ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Μοντέλα σταθερών και τυχαίων επιδράσεων

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

Ανάλυση μοντέλου σταθερών επιδράσεων με ένα παράγοντα

Αν ο ερευνητής επιλέγει να χρησιμοποιήσει στο πείραμα του κάποια συγκεκριμένα επίπεδα ενός παράγοντα και τα συμπεράσματα του πειράματος αφορούν μόνο τα προκαθορισμένα αυτά επίπεδα-επεμβάσεις, τότε το μοντέλο είναι σταθερών επιδράσεων (Fixed-effects model).

Το γραμμικό μοντέλο είναι: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Όπου μ ο γενικός μέσος, τ_i η επίδραση της i επέμβασης ($\Sigma\tau_i = \Sigma(\bar{Y}_i - \mu) = 0$) και ε_{ij} τα πειραματικά σφάλματα τα οποία είναι τυχαία, ανεξάρτητα και $N(0, \sigma_e^2)$.

Η μηδενική υπόθεση: $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_i$

Η εναλλακτική υπόθεση: $H_1: \tau_1 \neq \tau_2 \neq \ldots \neq \tau_i$

Η διακύμανση των παρατηρήσεων Y_{ij} είναι σ_ε^2

Όταν η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, υπάρχει ένα επιπλέον συστατικό της διακύμανσης στο πείραμα : $\dfrac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του υπολοίπου υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT\upsilon\pi)=E\left(\frac{AT\upsilon\pi}{a(n-1)}\right)=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2\right]=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}^2-2y_{ij}\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{i.}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-2n\sum_{j=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2+n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2\right]$$

$$=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2\right]=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}y_{i.}^2\right]$$

$$=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij})^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}(n\mu+n\tau_i+\varepsilon_{i.})^2\right]$$

$$=\frac{1}{a(n-1)}E\left[\alpha n\mu^2+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+\alpha n\sigma^2-\alpha n\mu^2-n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2-\alpha\sigma^2\right]$$

$$=\frac{1}{a(n-1)}a(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

Οι όροι ε_{ij}^2 και $\varepsilon_{i.}^2$ αντικαθίστανται με σ^2 και $n\sigma^2$ επειδή $E(\varepsilon_{ij})=0$

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου των επεμβάσεων υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT\varepsilon\pi)=E\left(\frac{AT\varepsilon\pi}{a-1}\right)=\frac{1}{a-1}E\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{n}-\frac{y_{..}^2}{an}\right)=\frac{1}{a-1}\left(E\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{n}-E(\frac{y_{..}^2}{an})\right)$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}E(n\mu+n\tau_i+\varepsilon_{i.})^2-\frac{1}{an}E(an\mu+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i+\varepsilon_{..})^2\right]$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{n}[a(n\mu)^2+n^2\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+an\sigma^2]-\frac{1}{an}[(an\mu)^2+an\sigma^2]\right]$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[an\mu^2+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+a\sigma^2)-(an\mu^2+\sigma^2)\right]$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[\sigma^2(a-1)+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2\right]=\sigma^2+\frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

Ισχύει $E(\varepsilon_{ij})=0$, $E(\varepsilon_{i.})=0$, $E(\varepsilon_{..})=0$, $E(\varepsilon_{ij}^2)=\sigma^2$, $E(\varepsilon_{i.}^2)=n\sigma^2$, $E(\varepsilon_{..}^2)=an\sigma^2$ και $\Sigma\tau_i=0$

Ανάλυση μοντέλου τυχαίων επιδράσεων με ένα παράγοντα

Αν τα επίπεδα της επέμβασης είναι ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από ένα πληθυσμό με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ_τ^2 και τα συμπεράσματα του πειράματος έχουν ως στόχο να επεκταθούν στον πληθυσμό των επιπέδων τότε το μοντέλο είναι τυχαίων επιδράσεων (Random-effects model).

Το γραμμικό μοντέλο είναι: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Όπου τ_i είναι ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή και για τυχαία δείγματα επιπέδων ισχύει $\Sigma\tau_i = \Sigma(\bar{Y}_i - \mu) \neq 0$.

