ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο - Πολλαπλές Συγκρίσεις

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2017

Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο
(Completely Randomized Design)

Πλεονεκτήματα

✓ Είναι το απλούστερο πειραματικό σχέδιο.
✓ Χρησιμοποιείται όταν το πειραματικό υλικό και το περιβάλλον είναι εντελώς ομοιόμορφα.
✓ Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε αριθμός επεμβάσεων και επαναλήψεων και επίσης διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων για κάθε επέμβαση.
✓ Έχει το μεγαλύτερο αριθμό βαθμών ελευθερίας σε σχέση με τα υπόλοιπα πειραματικά σχέδια (ΤΠΟ και ΣΛΤ).

Μειονεκτήματα

✓ Εάν υπάρχει ανομοιογένεια των πειραματικών μονάδων, η ακρίβεια του πειράματος είναι μικρότερη.

Τυχαιοποίηση στο ΕΤΣ

Οι πειραματικές επεμβάσεις τοποθετούνται στις πειραματικές μονάδες με εντελώς τυχαίο τρόπο. Η τυχαιοποίηση μπορεί να γίνει με τη χρήση των πινάκων τυχαίων αριθμών ή με ειδικά λογισμικά προγράμματα.

Η κατανομή των τεσσάρων επεμβάσεων (Μ, Α, Β & Γ) στις 24 πειραματικές μονάδες μετά την τυχαιοποίηση

1 Α	2 Β	3 Α	4 Γ	5 Μ	6 Β	7 Μ	8 Β
9 Γ	10 Α	11 Β	12 Μ	13 Α	14 Μ	15 Β	16 Β
17 Α	18 Γ	19 Μ	20 Μ	21 Γ	22 Α	23 Γ	24 Γ

Προϋποθέσεις της ANOVA

1. Οι πληθυσμοί (*α*) από τους οποίους προήλθε κάθε επέμβαση ακολουθούν την κανονική κατανομή
2. Οι διακυμάνσεις των πληθυσμών αυτών είναι ίσες ή ομοιογενείς. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **ομοσκεδαστικότητα**.
3. Οι παρατηρήσεις (*αn*) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

ή ισοδύναμα τα πειραματικά σφάλματα ε_{ij} είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και κοινή διακύμανση

Μέθοδοι για έλεγχο της κανονικότητας

α) Γραφικοί μέθοδοι

β) Το κριτήριο του χ^2

γ) Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov (Lilliefors)

δ) Ο έλεγχος Anderson – Darling

ε) Ο έλεγχος Cramer von Mises

στ) Ο έλεγχος Shapiro Wilk (Shapiro Francia)

ζ) Ο έλεγχος D'Agostino – Pearson K^2

η) Ο έλεγχος Jarque – Bera

Μέθοδοι για έλεγχο ισότητας των διακυμάνσεων

α) Η δοκιμασία Hartley’s Fmax.

β) Η δοκιμασία Cochran

γ) Η δοκιμασία Bartlett

δ) Η δοκιμασία Levene

ε) Η δοκιμασία Brown-Forsythe

στ) Η δοκιμασία Q Burr-Foster

Ανεξαρτησία των υπολοίπων

Κατά το σχεδιασμό ενός πειράματος, θα πρέπει να υπάρχει η πρόβλεψη ώστε, οι επιδράσεις μέσα και ανάμεσα στις διαφορετικές επεμβάσεις να είναι ανεξάρτητες.

Η παραπάνω προϋπόθεση επιτυγχάνεται ικανοποιητικά με την επιλογή του κατάλληλου πειραματικού σχεδίου και την ορθή τυχαιοποίηση.

Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο

Το γραμμικό πρότυπο:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_{\iota} + \varepsilon_{ij}$$

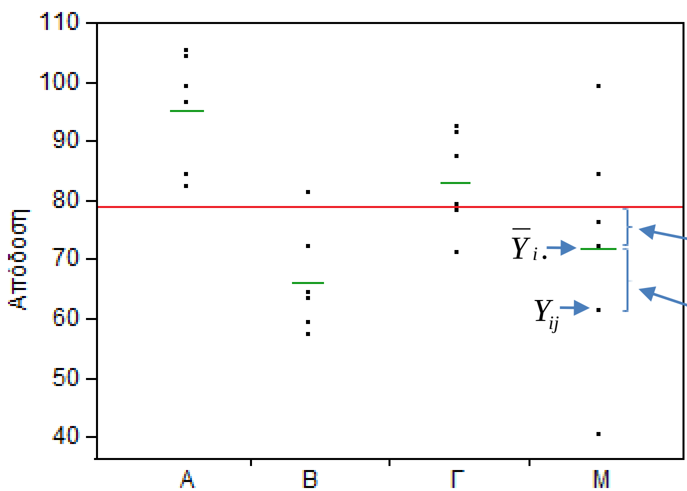
Y_{ij} = j-στή παρατήρηση της i-στής επέμβασης

μ = ο μέσος όρος του πληθυσμού

τ_i = η επίδραση της i-στής επέμβασης

ε_{ij} = τυχαίο σφάλμα

Κατάτμηση Αθροίσματος Τετραγώνων



$$Y_{ij} = \mu + \tau_\iota + \varepsilon_{ij}$$

$\overline{Y}_{..}$ εκτιμά μ

$\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$ » τ_ι

$Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}$ » ε_{ij}

οπότε:

$$Y_{ij} = \overline{Y}_{..} + \left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right) + \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)$$

$$Y_{ij} - \overline{Y}_{..} = \left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right) + \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την πιο πάνω ταυτότητα για κάθε παρατήρηση και αθροίσουμε όλες τις παρατηρήσεις:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\cancelto{0}{\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)}$$

ή απλούστερα:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2$$

ΑΤ ολικό = ΑΤ επεμβάσεων + ΑΤ σφάλματος

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας για το Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**ΘΣΜΤ[1]**	**ΘΣΜΤ[2]**
Επεμβάσεις	a – 1	$AT\varepsilon = n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2$	$\frac{AT\varepsilon}{(\alpha - 1)}$	$\frac{MT\varepsilon}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$
Υπόλοιπο	a (n – 1)	$AT\upsilon = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2$	$\frac{AT\upsilon}{\alpha(n-1)}$		σ_e^2	σ_e^2
Σύνολο	an – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2$				

Θεωρητική σύσταση μέσου τετραγώνου: [1] Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων, [2] Μοντέλο σταθερών επιδράσεων

Ανάλυση μοντέλου σταθερών επιδράσεων (Fixed-effects model)

Αν ο ερευνητής επιλέγει να χρησιμοποιήσει στο πείραμα του κάποια συγκεκριμένα επίπεδα-επεμβάσεις και τα συμπεράσματα του πειράματος αφορούν μόνο τα προκαθορισμένα αυτά επίπεδα-επεμβάσεις, τότε το μοντέλο είναι σταθερών επιδράσεων ($\Sigma\tau_i = 0$).

