 1{,}25(8 - 7{,}5) = 11 - 1{,}25 * 0{,}5 = 10{,}38$$

$$\overline{Y}_{3\ adj.} = \overline{Y}_{3.} - b_Y(\overline{X}_{3.} - \overline{X}_{..}) = 12 - 1{,}25(6{,}62 - 7{,}5) = 12 - 1{,}25 * (-1{,}10) = 13{,}10$$

Σύγκριση μέσων όρων των επεμβάσεων

$$s_{(\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{2.adj.})}=\sqrt{s_{XY}^2\left[\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}+\frac{(\bar{X}_{1.}-\bar{X}_{2.})^2}{Y\pi_X}\right]}=\sqrt{16{,}71\left[\frac{2}{8}+\frac{(7{,}88-8)^2}{104{,}75}\right]}=\sqrt{4{,}18}=2{,}04$$

$$s_{(\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.})}=\sqrt{s_{XY}^2\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}+\frac{(\bar{X}_{1.}-\bar{X}_{3.})^2}{Y\pi_X}\right]}=\sqrt{16{,}71\left[\frac{2}{8}+\frac{(7{,}88-6{,}62)^2}{104{,}75}\right]}=\sqrt{4{,}45}=2{,}104$$

$$s_{(\bar{Y}_{2.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.})}=\sqrt{s_{XY}^2\left[\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_2}+\frac{(\bar{X}_{2.}-\bar{X}_{3.})^2}{Y\pi_X}\right]}=\sqrt{16{,}71\left[\frac{2}{8}+\frac{(8-6{,}62)^2}{104{,}75}\right]}=\sqrt{4{,}49}=2{,}116$$

Σύγκριση 1 – 2: $$t=\frac{\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{2.adj.}}{s_{(\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{2.adj.})}}=\frac{6{,}53-10{,}37}{2{,}04}=-1{,}88$$

Σύγκριση 1 – 3: $$t=\frac{\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.}}{s_{(\bar{Y}_{1.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.})}}=\frac{6{,}53-13{,}10}{2{,}104}=-3{,}11$$

Σύγκριση 2 – 3: $$t=\frac{\bar{Y}_{2.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.}}{s_{(\bar{Y}_{2.adj.}-\bar{Y}_{3.adj.})}}=\frac{10{,}37-13{,}10}{2{,}116}=-1{,}28$$

Η κρίσιμη τιμή του t για ΒΕ = 20 είναι 2,086.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Tr= factor(rep(c(1, 2, 3), 8))
> Y= c(15, 6, 14, 1, 13, 9, 4, 5, 16, 6, 18, 7, 10, 9, 13, 0, 7, 18, 7, 15, 13, 13, 15, 6)
> X= c(10, 4, 7, 6, 8, 8, 5, 8, 7, 8, 8, 3, 9, 6, 6, 4, 11, 8, 9, 10, 6, 12, 9, 8)
> data= cbind.data.frame(Tr, Y, X)
```

	Tr	Y	X
1	1	15	10
2	2	6	4
3	3	14	7
4	1	1	6
5	2	13	8
6	3	9	8
7	1	4	5
8	2	5	8
9	3	16	7
10	1	6	8
…			
18	3	18	8
19	1	7	9
20	2	15	10
21	3	13	6
22	1	13	12
23	2	15	9
24	3	6	8

Ανάλυση διακύμανσης

```
> fit=aov(Y~Tr, data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Tr	2	112	56.000	2.3614	0.1188
Residuals	21	498	23.714		

Ανάλυση συμμεταβολής

```
> fit=aov(Y~X, data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	1	110.04	110.035	4.8419	0.03857 *
Residuals	22	499.96	22.726		

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Έλεγχος γραμμικότητας Y και X

```
> fit=lm(Y~X, data)
> summary(fit)

Call:
lm(formula = Y ~ X, data = data)
Residuals:
   Min       1Q    Median     3Q      Max
-7.5263 -4.4781 -0.0439  3.7632  7.5088

Coefficients:
              Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)   2.6316     3.4872     0.755    0.4585
X             0.9825     0.4465     2.200    0.0386 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.767 on 22 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1804,       Adjusted R-squared:  0.1431
F-statistic: 4.842 on 1 and 22 DF,  p-value: 0.03857
```

Έλεγχος σχέσης επεμβάσεων με X

```
> fit=aov(X~Tr, data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: X

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Tr	2	9.25	4.6250	0.9272	0.4113
Residuals	21	104.75	4.9881		

Έλεγχος ομοιογενείας διακυμάνσεων

```
> fit=aov(Y~Tr, data)
> leveneTest(fit)
```

Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)