Η μηδενική υπόθεση: H_0: $\sigma_\tau^2 = 0$

Η εναλλακτική υπόθεση: H_1: $\sigma_\tau^2 > 0$

Η διακύμανση των $Y_{ij} = r\sigma_\tau^2 + \sigma_\varepsilon^2$ (σ_τ^2 και σ_ε^2 τα συστατικά της διακύμανσης)

Όταν η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, υπάρχει ένα επιπλέον συστατικό της διακύμανσης στο πείραμα : $n\sigma_\tau^2$

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου των επεμβάσεων υπολογίζεται ως εξής:

$$E(\text{ΜΤεπ}) = E\left(\frac{\text{ΑΤεπ}}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}E\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{an}\right) = \frac{1}{a-1}\left(E\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{n} - E(\frac{y_{..}^2}{an})\right)$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}E(n\mu + n\tau_i + \varepsilon_{i.})^2 - \frac{1}{an}E(an\mu + \sum\nolimits_{i=1}^{a}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\tau_i + \varepsilon_{..})^2\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{n}[a(n\mu)^2 + an^2\sigma_\tau^2 + an\sigma^2] - \frac{1}{an}[(an\mu)^2 + an^2\sigma_\tau^2 + an\sigma^2]\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[an\mu^2 + an\sigma_\tau^2 + a\sigma^2) - (an\mu^2 + n\sigma_\tau^2 + \sigma^2)\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\sigma^2(a\text{-}1) + n(a\text{-}1)\sigma_\tau^2\right] = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

Ο όρος τ_i^2 αντικαθίστανται με σ_τ^2 επειδή $E(\tau_i)=0$ και οι όροι $\varepsilon_{i.}^2$ και $\varepsilon_{..}^2$ με $n\sigma^2$ και $an\sigma^2$ αντίστοιχα.

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του υπολοίπου είναι σ^2.

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας για το Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**ΘΣΜΤ[1]**	**ΘΣΜΤ[2]**
Επεμβάσεις	a – 1	$AT\varepsilon = n\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}\right)^2$	$\frac{AT\varepsilon}{(\alpha-1)}$	$\frac{MT\varepsilon}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$
Υπόλοιπο	a (n – 1)	$AT\upsilon = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right)^2$	$\frac{AT\upsilon}{\alpha(n-1)}$		σ_e^2	σ_e^2
Σύνολο	an – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}\right)^2$				

Θεωρητική σύσταση μέσου τετραγώνου: [1] Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων, [2] Μοντέλο σταθερών επιδράσεων

Ανάλυση μοντέλου σταθερών επιδράσεων με δύο παράγοντες

Ο ερευνητής επιλέγει να χρησιμοποιήσει συγκεκριμένα επίπεδα των δύο παραγόντων και τα συμπεράσματα του πειράματος αφορούν μόνο τα συγκεκριμένα επίπεδα.

Το γραμμικό μοντέλο είναι: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Όπου: μ = ο γενικός μέσος

α_i = η επίδραση του i επιπέδου του πρώτου παράγοντα ($\Sigma\alpha_i = 0$)

β_j = η επίδραση του j επιπέδου του δεύτερου παράγοντα ($\Sigma\beta_j = 0$)

$(\alpha\beta)_{ij}$ = η αλληλεπίδραση των δύο παραγόντων

ε_{ijk} = τα πειραματικά σφάλματα, $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Η διακύμανση των παρατηρήσεων Y_{ijk} είναι σ_ε^2

Οι μηδενικές υποθέσεις είναι H_0: $\alpha_i = 0$, H_0: $\beta_j = 0$ και H_0: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του παράγοντα Α υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT_A) = E\left(\frac{AT_A}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1} E\left(\sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}\right) = \frac{1}{a-1}\left(E\sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - E\left(\frac{y_{...}^2}{abn}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{bn} E\sum_{i=1}^{a} (bn\mu + bn\tau_i + \varepsilon_{i..})^2 - \frac{1}{\alpha bn} E(abn\mu + \varepsilon_{...})^2\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{bn}[a(bn\mu)^2 + (bn)^2 \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 + abn\sigma^2] - \frac{1}{abn}[(abn\mu)^2 + abn\sigma^2]\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[(abn\mu^2 + bn\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 + a\sigma^2) + (abn\mu^2 + \sigma^2)\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\sigma^2(a-1) + bn\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2\right] = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{a-1}$$

Ισχύει $\alpha_{.} = 0$, $\beta_{.} = 0$, $(\alpha\beta)_{.j} = 0$, $(\alpha\beta)_{i.} = 0$ και $(\alpha\beta)_{..} = 0$

Ανάλυση μοντέλου τυχαίων επιδράσεων με δύο παράγοντες

Τα επίπεδα των παραγόντων είναι ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από ένα μεγαλύτερο πληθυσμό και τα συμπεράσματα του πειράματος έχουν ως στόχο να επεκταθούν στον μεγαλύτερο πληθυσμό επιπέδων.