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_i \quad \text{και} \quad H_1: \tau_1 \neq \tau_2 \neq \ldots \neq \tau_i$$

Ανάλυση μοντέλου τυχαίων επιδράσεων (Random-effects model)

Αν τα επίπεδα της επέμβασης είναι ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από ένα πληθυσμό με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ_τ^2 και τα συμπεράσματα του πειράματος έχουν ως στόχο να επεκταθούν στον πληθυσμό των επιπέδων τότε το μοντέλο είναι τυχαίων επιδράσεων ($\Sigma\tau_i \neq 0$).

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0 \quad \text{και} \quad H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

Ο έλεγχος των υποθέσεων:

Μηδενική υπόθεση **H_0:** $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Εναλλακτική υπόθεση **H_1:** $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

H_0: όλοι οι μέσοι όροι είναι όμοιοι

H_1: τουλάχιστον ένας μέσος όρος διαφέρει από τους υπόλοιπους

Δοκιμασία ή κριτήριο του *F*

Είναι μία γενική δοκιμασία, μονόπλευρη και ελέγχει την μηδενική υπόθεση H_0.

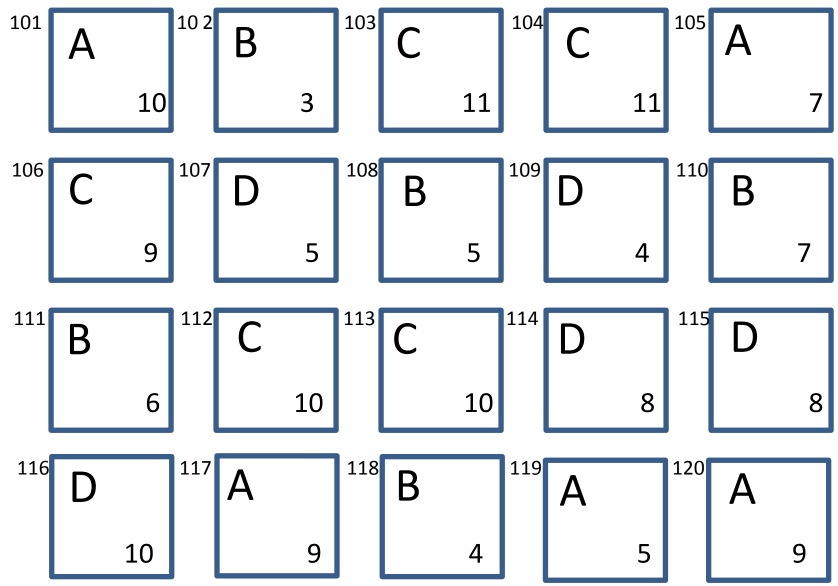
$$F = \frac{\sigma_e^{\,2} + n\sigma_\tau^2}{\sigma_e^{\,2}} = \frac{\mathrm{MT}\,\varepsilon\pi\varepsilon\mu\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\mathrm{MT}\,\upsilon\pi o\lambda o\acute{\iota}\pi o\upsilon}$$

Παράδειγμα : Τυχαιοποίηση τεσσάρων επεμβάσεων με πέντε επαναλήψεις σε ΕΤΣ

```
> library(agricolae)
> trt=letters[1:4]
> design.crd(trt, 5, randomization=TRUE )
```

	plots	r	trt
1	101	1	a
2	102	1	b
3	103	1	c
4	104	2	c
5	105	2	a
6	106	3	c
7	107	1	d
8	108	2	b
9	109	2	d
10	110	3	b
11	111	4	b
12	112	4	c
13	113	5	c
14	114	3	d
15	115	4	d
16	116	5	d
17	117	3	a
18	118	5	b
19	119	4	a
20	120	5	a

Παράδειγμα : Πείραμα τεσσάρων επεμβάσεων με πέντε επαναλήψεις σε ΕΤΣ



Επέμβαση	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum_{i=1} Y_{ij}$	$\overline{Y}_{i.}$
Α.	10	7	9	5	9	40	8
Β.	3	5	7	6	4	25	5
Γ.	11	11	9	9	10	50	10
Δ.	5	4	8	8	10	35	7

$$Y_{..} = 150$$

$$\overline{Y}_{..} = 7{,}5$$

Η δοκιμασία Levene για έλεγχο ισότητας των διακυμάνσεων

Η δοκιμασία Levene βασίζεται στην 'ανάλυση διακύμανσης' των παρατηρήσεων μετά την μετατροπή τους με την έκφραση:

$$Z_{ij} = \left| Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} \right|$$

Υπολογίζουμε το κριτήριο W ως εξής:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{a} n\left(\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..}\right)^2 / (a-1)}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Z_{ij} - \overline{Z}_{i.}\right)^2 / (N-a)}$$

και συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή από τον πίνακα του F, για ΒΕ αριθμητή a – 1 και ΒΕ παρανομαστή N – a για α = 0,05.

Η δοκιμασία τροποποιείται αν αντί για τον μέσο $\bar{Y}_{i.}$ χρησιμοποιηθεί ο διάμεσος $\tilde{Y}_{i.}$ (δοκιμασία Brown-Forsythe).