	Df	F value	Pr(>F)
group	2	0.4164	0.6648
	21		

Έλεγχος ομοιογένειας συντελεστών συμμεταβολής

```
> fit=aov(Y~X+Tr+X*Tr, data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	1	110.035	110.035	6.5288	0.01988 *
Tr	2	165.793	82.897	4.9185	0.01976 *
X:Tr	2	30.802	15.401	0.9138	0.41881
Residuals	18	303.370	16.854		

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

```
> fit=aov(Y~X+Tr, data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	1	110.04	110.035	6.5855	0.01842 *
Tr	2	165.79	82.897	4.9613	0.01780 *
Residuals	20	334.17	16.709		

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~X+Tr, data)
> summary(fit)

Call:
lm(formula = Y ~ X + Tr, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median      3Q     Max
-7.7518  -1.5937  0.7184  1.8362  7.0000

Coefficients:
            Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
(Intercept) -2.8484     3.4613    -0.823    0.42025
X            1.2506     0.3994     3.131    0.00526 **
Tr2          3.8437     2.0444     1.880    0.07474 .
Tr3          6.5632     2.1039     3.120    0.00540 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.088 on 20 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4522,      Adjusted R-squared:   0.37
F-statistic: 5.503 on 3 and 20 DF,  p-value: 0.006376
```

```
> library(car)
> fit=aov(Y~X*Tr, data)
> Anova(fit, type="II")

Anova Table (Type II tests)

Response: Y
            Sum Sq   Df   F value    Pr(>F)
X           163.828   1   9.7205    0.005944 **
Tr          165.793   2   4.9185    0.019762 *
X:Tr         30.802   2   0.9138    0.418812
Residuals   303.370  18
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=aov(Y~X+Tr, data)
> Anova(fit, type="II")
```

Anova Table (Type II tests)

Response: Y

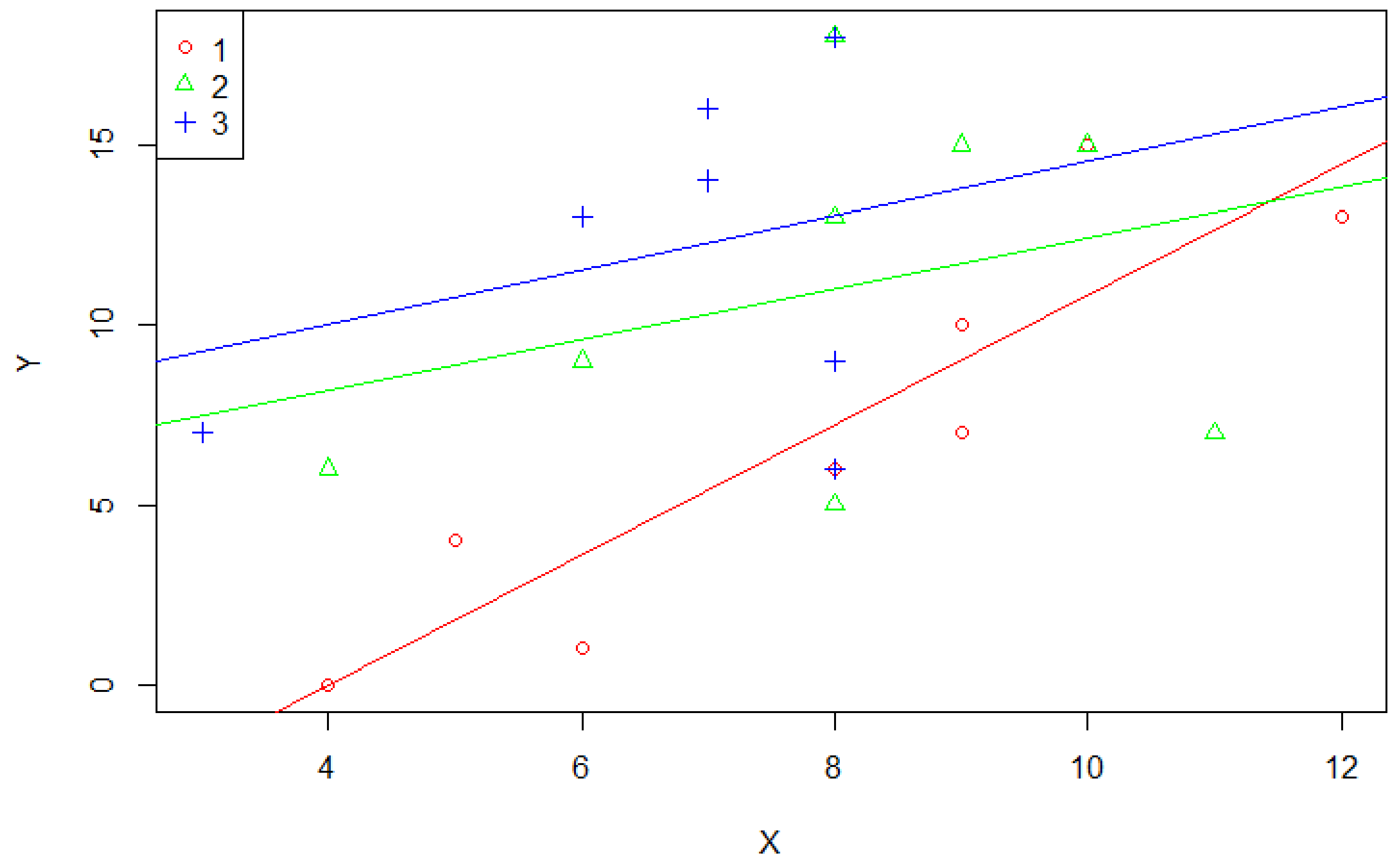
	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
X	163.83	1	9.8050	0.005258 **
Tr	165.79	2	4.9613	0.017795 *
Residuals	334.17	20		

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