Το γραμμικό μοντέλο είναι: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

α_i = η τυχαία επίδραση από πληθυσμό με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ_α^2

β_j = η τυχαία επίδραση από πληθυσμό με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ_β^2

$(\alpha\beta)_{ij}$ = είναι η τυχαία αλληλεπίδραση από έναν πληθυσμό με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\sigma_{\alpha\beta}^2$

ε_{ijk} = τα πειραματικά σφάλματα, $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Η διακύμανση των παρατηρήσεων Y_{ijk} είναι $\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_\varepsilon^2$

Οι μηδενικές υποθέσεις είναι H_0: $\sigma_\alpha^2 = 0$, H_0: $\sigma_\beta^2 = 0$ και H_0: $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του παράγοντα Α υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT_A) = E\left(\frac{AT_A}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}E\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}\right) = \frac{1}{a-1}\left(E\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bn} - E\left(\frac{y_{...}^2}{abn}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{bn}E\sum_{i=1}^{a}(bn\mu + bn\alpha_i + n\beta_. + n(\alpha\beta)_{i.} + \varepsilon_{i..})^2 \\ -\dfrac{1}{abn}E(abn\mu + bn\alpha_. + an\beta_. + n(\alpha\beta)_{..} + \varepsilon_{...})^2\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{bn}[a(bn\mu)^2 + a(bn)^2\sigma_\alpha^2 + ab(n)^2\sigma_\beta^2 + abn^2\sigma_{\alpha\beta}^2 + abn\sigma^2] \\ -\dfrac{1}{abn}[(abn\mu)^2 + a(bn)^2\sigma_\alpha^2 + b(an)^2\sigma_\beta^2 + abn^2\sigma_{\alpha\beta}^2 + abn\sigma^2]\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\sigma^2(a-1) + n(a-1)\sigma_{\alpha\beta}^2 + (a-1)bn\sigma_\alpha^2\right] = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + bn\sigma_\alpha^2$$

Ανάλυση μοντέλου μεικτών επιδράσεων με δύο παράγοντες

Αν τα επίπεδα του ενός παράγοντα είναι προκαθορισμένα, ενώ τα επίπεδα του άλλου παράγοντα είναι τυχαία που προέρχονται από ένα μεγαλύτερο πληθυσμό, τότε το μοντέλο αυτό ονομάζεται μοντέλο μεικτών επιδράσεων (Mixed-effects model).

Το γραμμικό μοντέλο είναι: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Περιορισμένο μοντέλο (restricted model)

Όπου α_i η σταθερή επίδραση ($\Sigma\alpha_i = 0$), β_j η τυχαία επίδραση με $N(0, \sigma_\beta^2)$, $(\alpha\beta)_{ij}$ η τυχαία αλληλεπίδραση με $N(0, [(a-1)/a]\sigma_{\alpha\beta}^2)$ και $\boldsymbol{(\alpha\beta)_{.j} = 0}$ και ε_{ijk} τα πειραματικά σφάλματα με $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Μη περιορισμένο μοντέλο (unrestricted model)

Όπου α_i η σταθερή επίδραση ($\Sigma\alpha_i = 0$), β_j η τυχαία επίδραση με $N(0, \sigma_\beta^2)$, $(\alpha\beta)_{ij}$ η τυχαία αλληλεπίδραση με $N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$ και ε_{ijk} τα σφάλματα με $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του παράγοντα Β (τυχαίο), με το περιορισμένο μοντέλο, υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT_B)=E\left(\frac{AT_B}{b-1}\right)=\frac{1}{b-1}E\left(\sum_{j=1}^{a}\frac{y_{.j.}^2}{bn}-\frac{y_{...}^2}{abn}\right)=\frac{1}{b-1}\left(E\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an}-E(\frac{y_{...}^2}{abn})\right)$$

$$=\frac{1}{b-1}\left[\frac{1}{an}E\sum_{j=1}^{b}(an\mu+an\beta_j+\varepsilon_{i..})^2-\frac{1}{abn}E(abn\mu+an\beta_{.}+\varepsilon_{...})^2\right]$$

$$=\frac{1}{b-1}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{an}[b(an\mu)^2+b(an)^2\sigma_\beta^2+abn\sigma^2]\\ -\frac{1}{\alpha bn}[(abn\mu)^2+a(bn)^2\sigma_\beta^2+abn\sigma^2]\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{b-1}\left[\sigma^2(b-1)+an(b-1)\sigma_\beta^2\right]=\sigma^2+an\sigma_\beta^2$$