Η δοκιμασία Levene για έλεγχο ισότητας των διακυμάνσεων

Επέμβαση	Y	$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}$	$Z_{ij} = \lvert Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} \rvert$
A	10	2	2
A	7	-1	1
A	9	1	1
A	5	-3	3
A	9	1	1
B	3	-2	2
B	5	0	0
B	7	2	2
B	6	1	1
B	4	-1	1
Γ	11	1	1
Γ	11	1	1
Γ	9	-1	1
Γ	9	-1	1
Γ	10	0	0
Δ	5	-2	2
Δ	4	-3	3
Δ	8	1	1
Δ	8	1	1
Δ	10	3	3

$$W = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..}\right)^2 /(4-1)}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Z_{ij} - \overline{Z}_{i.}\right)^2 /(20-4)} =$$

$$W = \frac{5*[\left(1,6-1,4\right)^2 + \left(1,2-1,4\right)^2 + \left(0,8-1,4\right)^2 + \left(2-1,4\right)^2]/3}{[\left(2-1,6\right)^2 + \ldots\ldots + \left(3-2\right)^2]/16} = \frac{5*0,8/3}{10,8/16} = 1,97$$

Επειδή η τιμή W = 1,97 είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή *F* του πίνακα για ΒΕ 3 αριθμητή 16 παρανομαστή (3,239), δεν απορρίπτουμε την H_0 και συμπεραίνουμε ότι οι διακυμάνσεις είναι ίσες.

```
> crd=read.table("E:\\Actuar\\crd.txt", header=T,  dec=",")
> attach(crd)
> Tr=factor(Tr)
> fit=aov(Y~Tr)
> library(car)
> leveneTest(fit, center = mean)

Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)
         Df   F value   Pr(>F)
group     3    1.9753   0.1584
     16

> leveneTest(fit, center = median) # Brown–Forsythe test

 Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
           Df   F value    Pr(>F)
group       3    0.5024    0.686
      16
```

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov (Lilliefors)

Ο έλεγχος K–S συγκρίνει την εμπειρική συνάρτηση κατανομής (EDF) με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και προϋποθέτει η μηδενική κατανομή να είναι πλήρως προσδιορισμένη με γνωστές παραμέτρους .

Το κριτήριο του ελέγχου K-S υπολογίζεται ως εξής:

$$D_n = \sup_x \left| F_n(x) - F_n(x) \right|$$

όπου:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\iota=1}^{n} \mathrm{I}_{\mathrm{X}i \le x}$$

Μία τροποποίηση του ελέγχου K-S είναι ο **έλεγχος Lilliefors** που χρησιμοποιείται όταν οι παράμετροι της μηδενικής κατανομής πρέπει να εκτιμηθούν από τα δεδομένα του δείγματος.

Αρχικά υπολογίζονται τα υπόλοιπα ε_{ij} των παρατηρήσεων τα οποία κατατάσσονται σε κλάσεις συχνοτήτων κατά ανιούσα σειρά και υπολογίζονται για κάθε κλάση οι συχνότητες, οι αθροιστικές συχνότητες και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες.

Υπολογίζουμε τις κανονικές μεταβλητές z που αντιστοιχούν στα ανώτερα όρια κάθε κλάσης υπολοίπων (μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση των υπολοίπων) και υπολογίζουμε το ποσοστό ενός κανονικού πληθυσμού που αναμένεται να είναι μικρότερο.

Υπολογίζεται η απόλυτη τιμή της διαφοράς F(z) – Αθροιστική σχετική συχνότητα. Η μεγαλύτερη τιμή είναι η στατιστική της δοκιμασίας Kolmogorov-Smirnov και ελέγχεται με την κρίσιμη τιμή $D_{n,a}$ του πίνακα Kolmogorov-Smirnov.

Κλάσεις		**Συχνότητα**	**Αθροιστική Συχνότητα**	**Αθροιστική Σχετική Συχνότητα**	**z**	**F(z)**	**|ΑΣΣ - F(z)|**
-3	-2	2	2	0,10	-1,19*	0,118	0,018
-2	-1	2	4	0,20	-0,59	0,276	0,076
-1	0	4	8	0,40	0,00	0,500	0,100
0	1	2	10	0,50	0,59	0,723	0,223
1	2	7	17	0,85	1,19	0,882	0,032
2	3	2	19	0,95	1,78	0,962	0,012
3	4	1	20	1,00	2,37	0,991	-0,009

*(μ = 0 και s = 1,685) $z = \frac{-2-0}{1,685} \approx -1,19$

Επειδή η τιμή $_{max}$|ΑΣΣ - F(z)|= 0,223 είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή $D_{n,a}$ του πίνακα K-S για n = 20 και α = 0,05 (0,294), συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα ακολουθούν κανονική κατανομή.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> residuals=residuals(fit)
> ks.test(residuals, "pnorm", mean(residuals), sd(residuals))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  residuals
D = 0.22347,  p-value = 0.2707
alternative hypothesis: two-sided

> library(nortest)
> lillie.test(residuals)

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  residuals
D = 0.22347, p-value = 0.01003
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Επέμβαση	Y_{ij}	$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}$	$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$	$Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$	$(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$	$(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$	$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$
A	10	2	0,5	2,50	4,00	0,25	6,25
A	7	-1	0,5	-0,50	1,00	0,25	0,25
A	9	1	0,5	1,50	1,00	0,25	2,25
A	5	-3	0,5	-2,50	9,00	0,25	6,25
A	9	1	0,5	1,50	1,00	0,25	2,25
B	3	-2	-2,5	-4,50	4,00	6,25	20,25
B	5	0	-2,5	-2,50	0,00	6,25	6,25
B	7	2	-2,5	-0,50	4,00	6,25	0,25
B	6	1	-2,5	-1,50	1,00	6,25	2,25
B	4	-1	-2,5	-3,50	1,00	6,25	12,25
Γ	11	1	2,5	3,50	1,00	6,25	12,25
Γ	11	1	2,5	3,50	1,00	6,25	12,25
Γ	9	-1	2,5	1,50	1,00	6,25	2,25
Γ	9	-1	2,5	1,50	1,00	6,25	2,25
Γ	10	0	2,5	2,50	0,00	6,25	6,25
Δ	5	-2	-0,5	-2,50	4,00	0,25	6,25
Δ	4	-3	-0,5	-3,50	9,00	0,25	12,25
Δ	8	1	-0,5	0,50	1,00	0,25	0,25
Δ	8	1	-0,5	0,50	1,00	0,25	0,25
Δ	10	3	-0,5	2,50	9,00	0,25	6,25
Σύνολο	150	0	0	0	54	65	119