```
> Ypred=predict(fit)
> data1= cbind(data, Ypred)
> data1
   Tr  Y  X     Ypred
1   1 15 10  9.657518
2   2  6  4  5.997613
3   3 14  7 12.468974
4   1  1  6  4.655131
5   2 13  8 11.000000
6   3  9  8 13.719570
7   1  4  5  3.404535
8   2  5  8 11.000000
9   3 16  7 12.468974
10  1  6  8  7.156325
…
16  1  0  4  2.153938
17  2  7 11 14.751790
18  3 18  8 13.719570
19  1  7  9  8.406921
20  2 15 10 13.501193
21  3 13  6 11.218377
22  1 13 12 12.158711
23  2 15  9 12.250597
24  3  6  8 13.719570
```

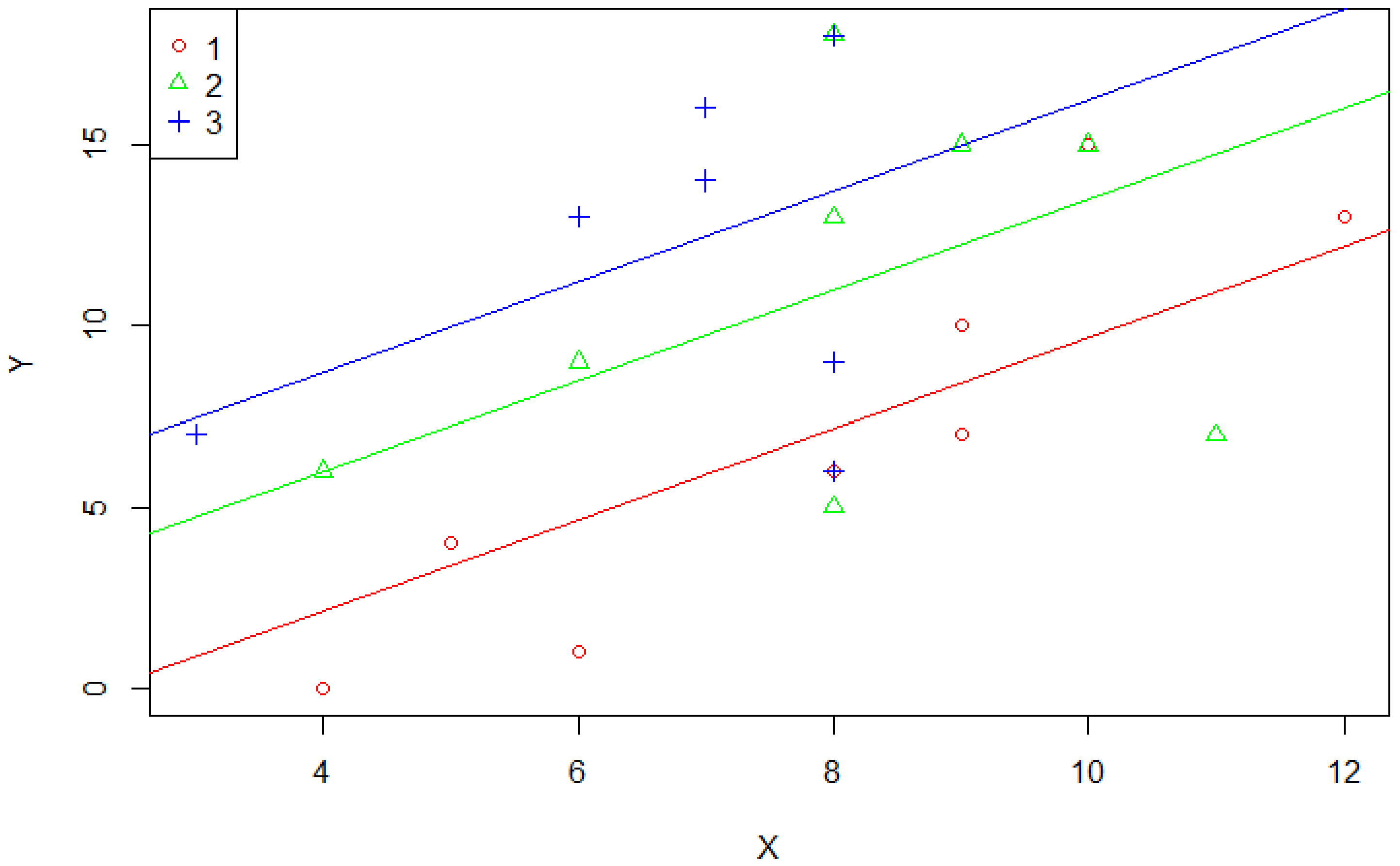
Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> plot(Y~X,pch=c(1, 2, 3), col=c("red","green","blue"))
> legend("topleft", c("1","2","3"),pch=c(1, 2, 3),col=c("red","green","blue"))
> abline(lm(Y[Tr=="1"]~X[Tr=="1"]), col="red")
> abline(lm(Y[Tr=="2"]~X[Tr=="2"]), col="green")
> abline(lm(Y[Tr=="3"]~X[Tr=="3"]), col="blue“)
```