Ισχύει $\alpha_{.}=0$ και $(\alpha\beta)_{.j}=0$

Η αναμενόμενη τιμή του μέσου τετραγώνου του παράγοντα B (τυχαίο), με το μη περιορισμένο μοντέλο, υπολογίζεται ως εξής:

$$E(MT_B)=E\left(\frac{AT_B}{b-1}\right)=\frac{1}{b-1}E\left(\sum_{j=1}^{a}\frac{y_{.j.}^2}{bn}-\frac{y_{...}^2}{abn}\right)=\frac{1}{b-1}\left(E\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an}-E(\frac{y_{...}^2}{abn})\right)$$

$$=\frac{1}{b-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{an}E\sum_{j=1}^{b}(an\mu+an\beta_j+n(\alpha\beta)_{.j}+\varepsilon_{.j.})^2\\ -\frac{1}{abn}E(abn\mu+an\beta_{.}+n(\alpha\beta)_{..}+\varepsilon_{...})^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{b-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{an}[b(an\mu)^2+b(an)^2\sigma_\beta^2+abn^2\sigma_{\alpha\beta}^2+abn\sigma^2]\\ -\frac{1}{\alpha bn}[(abn\mu)^2+b(an)^2\sigma_\beta^2+abn^2\sigma_{\alpha\beta}^2+abn\sigma^2]\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{b-1}\left[\sigma^2(b-1)+n(b-1)\sigma_{a\beta}^2+an(b-1)\sigma_\beta^2\right]=\sigma^2+n\sigma_{a\beta}^2+an\sigma_\beta^2$$

Ισχύει $\alpha_{.}=0$

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΘΣΜΤ[1]**	**ΘΣΜΤ[2]**	**ΘΣΜΤ[3]**
Α	$a-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + bn\sigma_\alpha^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$
Β	$b-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{an\sum_{i=1}^{a}\beta_i^2}{b-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + an\sigma_\beta^2$	$\sigma_e^2 + an\sigma_\beta^2$
ΑΒ	(a-1)(b-1)	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
Υπόλοιπο	ab(n-1)	σ_e^2	σ_e^2	σ_e^2

[1] Μοντέλο σταθερών επιδράσεων, [2] Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων και [3] Μοντέλο μεικτών επιδράσεων (Α προκαθορισμένο και Β τυχαίο)

Παράδειγμα: Πείραμα δύο παραγόντων (Montgomery)

Part	Operator 1		Operator 2		Operator 3	
	1	2	1	2	1	2
1	21	20	20	20	19	21
2	24	23	24	24	23	24
3	20	21	19	21	20	22
4	27	27	28	26	27	28
5	19	18	19	18	18	21
6	23	21	24	21	23	22
7	22	21	22	24	22	20
8	19	17	18	20	19	18
9	24	23	25	23	24	24
10	25	23	26	25	24	25
11	21	20	20	20	21	20
12	18	19	17	19	18	19
13	23	25	25	25	25	25
14	24	24	23	25	24	25
15	29	30	30	28	31	30
16	26	26	25	26	25	27
17	20	20	19	20	20	20
18	19	21	19	19	21	23
19	25	26	25	24	25	25
20	19	19	18	17	19	17

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(EMSaov)
> factorial2EMS
       A   B  Rep   Y
1      1   1   1   21
2      2   1   1   24
3      3   1   1   20
4      4   1   1   27
5      5   1   1   19
6      6   1   1   23
7      7   1   1   22
8      8   1   1   19
9      9   1   1   24
10    10   1   1   25
11    11   1   1   21
...
113   13   3   2   25
114   14   3   2   25
115   15   3   2   30
116   16   3   2   27
117   17   3   2   20
118   18   3   2   23
119   19   3   2   25
120   20   3   2   17
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=EMSanova(Y~A*B, data=`factorial2EMS`, type=c("F","F"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	19	1185.425000	62.3907895	62.9151	<0.0001	***	Error+6A
B	2	2.616667	1.3083333	1.3193	0.275		Error+40B
A:B	38	27.050000	0.7118421	0.7178	0.8614		Error+2A:B
Residuals	60	59.500000	0.9916667				Error

```
> fit=EMSanova(Y~A*B, data=`factorial2EMS`, type=c("R", "R"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	19	1185.425000	62.3907895	87.647	<0.0001	***	Error+2A:B+6A
B	2	2.616667	1.3083333	1.838	0.173		Error+2A:B+40B
A:B	38	27.050000	0.7118421	0.7178	0.8614		Error+2A:B
Residuals	60	59.500000	0.9916667				Error