$\bar{Y}_{1.} = 8$

$\bar{Y}_{2.} = 5$

$\bar{Y}_{3.} = 10$

$\bar{Y}_{4.} = 7$

$\bar{Y}_{..} = 7{,}5$

Το συνολικό άθροισμα τετραγώνων υπολογίζεται ως εξής:

$$AT_{συνόλου} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - [\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}]^2 / an$$

Ο διορθωτικός όρος: $$\Delta O = [\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}]^2 / an = \frac{Y_{..}^{\ 2}}{an} = \frac{150^2}{4*5} = 1125$$

$$AT_{συνόλου} = 10^2 + 7^2 + \ldots + 8^2 + 10^2 - 1125 = 100 + 49 + \ldots. + 64 + 100 - 1125 = 119$$

Το άθροισμα τετραγώνων επεμβάσεων δίνεται ως εξής:

$$AT_{επεμβάσεων} = n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_i^{\ 2}}{n} - [\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}]^2 / an$$

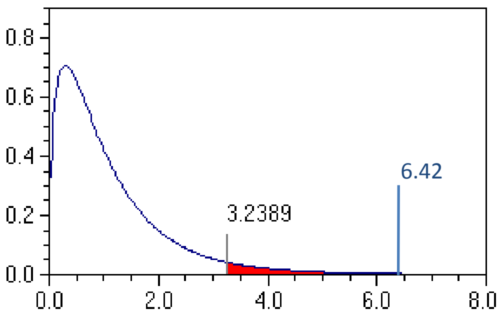
$$AT_{επεμβάσεων} = \frac{40^2}{5} + \ldots + \frac{35^2}{5} - 1125 = \frac{1600}{5} + \ldots + \frac{1225}{5} - 1125 = 65$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το ΕΤΣ

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**F πιν.**	**Prob > F**
Επεμβάσεις	4 – 1 = 3	65,00	21,66	6,42	3,24	0,0046*
Υπόλοιπο	4(5 – 1) = 16	54,00	3,37			
Σύνολο	4*5 – 1 = 19	119,00				

Η κρίσιμη τιμή του F πίνακα για ΒΕ αριθμητή (3) και ΒΕ παρανομαστή (16) και α = 0,05 είναι 3,24. Επειδή η τιμή F πειράματος (6,42) είναι έξω από την περιοχή αποδοχής της H_0, οι επεμβάσεις διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους.



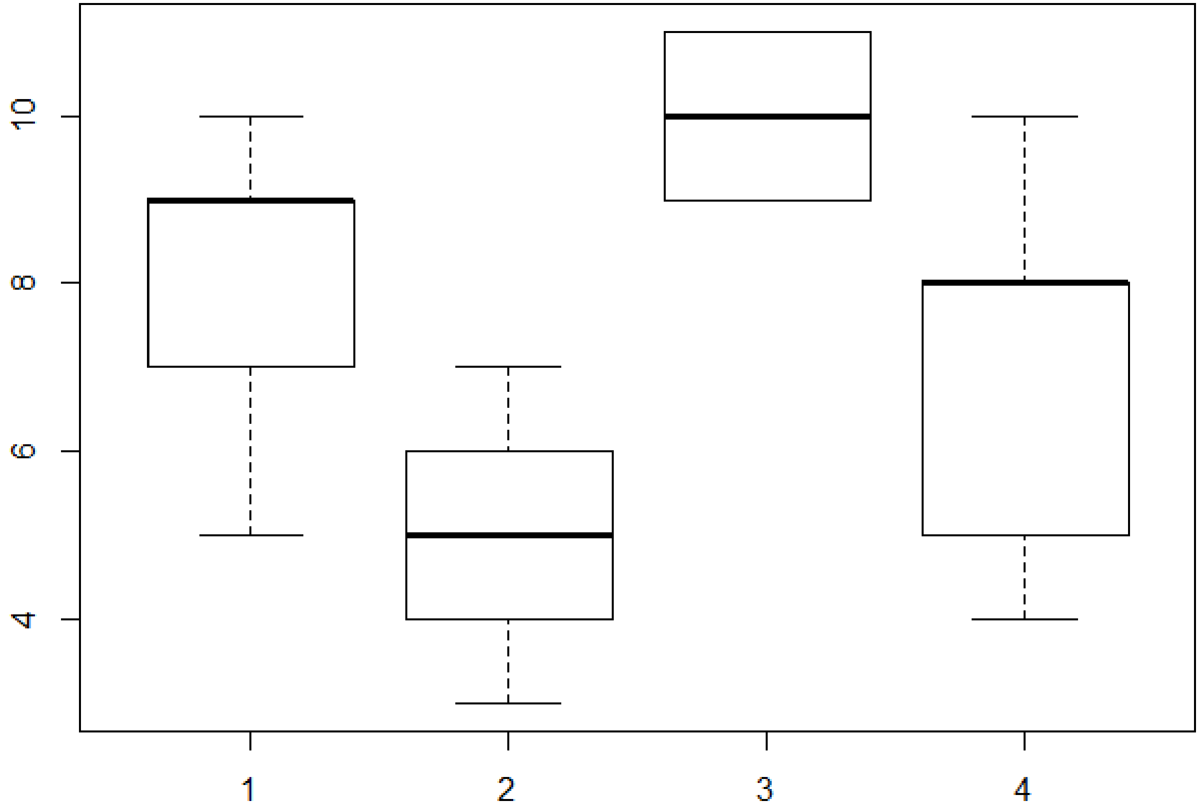
Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> summary(fit)

            Df  Sum Sq  Mean Sq  F value  Pr(>F)
Tr           3     65    21.667     6.42  0.00463 **
Residuals   16     54     3.375
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