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> plot(Y~X,pch=c(1, 2, 3), col=c("red","green","blue"))
> legend("topleft", c("1","2","3"), pch=c(1, 2, 3), col=c("red","green","blue"))
> abline(lm(Ypred[Tr=="1"]~X[Tr=="1"]), col="red")
> abline(lm(Ypred[Tr=="2"]~X[Tr=="2"]), col="green")
> abline(lm(Ypred[Tr=="3"]~X[Tr=="3"]), col="blue")
```



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Tr=factor(c("1","2","3") )
> X=rep(mean(X), 3)
> adjmeans =predict(fit, data.frame(Tr, X))
> data.frame(aggregate(Y ~ Tr, data, FUN=mean), Yadj=adjmeans)
```

	Tr	Y	Yadj
1	1	7	6.53
2	2	11	10.37
3	3	12	13.09

```
> library(multcomp)
> summary(glht(fit, linfct=mcp(Tr="Tukey")))

         Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts

Fit: aov(formula = Y ~ X + Tr, data = data)

Linear Hypotheses:
           Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
2 - 1 == 0    3.844       2.044    1.880     0.1704
3 - 1 == 0    6.563       2.104    3.120     0.0141 *
3 - 2 == 0    2.720       2.116    1.285     0.4195
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Το γραμμικό μοντέλο της ανάλυσης συνδιακύμανσης σε Σχέδιο Τυχαιοποιημένων Πλήρων Ομάδων:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + b(X_{ij} - X_{..}) + \varepsilon_{\mathrm{ij}}$$

Όπου: μ = ο γενικός μέσος του πειράματος

τ_i = η επίδραση της επέμβασης

β_j = η επίδραση της επέμβασης

b = ο κοινός συντελεστής συμμεταβολής

X_{ij} = η τιμή του *X* που αντιστοιχεί στο Y_{ij}

X.. = ο γενικός μέσος του πειράματος για το *X*

ε_{ij} = το πειραματικό σφάλμα

Ανάλυση συνδιακύμανσης σε σχέδιο τυχαιοποιημένων πλήρων ομάδων

Πηγή Παρ/τας	**ΒΕ**	**ΑΤ$_Y$**	**ΑΤ$_X$**	**ΑΓ$_{XY}$**	**ΒΕ'**	**Διορθωμένα ΑΤ**
Επεμβάσεις	a - 1	E_Y	E_X	E_{XY}	a - 1	$Σ_Y - (Σ_{XY})^2/Σ_X - [Yπ_Y - (Yπ_{XY})^2/Yπ_X]$
Ομάδες	b - 1	O_Y	O_X	O_{XY}		
Υπόλοιπο	(a – 1)(b - 1)	$Yπ_Y$	$Yπ_X$	$Yπ_{XY}$	(a - 1)(b - 1) -1	$Yπ_Y - (Yπ_{XY})^2/Yπ_X$
Σύνολο (Ε + Υ)	b(a – 1)	$Σ_Y$	$Σ_X$	$Σ_{XY}$	b(a - 1) -1	$Σ_Y - (Σ_{XY})^2/Σ_X$

Το τυπικό σφάλμα της διαφοράς δύο διορθωμένων μέσων όρων επεμβάσεων:

$$s_{(\bar{Y}_{i.\,adj.} - \bar{Y}_{j.\,adj.})} = \sqrt{s^2_{XY}\left[\frac{2}{b} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.})^2}{Yπ_X}\right]}$$