```
> fit=EMSanova(Y~A*B, data=`factorial2EMS`, type=c("F", "R"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	19	1185.425000	62.3907895	87.647	<0.0001	***	Error+2A:B+6A
B	2	2.616667	1.3083333	1.3193	0.275		Error+40B
A:B	38	27.050000	0.7118421	0.7178	0.8614		Error+2A:B
Residuals	60	59.500000	0.9916667				Error

```
> fit=EMSanova(Y~A*B,data=`factorial2EMS`,type=c("R", “F"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	19	1185.425000	62.3907895	62.9151	<0.0001	***	Error+6A
B	2	2.616667	1.3083333	1.838	0.173		Error+2A:B+40B
A:B	38	27.050000	0.7118421	0.7178	0.8614		Error+2A:B
Residuals	60	59.500000	0.9916667				Error

```
> library(lme4)
> A=factor(A);B=factor(B)
> fit=lmer(Y ~ A +(1|B) + (1|A:B),factorial2EMS)
> summary(fit)
Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
Formula: Y ~ A + (1 | B) + (1 | A:B)

REML criterion at convergence: 308

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.0229 -0.6777  0.1053  0.5659  2.7655

Random effects:
 Groups   Name        Variance  Std.Dev.
 A:B      (Intercept) 0.00000   0.0000
 B        (Intercept) 0.01063   0.1031
 Residual             0.88316   0.9398
Number of obs: 120, groups:  A:B, 60; B, 3

Fixed effects:
            Estimate  Std. Error  t value
(Intercept) 20.1667    0.3882    51.943
A2           3.5000    0.5426     6.451
A3           0.3333    0.5426     0.614
...
```

```
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
      Df    Sum Sq    Mean Sq    F value
A     19    1185.4     62.391    70.645

> library(lmerTest)
> ranova(fit)
 ANOVA-like table for random-effects: Single term deletions

Model:
Y ~ A + (1 | B) + (1 | A:B)
             npar   logLik     AIC       LRT     Df  Pr(>Chisq)
<none>         23  -153.99  353.98
(1 | B)        22  -154.08  352.16   0.17223    1      0.6781
(1 | A:B)      22  -153.99  351.98   0.00000    1      1.0000
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> difflsmeans(fit)
Least Squares Means table:

	Estimate	Std. Error	df	t value	lower	upper	Pr(>|t|)
factor(A)1-factor(A)2	-3.50e+00	5.42e-01	98	-6.450	-4.57e+00	-2.42e+00	4.239e-09 ***
factor(A)1-factor(A)3	-3.33e-01	5.42e-01	98	-0.614	-1.41e+00	7.43e-01	0.5404049
factor(A)1-factor(A)4	-7.00e+00	5.42e-01	98	-12.901	-8.07e+00	-5.92e+00	< 2.2e-16 ***
factor(A)1-factor(A)5	1.33e+00	5.42e-01	98	2.457	2.56e-01	2.41e+00	0.0157509 *
factor(A)1-factor(A)6	-2.16e+00	5.42e-01	98	-3.993	-3.24e+00	-1.08e+00	0.0001260 ***
factor(A)1-factor(A)7	-1.66e+00	5.42e-01	98	-3.071	-2.74e+00	-5.89e-01	0.0027547 **
factor(A)1-factor(A)8	1.66e+00	5.42e-01	98	3.071	5.89e-01	2.74e+00	0.0027547 **
factor(A)1-factor(A)9	-3.66e+00	5.42e-01	98	-6.757	-4.74e+00	-2.58e+00	1.010e-09 ***
factor(A)1-factor(A)10	-4.50e+00	5.42e-01	98	-8.293	-5.57e+00	-3.42e+00	5.966e-13 ***
factor(A)1-factor(A)11	-1.66e-01	5.42e-01	98	-0.307	-1.24e+00	9.10e-01	0.7593603
factor(A)1-factor(A)12	1.83e+00	5.42e-01	98	3.378	7.56e-01	2.91e+00	0.0010455 **

...