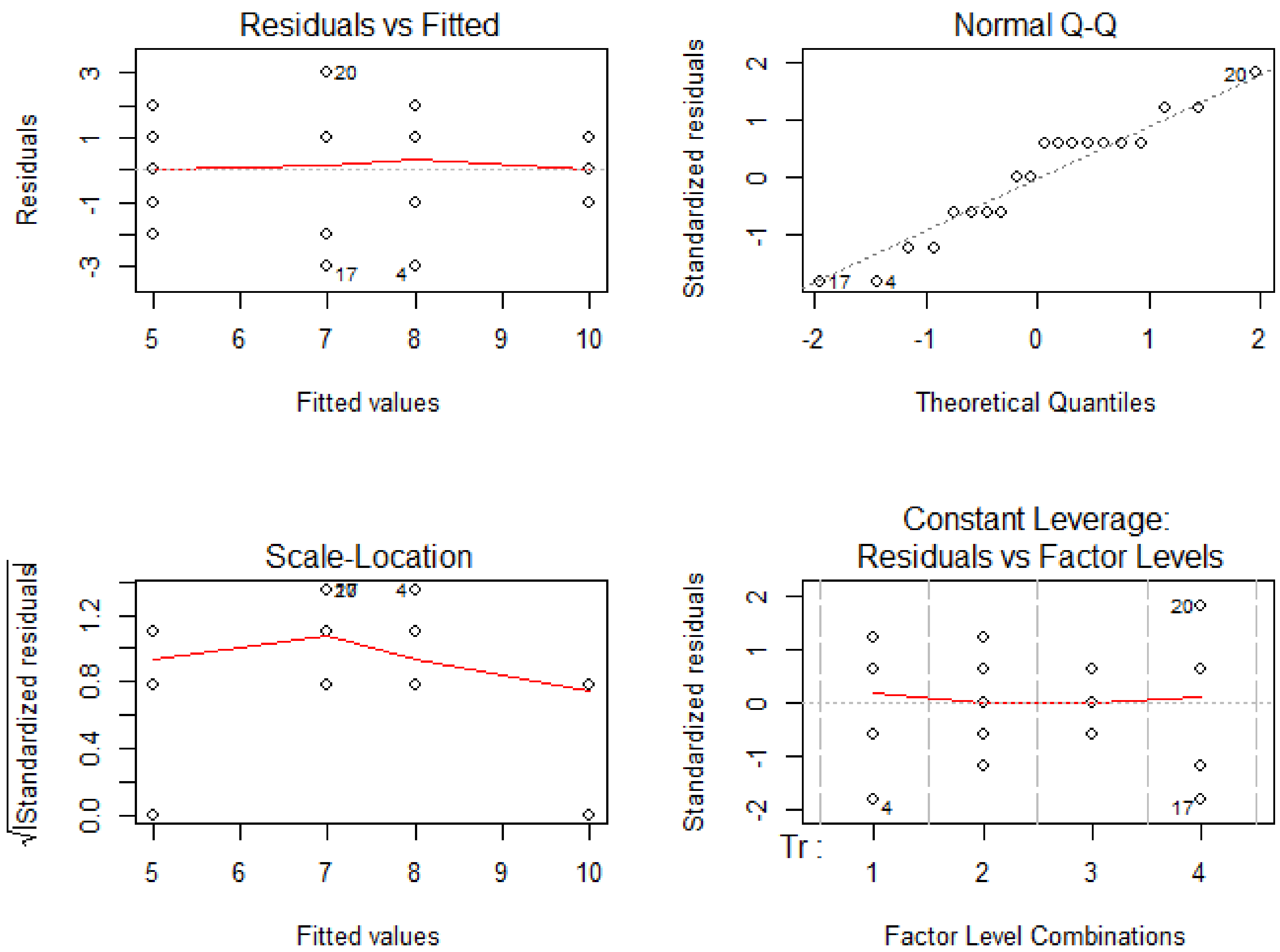
Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> boxplot(Y~Tr)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(fit)
```



Κατηγορίες πολλαπλών συγκρίσεων

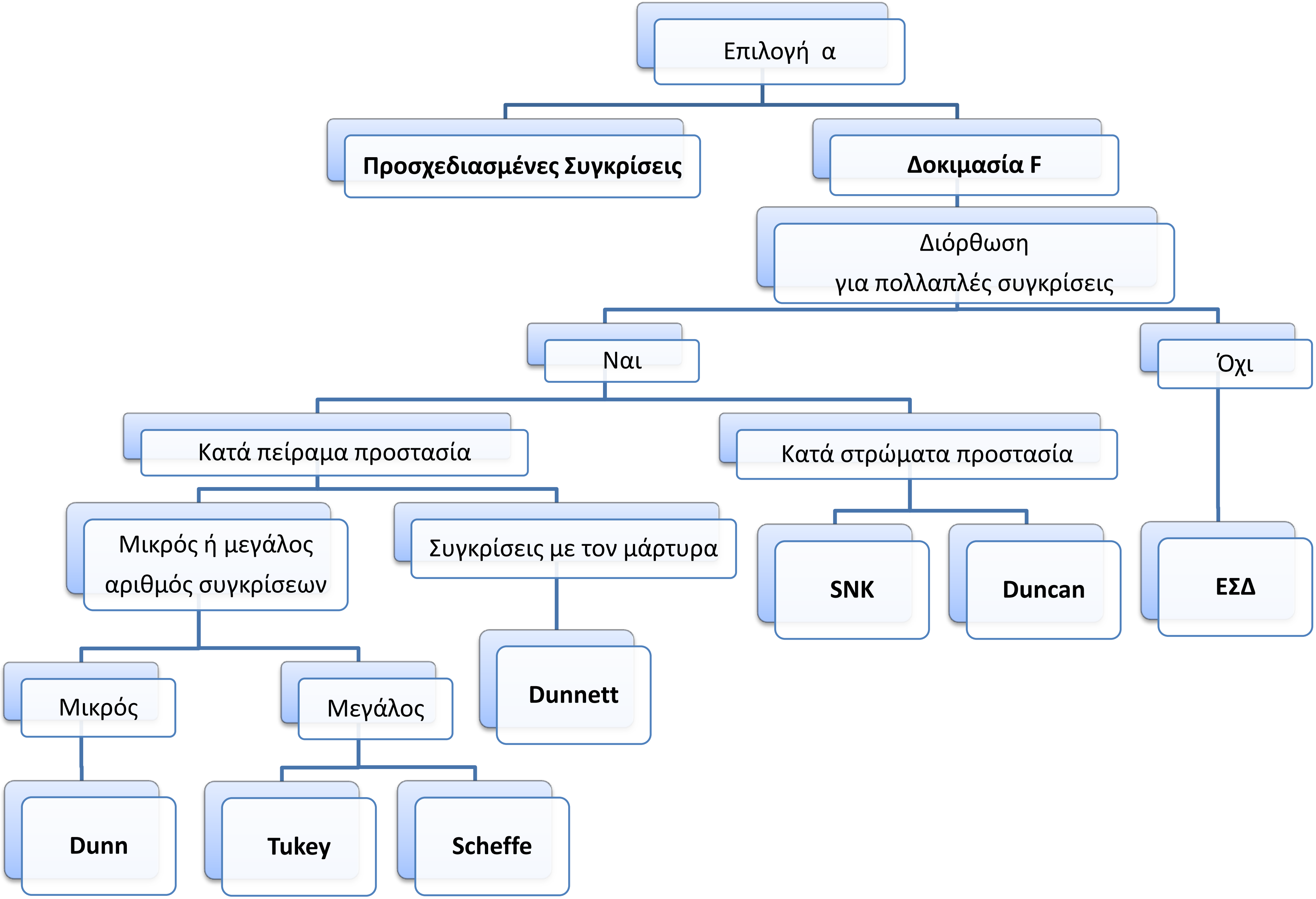
Προσχεδιασμένες συγκρίσεις (a priori)

Οι προσχεδιασμένες συγκρίσεις καθορίζονται πριν την έναρξη του πειράματος και γίνονται αντί της δοκιμασίας F. Χρησιμοποιούνται ορθογώνιες συγκρίσεις για ομάδες επεμβάσεων ή πραγματοποιείται ένας περιορισμένος αριθμός προσχεδιασμένων συγκρίσεων μέσων.

Εκ των υστέρων συγκρίσεις (a posteriori)

Πραγματοποιούνται μετά τη γενική δοκιμασία της σημαντικότητας **F** και αν είναι στατιστικά σημαντική, τότε είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί μία από τις κατάλληλες δοκιμές σύγκρισης μέσων.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί



Δοκιμασία Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς (Fisher's protected LSD)

Για να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της ΕΣΔ πρέπει να απορριφθεί η γενική μηδενική υπόθεση με τη δοκιμασία F. Η δοκιμασία ΕΣΔ δεν ελέγχει τον κατά πείραμα βαθμό σφάλματος.

Αρχικά υπολογίζεται η κρίσιμη περιοχή – ελάχιστη σημαντική διαφορά και συγκρίνεται με τις διαφορές των μέσων όρων των επεμβάσεων ανά ζεύγη. Αν η διαφορά είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη περιοχή τότε οι μέσοι όροι των επεμβάσεων διαφέρουν.

$$\mathrm{E\Sigma\Delta} = t_{[a,a(n-1)]}\sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}}$$

Δοκιμασία Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς

$$\text{ΕΣΔ} = t_{[a,a(n-1)]} * \sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}} = 2{,}11 * \sqrt{\frac{2(3{,}37)}{5}} = 2{,}46$$

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	bc
Β	5	c

10 – 5 = 5 σημαντική

10 – 7 = 3 σημαντική

10 – 8 = 2 μη σημαντική

8 – 5 = 3 σημαντική

8 – 7 = 1 μη σημαντική

7 – 5 = 2 μη σημαντική

