ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Ορθογώνιες συγκρίσεις

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

Η ανάλυση διακύμανσης είναι ένα χρήσιμο και ισχυρό εργαλείο για τη σύγκριση μέσων επεμβάσεων. Αν η γενική δοκιμασία F είναι σημαντική, ο ερευνητής ελέγχει όλους τους συνδυασμούς των επεμβάσεων με κάποια μέθοδο πολλαπλών συγκρίσεων.

Σε κάποιες περιπτώσεις ο ερευνητής μπορεί να ενδιαφέρεται και να έχει προσχεδιάσει κάποιες συγκεκριμένες συγκρίσεις επεμβάσεων. Οι προσχεδιασμένες αυτές συγκρίσεις γίνονται αντί της γενικής δοκιμασίας F και μπορούν να αφορούν απλά ζεύγη μέσων επεμβάσεων ή και σύνθετα ζεύγη μέσων. Οι συγκρίσεις αυτές καταλήγουν να είναι συγκρίσεις δύο ‘μέσων’ με ένα βαθμό ελευθερίας και ονομάζονται αντιθέσεις ή συγκρίσεις με ένα βαθμό ελευθερίας.

Αντιθέσεις ή Συγκρίσεις
(Contrasts)

Αντίθεση (L) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων μέσων επεμβάσεων των οποίων οι συντελεστές αθροίζονται στο μηδέν.

$$L = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i.} \qquad \sum_{i=1}^{a} c_i = 0$$

Παράδειγμα: Υπάρχει διαφορά μεταξύ των επεμβάσεων μ_1 και μ_2;

$$\mu_1 - \mu_2 = 0, \text{ όπου } c_1 = 1 \text{ και } c_2 = -1 \text{ και } c_1 + c_2 = 0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, \; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \text{ή} \quad H_0: L = 0, \; H_1: L \neq 0$$

Για τον έλεγχο της αντίθεσης:

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i.}}{\sqrt{\frac{MT\upsilon}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^{\,2}}} \qquad F_0 = t_0^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i.}\right)^2}{\frac{MT\upsilon}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^{\,2}}$$

με βαθμούς ελευθερίας $t_{a/2,N-a}$ και $F_{a,1,N-a}$

Ορθογώνιες Αντιθέσεις ή Συγκρίσεις
(Orthogonal Contrasts)

Ένα σύνολο γραμμικών αντιθέσεων πρέπει να ικανοποιεί δύο μαθηματικές ιδιότητες έτσι ώστε να είναι ορθογώνιες αντιθέσεις:

1) Το άθροισμα των συντελεστών σε κάθε γραμμική αντίθεση πρέπει να αθροίζονται στο μηδέν, ($\Sigma c_i = 0$).
2) Το άθροισμα των γινόμενων δύο αντίστοιχων συντελεστών σε όλες τις αντιθέσεις πρέπει να είναι μηδέν ($\Sigma(c_i)(c_i') = 0$).

Αν σε ένα πείραμα υπάρχουν (α – 1) αντιθέσεις οι οποίες είναι ορθογώνιες, τότε αν προσθέσουμε τα αθροίσματα τετραγώνων για κάθε αντίθεση, το άθροισμα τους θα ισούται με το ολικό άθροισμα τετραγώνων του πειράματος. Όταν οι συγκρίσεις είναι ορθογώνιες παρέχουν ανεξάρτητες, μη επικαλυπτόμενες πληροφορίες σχετικά με τα αποτελέσματα του πειράματος.

Αριθμός ορθογώνιων συγκρίσεων

Όταν έχουμε α επεμβάσεις, ο αριθμός των συγκρίσεων που είναι ορθογώνιες είναι α–1, υπάρχουν όμως περισσότερες από μία ομάδες ορθογώνιων συγκρίσεων.

	Επέμβαση				
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Άθροισμα**
1η σύγκριση	3	-1	-1	-1	0
2η σύγκριση	0	2	-1	-1	0
3η σύγκριση	0	0	1	-1	0
	Έλεγχος για ορθογωνιότητα				
1η x 2η	3 x 0 = 0	(-1) x 2 = -2	(-1) x (-1) = 1	(-1) x (-1) = 1	0
1η x 3η	3 x 0 = 0	(-1) x 0 = 0	(-1) x 1 = -1	(-1) x (-1) = 1	0
2η x 3η	0 x 0 = 0	2 x 0 = 0	(-1) x 1 = -1	(-1) x (-1) = 1	0

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

	Επέμβαση			
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
	1η ομάδα			
1η σύγκριση	3	-1	-1	-1
2η σύγκριση	0	2	-1	-1
3η σύγκριση	0	0	1	-1
	2η ομάδα			
1η σύγκριση	0	-2	1	1
2η σύγκριση	0	0	-1	1
3η σύγκριση	0	0	-1	1
	3η ομάδα			
1η σύγκριση	1	-1	-1	1
2η σύγκριση	1	0	0	-1
3η σύγκριση	0	1	-1	0