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lmer(Y ~ B +(1|A) + (1|A:B))
> summary(fit)
Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
Formula: Y ~ B + (1 | A) + (1 | A:B)

REML criterion at convergence: 409.5

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.1809 -0.7183  0.1445  0.5253  2.5849

Random effects:
 Groups   Name        Variance  Std.Dev.
 A:B      (Intercept)  0.0000   0.0000
 A        (Intercept) 10.2513   3.2018
 Residual              0.8832   0.9398
Number of obs: 120, groups:  A:B, 60; A, 20

Fixed effects:
            Estimate  Std. Error  t value
(Intercept)  22.3000      0.7312   30.498
B2           -0.0250      0.2101   -0.119
B3            0.3000      0.2101    1.428

Correlation of Fixed Effects:
   (Intr) B2
B2 -0.144
B3 -0.144  0.500
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
      Df    Sum Sq    Mean Sq   F value
B      2     2.6167  1.3083  1.4814

ANOVA-like table for random-effects: Single term deletions

> ranova(fit)
Model:
Y ~ B + (1 | A) + (1 | A:B)
               npar  logLik      AIC        LRT     Df     Pr(>Chisq)
<none>        6   -204.73   421.46
(1 | A)        5   -258.43   526.87   107.41    1     <2e-16 ***
(1 | A:B)     5   -204.73   419.46       0.00    1         1
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> fit= lmer(Y ~ (1|A) +(1|B) + (1|A:B))
> summary(fit)
Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
Formula: Y ~ (1 | A) + (1 | B) + (1 | A:B)

REML criterion at convergence: 409.4

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.0313 -0.6595  0.1270  0.5374  2.7345

Random effects:
 Groups   Name        Variance  Std.Dev.
 A:B      (Intercept)  0.00000  0.0000
 A        (Intercept) 10.25127  3.2018
 B        (Intercept)  0.01063  0.1031
 Residual              0.88316  0.9398
Number of obs: 120, groups:  A:B, 60; A, 20; B, 3

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  22.3917     0.7235   30.95
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράγοντας Fixed ή Random Αριθμός επιπέδων Δείκτης επίδρασης	A F a i	B R b j	Rep R n k	ΘΣΜΤ
α_i	0	b	n	$\sigma^2_\varepsilon + n\sigma^2_{\alpha\beta} + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$
β_j	a	1	n	$\sigma^2_e + an\sigma^2_\beta$
$\alpha\beta_{ij}$	0 (1)*	1	n	$\sigma^2_e + n\sigma^2_{\alpha\beta}$
ε_{ijk}	1	1	1	σ^2_e

- Τα κελιά της τελευταίας γραμμής (ε_{ijk}) παίρνουν την τιμή 1.
- Αν τα κελιά έχουν ίδιο δείκτη σε γραμμή και στήλη τότε, αν τα επίπεδα του παράγοντα του δείκτη είναι προκαθορισμένα, το κελί παίρνει τιμή 0 (*στο unrestricted-model, αν υπάρχει τουλάχιστον ένας τυχαίος παράγοντας στην αλληλεπίδραση $\alpha\beta_{ij}$, τότε παίρνει την τιμή 1), αν τα επίπεδα είναι τυχαία, παίρνει τιμή 1, ενώ αν δεν έχουν ίδιο δείκτη το κελί παίρνει τον αριθμό των επιπέδων της στήλης.
- Για να βρούμε την θεωρητική σύσταση ενός μέσου τετραγώνου (πχ MT_A), εξαιρούμε την στήλη με τον δείκτη της επίδρασης (πχ πρώτη στήλη i) και πολλαπλασιάζουμε τις τιμές των κελιών με την διακύμανση, στις γραμμές εκείνες όπου εμφανίζεται ο ίδιος δείκτης ($1^η$, $3^η$ και $4^η$ γραμμή).