```
> library(agricolae)
> LSD.test(fit, "Tr", console=TRUE)
```

Study:
LSD t Test for Y
Mean Square Error: 3.375
Tr, means and individual (95 %) CI

	Y	std.err	r	LCL	UCL	Min.	Max.
1	8	0.8215838	5	6.25832	9.74168	5	10
2	5	0.8215838	5	3.25832	6.74168	3	7
3	10	0.8215838	5	8.25832	11.74168	9	11
4	7	0.8215838	5	5.25832	8.74168	4	10

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Value of t: 2.119905
Least Significant Difference 2.463107

Means with the same letter are not significantly different.
Groups, Treatments and means

a	3	10
ab	1	8
bc	4	7
c	2	5

Δοκιμή του Duncan (Multiple-Range)

Η μέθοδος Duncan βασίζεται σε μία ομάδα κρίσιμων περιοχών των οποίων η τιμή τους εξαρτάται από τον αριθμό των μέσων που συγκρίνονται. Το επίπεδο σημαντικότητας για κάθε σύγκριση δεν είναι σταθερό αλλά διαφέρει ανάλογα με την κατάταξη και την απόσταση των μέσων όρων που συγκρίνονται. Όταν p = 2 δεν γίνεται καμία διόρθωση και η διαφορά των μέσων αξιολογείται με βάση μία μη διορθωμένη κρίσιμη τιμή.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{E\Sigma\Pi} = \left(\text{τιμή R}\right) * (s_{\bar{x}}) = \left(\text{τιμή R}\right) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}}$$

Η τιμή R υπολογίζεται από τον Πίνακα Duncan με βάση την απόσταση των μέσων όρων στις συγκρίσεις.

Δοκιμασία Duncan

$$\text{ΕΣΠ} = (s_{\bar{x}})\text{x}\left(\text{τιμή R}\right) = \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}} * \left(\text{τιμή R}\right)$$

Τιμή του p	2	3	4
Κρίσιμες τιμές R	2,998	3,144	3,235
Ελάχιστη Σημαντική Περιοχή	2,46	2,57	2,65

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	bc
Β	5	c

10 – 5 = 5 σημαντική (p = 4)

10 – 7 = 3 σημαντική (p = 3)

10 – 8 = 2 μη σημαντική (p = 2)

8 – 5 = 3 σημαντική (p = 3)

8 – 7 = 1 μη σημαντική (p = 2)

7 – 5 = 2 μη σημαντική (p = 2)

```
> duncan.test(fit, "Tr", console=TRUE)

Study:
Duncan's new multiple range test
for Y
Mean Square Error:  3.375

Tr,  means
    Y    std.err  r  Min. Max.
1   8  0.8215838  5   5   10
2   5  0.8215838  5   3    7
3  10  0.8215838  5   9   11
4   7  0.8215838  5   4   10

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Range
       2        3        4
2.463107 2.582897 2.657778