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**
Σύγκριση 1	1	$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 1 = \frac{[\sum(c_{1i})(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_{1i})^2]}$	ΑΤσυγκ1/1	ΜΤσυγκ1/ΜΤυπ
Σύγκριση 2	1	$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 2 = \frac{[\sum(c_{2i})(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_{2i})^2]}$	ΑΤσυγκ2/1	ΜΤσυγκ2/ΜΤυπ
Σύγκριση 3	1	$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 3 = \frac{[\sum(c_{3i})(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_{3i})^2]}$	ΑΤσυγκ3/1	ΜΤσυγκ3/ΜΤυπ
Υπόλοιπο	a (n – 1)	Με αφαίρεση	ΜΤυπ	
Σύνολο	an – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}\right)^2$		

Παράδειγμα : Πείραμα τεσσάρων επεμβάσεων με πέντε επαναλήψεις

	Επέμβαση			
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
ΣY_{ij}	40	25	50	35
$\bar{Y}_{i.}$	8	5	10	7
n	5	5	5	5
1η σύγκριση	3	-1	-1	-1
2η σύγκριση	0	2	-1	-1
3η σύγκριση	0	0	1	-1

H_0: $\mu_A = \mu_B + \mu_\Gamma + \mu_\Delta$

H_1: $\mu_A \neq \mu_B + \mu_\Gamma + \mu_\Delta$

H_0: $\mu_B = \mu_\Gamma + \mu_\Delta$

H_1: $\mu_B \neq \mu_\Gamma + \mu_\Delta$

H_0: $\mu_\Gamma = \mu_\Delta$

H_1: $\mu_\Gamma \neq \mu_\Delta$

$$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa = \frac{[\sum(c_i)(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_i)^2]} \quad \text{ή} \quad AT\sigma\upsilon\gamma\kappa = \frac{n[\sum(c_i)(\bar{Y}_{i.})]^2}{[\sum(c_i)^2]}$$

$$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 1 = \frac{[\sum(c_i)(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_i)^2]} = \frac{[(3)(40)+(-1)(25)+(-1)(50)+(-1)(35)]^2}{5[(3)^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2]} = \frac{10^2}{5*12} = 1{,}67$$

$$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 2 = \frac{[\sum(c_i)(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_i)^2]} = \frac{[(0)(40)+(2)(25)+(-1)(50)+(-1)(35)]^2}{5[(0)^2+(2)^2+(-1)^2+(-1)^2]} = \frac{(-35)^2}{5*6} = 40{,}83$$

$$AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 3 = \frac{[\sum(c_i)(Y_{i.})]^2}{n[\sum(c_i)^2]} = \frac{[(0)(40)+(0)(25)+(1)(50)+(-1)(35)]^2}{5[(0)^2+(0)^2+(1)^2+(-1)^2]} = \frac{15^2}{5*2} = 22{,}5$$

$$\sum AT\sigma\upsilon\gamma\kappa = AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 1 + AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 2 + AT\sigma\upsilon\gamma\kappa 3 = AT\ \varepsilon\pi\varepsilon\mu\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**
Επεμβάσεις	3	65	21,667	6,4198**
Σύγκριση 1	1	1,67	1,67	0,49232 ^{ns}
Σύγκριση 2	1	40,83	40,83	12,099 **
Σύγκριση 3	1	22,50	22,50	6,667 *
Υπόλοιπο	16	54	3,375	
Σύνολο	19	119		

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> attach(crd)
> crd
     Tr  Y
1     1 10
2     1  7
3     1  9
4     1  5
5     1  9
6     2  3
7     2  5
8     2  7
9     2  6
10    2  4
11    3 11
12    3 11
13    3  9
14    3  9
15    3 10
16    4  5
17    4  4
18    4  8
19    4  8
20    4 10
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Tr=factor(Tr)
> fit=aov(Y~Tr)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Tr	3	65	21.667	6.4198	0.004633 **
Residuals	16	54	3.375		

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

```
> contrasts(Tr)=cbind(c(3,-1,-1,-1), c(0,2,-1,-1), c(0,0,1,-1))
> contrasts(Tr)

  [,1] [,2] [,3]
1    3    0    0
2   -1    2    0
3   -1   -1    1
4   -1   -1   -1
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit2=aov(Y~Tr)
> summary.lm(fit2)

Call:
aov(formula = Y ~ Tr)

Residuals:
   Min     1Q  Median     3Q     Max
  -3.0   -1.0     0.5    1.0     3.0

Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
(Intercept)    7.5000      0.4108   18.257   3.88e-12 ***
Tr1            0.1667      0.2372    0.703   0.4923
Tr2           -1.1667      0.3354   -3.478   0.0031 **
Tr3            1.5000      0.5809    2.582   0.0201 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.837 on 16 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5462,      Adjusted R-squared:  0.4611
F-statistic:  6.42 on 3 and 16 DF,  p-value: 0.004633
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> summary(fit2, split = list(Tr = list("contrast1" = 1, "contrast2" = 2, "contrast3" = 3)))

                 Df   Sum Sq   Mean Sq   F value   Pr(>F)
Tr                3    65.00     21.67     6.420   0.00463 **
  Tr: contrast1   1     1.67      1.67     0.494   0.49232
  Tr: contrast2   1    40.83     40.83    12.099   0.00310 **
  Tr: contrast3   1    22.50     22.50     6.667   0.02006 *
Residuals        16    54.00      3.37
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
>
```