Παράδειγμα: $b*n*\Sigma\alpha^2/(a-1) + 1*n*\sigma^2_\beta + 1*1*\sigma^2_\varepsilon$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πηγή παρ/τας	ΘΣΜΤ[1]	ΘΣΜΤ[2]	ΘΣΜΤ[3]
Α	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{bcn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{\alpha-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + cn\sigma_{\alpha\beta}^2 + bn\sigma_{\alpha\gamma}^2 + bcn\sigma_\alpha^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + bn\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{bcn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{\alpha-1}$
Β	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{acn\sum_{i=1}^{a}\beta_i^2}{b-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + cn\sigma_{\alpha\beta}^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2 + acn\sigma_\beta^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2 + \frac{acn\sum_{i=1}^{a}\beta_i^2}{b-1}$
Γ	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{abn\sum_{k=1}^{c}\gamma_i^2}{c-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + bn\sigma_{\alpha\gamma}^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2 + bcn\sigma_\gamma^2$	$\sigma_e^2 + bcn\sigma_\gamma^2$
ΑΒ	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + cn\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \frac{cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
ΑΓ	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\alpha\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + bn\sigma_{\alpha\gamma}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + bn\frac{a}{a-1}\sigma_{\alpha\gamma}^2$
ΒΓ	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\beta\gamma)_{jk}^2}{(b-1)(c-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + an\frac{b}{b-1}\sigma_{\beta\gamma}^2$
ΑΒΓ	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\alpha\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
Υπόλοιπο	σ_ε^2	σ_ε^2	σ_ε^2

[1] Μοντέλο σταθερών επιδράσεων, [2] Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων και [3] Μοντέλο μεικτών επιδράσεων (Α, Β σταθερών και Γ τυχαίων)

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράγοντας Fixed ή Random Αριθμός επιπέδων Δείκτης επίδρασης	A F a i	B F b j	C R c k	Rep R n l	ΘΣΜΤ
α_i	0	b	c	n	$\sigma_\varepsilon^2 + bn\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{bcn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{\alpha-1}$
β_j	a	0	c	n	$\sigma_\varepsilon^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2 + \frac{acn\sum_{i=1}^{a}\beta_i^2}{b-1}$
γ_k	a	b	1	n	$\sigma_e^2 + bcn\sigma_\gamma^2$
$\alpha\beta_{ij}$	0 (1)*	0 (1)	c	n	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \frac{cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$\alpha\gamma_{ik}$	0 (1)	b	1	n	$\sigma_\varepsilon^2 + bn\frac{a}{a-1}\sigma_{\alpha\gamma}^2$
$\beta\gamma_{jk}$	a	0 (1)	1	n	$\sigma_\varepsilon^2 + an\sigma_{\beta\gamma}^2$
$\alpha\beta\gamma_{ijk}$	0 (1)	0 (1)	1	n	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
ε_{ijkl}	1	1	1	1	σ_ε^2

*(unrestricted model)

Παράδειγμα: Πείραμα τριών παραγόντων (Montgomery)

Pressure Gauge (C)	Gas Temperature (A)											
	60°F				75°F				90°F			
	Operator (B)				Operator (B)				Operator (B)			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	-2	0	-1	4	14	6	1	-7	-8	-2	-1	-2
	-3	-9	-8	4	14	0	2	6	-8	20	-2	1
2	-6	-5	-8	-3	22	8	6	-5	-8	1	-9	-8
	4	-1	-2	-7	24	6	2	2	3	-7	-8	3
3	-1	-4	0	-2	20	2	3	-5	-2	-1	-4	1
	-2	-8	-7	4	16	0	0	-1	-1	-2	-7	3

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> factorial3EMS
     A  B  C  Rep  Y
1    1  1  1  1   -2
2    1  1  1  2   -3
3    1  1  2  1   -6
4    1  1  2  2    4
5    1  1  3  1   -1
6    1  1  3  2   -2
7    1  2  1  1    0
8    1  2  1  2   -9
…
64   3  3  2  2   -8
65   3  3  3  1   -4
66   3  3  3  2   -7
67   3  4  1  1   -2
68   3  4  1  2    1
69   3  4  2  1   -8
70   3  4  2  2    3
71   3  4  3  1    1
72   3  4  3  2    3
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> factorialEMS <- read.delim("C:/Users/amy/Desktop/factorial3EMS.txt")
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("F","F","F"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556	23.9072	<0.0001	***	Error + 24A
B	3	423.819444	141.273148	6.6007	0.0011	**	Error + 18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	9.4378	<0.0001	***	Error + 6A:B
C	2	7.194444	3.597222	0.1681	0.846		Error + 24C
A:C	4	137.888889	34.472222	1.6106	0.1927		Error + 8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	1.6312	0.1669		Error + 6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error + 2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("F","F","R"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556	14.8433	0.0141	*	Error + 8A:C + 24A
B	3	423.819444	141.273148	4.0465	0.0686	.	Error + 6B:C + 18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	14.5923	1e-04	***	Error + 2A:B:C + 6A:B
C	2	7.194444	3.597222	0.1681	0.846		Error + 24C
A:C	4	137.888889	34.472222	1.6106	0.1927		Error + 8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	1.6312	0.1669		Error + 6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error + 2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("F","R","R"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556				Error+2A:B:C+8A:C+6A:B+24A
B	3	423.819444	141.273148	4.0465	0.0686	.	Error+6B:C+18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	14.5923	1e-04	***	Error+2A:B:C+6A:B
C	2	7.194444	3.597222	0.103	0.9037		Error+6B:C+24C
A:C	4	137.888889	34.472222	2.4903	0.0991	.	Error+2A:B:C+8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	1.6312	0.1669		Error+6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error+2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error