Means with the same letter are not significantly different.
Groups, Treatments and means
a     3   10
ab    1    8
 bc   4    7
  c   2    5
```

Δοκιμασία Student – Newman – Keul (SNK)

Η δοκιμασία SNK είναι πιο συντηρητική από την Duncan και διατηρεί το επίπεδο σημαντικότητας το πολύ στο επίπεδο *α* για κάθε σύγκριση. Όταν p = 2 δεν γίνεται καμία διόρθωση και η διαφορά των μέσων αξιολογείται με βάση μία μη διορθωμένη κρίσιμη τιμή, όταν p > 2 χρησιμοποιείται μία διόρθωση που γίνεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε ο βαθμός σφάλματος κατά σύγκριση ακόμα και στην περίπτωση των δύο ακραίων μέσων να είναι α.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$Wp = q_a(p, n_2) * s_{\bar{x}} = q_a(p, n_2) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}}$$

Το q_α υπολογίζεται από τον Πίνακα Q Tukey (Studentized Range Distribution).

Δοκιμασία Student – Newman – Keul (SNK)

$$Wp = q_a(p, n_2) * s_{\bar{x}} = q_a(p, n_2) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}}$$

Τιμή του p	2	3	4
$q_a(p,n_2)$	2,99	3,65	4,05
Wp	2,46	2,99	3,32

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	bc
Β	5	c

10 – 5 = 5 σημαντική (p = 4)

10 – 7 = 3 σημαντική (p = 3)

10 – 8= 2 μη σημαντική (p = 2)

8 – 5 = 5 σημαντική (p = 3)

8 – 7 = 1 μη σημαντική (p = 2)

7 – 5 = 2 μη σημαντική (p = 2)

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> SNK.test(fit, "Tr", console=TRUE)

Study:
Student Newman Keuls Test
for Y
Mean Square Error:  3.375

Tr,  means
   Y   std.err   r  Min. Max.
1   8  0.8215838  5   5   10
2   5  0.8215838  5   3    7
3  10  0.8215838  5   9   11
4   7  0.8215838  5   4   10

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Range
       2        3        4
2.463107 2.998074 3.324205

Means with the same letter are not significantly different.
Groups, Treatments and means
a      3    10
ab     1     8
 bc    4     7
  c    2     5
```

Δοκιμασία Tukey ή Έντιμης Σημαντικής Διαφοράς

Η δοκιμασία Tukey υπολογίζει μια νέα κρίσιμη τιμή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθεί εάν οι διαφορές μεταξύ οποιωνδήποτε δύο ζευγών μέσων όρων είναι σημαντικές. Η πιθανότητα να υποπέσουμε σε σφάλμα τύπου Ι χρησιμοποιώντας της μέθοδο αυτή είναι α.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$w = q_a(p_{\max}, v) * s_{\bar{x}} = q_a(p_{\max}, v) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}}$$

Το q_α υπολογίζεται από τον Πίνακα Q Tukey (Studentized Range Distribution).

Δοκιμασία Tukey

Από τον Πίνακα των κρίσιμων τιμών της στατιστικής q του Tukey, για α = 0,05, p = 4 και ν = $BE_{υπ}$ = 16, έχουμε q = 4,04

$$w = q_a(p_{\max}, v) * s_{\bar{x}} = q_a(p_{\max}, v) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}} = 4{,}04 * \sqrt{\frac{3{,}37}{5}} = 3{,}32$$

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	ab
Β	5	b

10 – 5 = 5 σημαντική

10 – 7 = 3 μη σημαντική

10 – 8= 2 μη σημαντική

8 – 5 = 3 μη σημαντική

8 – 7 = 1 μη σημαντική

7 – 5 = 2 μη σημαντική

```
> HSD.test(fit, "Tr", console=TRUE)

Study:
HSD Test for Y
Mean Square Error:  3.375

Tr,  means
     Y    std.err  r  Min. Max.
1    8  0.8215838  5    5   10
2    5  0.8215838  5    3    7
3   10  0.8215838  5    9   11
4    7  0.8215838  5    4   10

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Value of Studentized Range: 4.046093
Honestly Significant Difference: 3.324205

Means with the same letter are not significantly different.
Groups, Treatments and means
a     3    10
ab    1     8
ab    4     7
 b    2     5
```

Δοκιμασία Scheffe

Η δοκιμασία Scheffe υπολογίζει μια νέα κρίσιμη τιμή πιο συντηρητική από την Tukey. Τροποποιεί την κρίσιμη τιμή F λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των συγκρινόμενων επεμβάσεων (a -1)F_{crit}. Η δοκιμασία ελέγχει το σφάλμα κατά πείραμα.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Κρίσιμη Περιοχή} = \sqrt{(a-1) * F_{[(a-1),a(n-1)]}} * \sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}}$$

Δοκιμασία Scheffe

$$\text{Κρίσιμη Περιοχή} = \sqrt{(a-1) * F_{[(a-1),a(n-1)]}} * \sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}} = \sqrt{(4-1) * 3{,}24} * \sqrt{2 * \frac{3{,}37}{5}} = 3{,}61$$

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	ab
Β	5	b

10 – 5 = 5 σημαντική

10 – 7 = 3 μη σημαντική

10 – 8= 2 μη σημαντική

8 – 5 = 3 μη σημαντική

8 – 7 = 1 μη σημαντική

7 – 5 = 2 μη σημαντική

```
> scheffe.test(fit, "Tr", console=TRUE)

Study:
Scheffe Test for Y
Mean Square Error  : 3.375

Tr,  means
      Y    std.err   r Min. Max.
1     8  0.8215838   5    5   10
2     5  0.8215838   5    3    7
3    10  0.8215838   5    9   11
4     7  0.8215838   5    4   10

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Value of F: 3.238872
Minimum Significant Difference: 3.621799

Means with the same letter are not significantly different.
Groups, Treatments and means
a     3     10
ab    1      8
ab    4      7
 b    2      5
```

Δοκιμασία Dunnett (σύγκριση με το μάρτυρα)

Η δοκιμασία Dunnet χρησιμοποιείται μόνο εάν γίνεται μια σειρά συγκρίσεων σε μία συγκεκριμένη επέμβαση, όπως για παράδειγμα την επέμβαση – μάρτυρα. Η δοκιμασία λαμβάνει υπόψη το σφάλμα τύπου Ι κατά πείραμα.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{d} = q'^{*}\sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}}$$

Το q’ υπολογίζεται από τον Πίνακα q’ Dunnett.