Προσεγγιστική δοκιμασία F (Approximate F tests)

Συνθετικό MT

$$MT' = MT_A + MT_{ABC} = 511{,}68 + 13{,}84 = 525{,}52$$

$$MT'' = MT_{AB} + MT_{AC} = 202{,}00 + 34{,}47 = 236{,}47$$

$$F = \frac{MT'}{MT''} = \frac{525{,}52}{236{,}47} = 2{,}22$$

ΒΕ αριθμητή

$$p = \frac{\left(MT_A + MT_{ABC}\right)^2}{MT_A^2/2 + MT_{ABC}^2/12} = \frac{\left(525{,}52\right)^2}{\left(511{,}68\right)^2/2 + \left(13{,}84\right)^2/12} = 2{,}11 \approx 2$$

ΒΕ παρανομαστή

$$q = \frac{\left(MT_{AB} + MT_{AC}\right)^2}{MT_{AB}^2/6 + MT_{AC}^2/4} = \frac{\left(236{,}47\right)^2}{\left(202{,}00\right)^2/6 + \left(34{,}47\right)^2/4} = 7{,}88 \approx 8$$

Συγκρίνοντας το F = 2,22 του πειράματος με την κρίσιμη τιμή $F_{(0.05,2,8)}$ = 4,46, δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

```
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("F","R","R"), approximate = TRUE)
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556	2.2224	0.1708		Error+2A:B:C+8A:C+6A:B+24A
B	3	423.819444	141.273148	4.0465	0.0686	.	Error+6B:C+18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	14.5923	1e-04	***	Error+2A:B:C+6A:B
C	2	7.194444	3.597222	0.103	0.9037		Error+6B:C+24C
A:C	4	137.888889	34.472222	2.4903	0.0991	.	Error+2A:B:C+8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	1.6312	0.1669		Error+6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error+2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("R","R","R"))
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556				Error+2A:B:C+8A:C+6A:B+24A
B	3	423.819444	141.273148				Error+2A:B:C+6B:C+6A:B+18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	14.5923	1e-04	***	Error+2A:B:C+6A:B
C	2	7.194444	3.597222				Error+2A:B:C+6B:C+8A:C+24C
A:C	4	137.888889	34.472222	2.4903	0.0991	.	Error+2A:B:C+8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	2.5221	0.0814	.	Error+2A:B:C+6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error+2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=EMSanova(Y~A*B*C, data=`factorial3EMS`, type=c("R","R","R"), approximate = TRUE)
> fit
```

	Df	SS	MS	Fvalue	Pvalue	Sig	EMS
A	2	1023.361111	511.680556	2.2224	0.1708		Error+2A:B:C+8A:C+6A:B+24A
B	3	423.819444	141.273148	0.6548	0.6267		Error+2A:B:C+6B:C+6A:B+18B
A:B	6	1211.972222	201.995370	14.5923	1e-04	***	Error+2A:B:C+6A:B
C	2	7.194444	3.597222	0.2514	0.9893		Error+2A:B:C+6B:C+8A:C+24C
A:C	4	137.888889	34.472222	2.4903	0.0991	.	Error+2A:B:C+8A:C
B:C	6	209.472222	34.912037	2.5221	0.0814	.	Error+2A:B:C+6B:C
A:B:C	12	166.111111	13.842593	0.6468	0.7882		Error+2A:B:C
Residuals	36	770.500000	21.402778				Error