Δοκιμασία Dunnett (σύγκριση με το μάρτυρα)

Από τον Πίνακα των κρίσιμων τιμών της στατιστικής q’ του Dunnett , για α = 0,05, a = 4 και ν = $BE_{υπ}$ = 16, έχουμε d = 2,59

$$\mathrm{d} = d * \sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}} = 2{,}59 * \sqrt{\frac{2 * 3{,}37}{5}} = 3{,}005$$

Επέμβαση	Μ.Ο.	
Γ	10	ns
Α (μάρτυρας)	8	-
Δ	7	ns
Β	5	ns *

8 – 10 = - 2 μη σημαντική

8 – 7 = 1 μη σημαντική

8 – 5 = 3 μη σημαντική (* <u>p-value = 0,0510</u>)

```
> library(multcomp)
> summary(glht(fit, linfct=mcp(Tr="Dunnett")))

Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: Dunnett Contrasts


Fit: aov(formula = Y ~ Tr)

Linear Hypotheses:
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
2 - 1 == 0   -3.000     1.162  -2.582   0.0507 .
3 - 1 == 0    2.000     1.162   1.721   0.2395
4 - 1 == 0   -1.000     1.162  -0.861   0.7264
---
  Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Δοκιμασία Bonferroni

Η δοκιμασία Bonferroni υπολογίζει ένα νέο α κατά σύγκριση με σκοπό να διατηρήσει το σφάλμα κατά πείραμα σταθερό στο 0,05. Αν a ο αριθμός των επεμβάσεων, υπάρχουν k = (a)*(a-1)/2 πιθανά ζεύγη επεμβάσεων και η κάθε σύγκριση μεταξύ δύο μέσων όρων γίνεται στο επίπεδο α/κ.

Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$\left|\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\right| > t_{[a/2k, BE\upsilon]}\sqrt{\frac{2s_p^2}{n}}$$

Δοκιμασία Bonferroni

$$k = a*(a-1)/2 = 4*3/2 = 6 \qquad a/k = 0,05/6 = 0,0083 \qquad t_{[0.0083,16]} = 3,008$$

$$\text{ΕΣΔ} = t_{[a/2k, BE\upsilon]} * \sqrt{\frac{2MT\upsilon}{n}} = 3,008 * \sqrt{\frac{2(3,37)}{5}} = 3,49$$

Επέμβαση	**Μ.Ο.**	
Γ	10	a
Α	8	ab
Δ	7	ab
Β	5	b

10 – 5 = 5 σημαντική

10 – 7 = 3 μη σημαντική

10 – 8= 2 μη σημαντική

8 – 5 = 3 μη σημαντική

8 – 7 = 1 μη σημαντική

7 – 5 = 2 μη σημαντική

```
> LSD.test(fit, "Tr", p.adj=c("bonferroni"), console=TRUE)
```

Study: ets.aov ~ "Tr"

LSD t Test for Y
P value adjustment method: bonferroni

Mean Square Error: 3.375

Tr, means and individual (95 %) CI

	Y	std	r	LCL	UCL	Min	Max
1	8	2.000000	5	6.25832	9.74168	5	10
2	5	1.581139	5	3.25832	6.74168	3	7
3	10	1.000000	5	8.25832	11.74168	9	11
4	7	2.449490	5	5.25832	8.74168	4	10

Alpha: 0.05 ; DF Error: 16
Critical Value of t: 3.008334

Minimum Significant Difference: 3.495368

Treatments with the same letter are not significantly different.

	Y	groups
3	10	a
1	8	ab
4	7	ab
2	5	b

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΝ

Παράδειγμα: Τέσσερις επεμβάσεις, πέντε επαναλήψεων σε ΕΤΣ ($BE_{υπ}$ = 16)

	p		
Δοκιμασία	2	3	4
L.S.D.	2,46	2,46	2,46
Duncan	2,46	2,57	2,65
Student - Newman - Keul	2,46	2,99	3,32
Tukey	3,32	3,32	3,32
Scheffe	3,61	3,61	3,61

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΝ

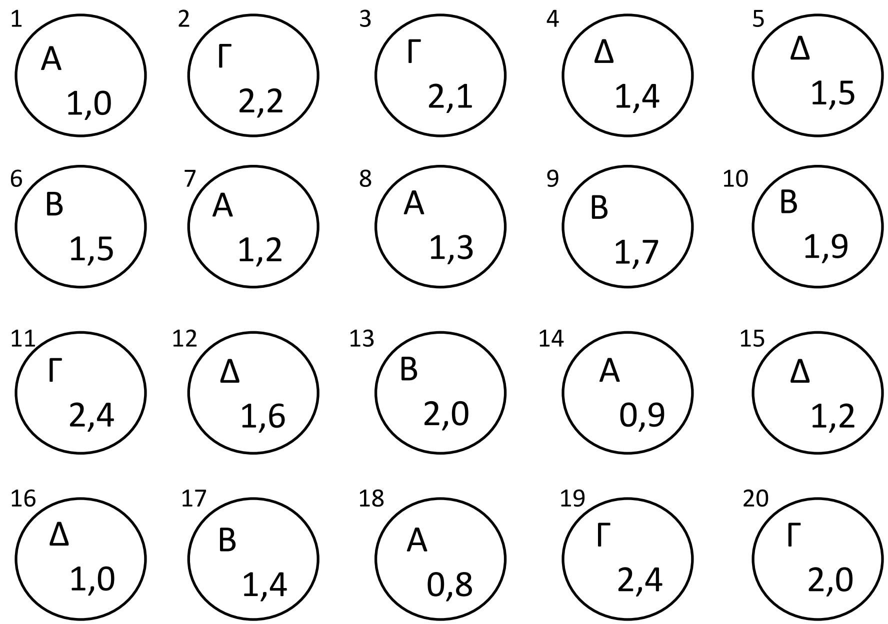
Παράδειγμα: a = 10, n = 13, α = 0,05 και $BE_{υπ}$ = 120

	p								
Μέθοδος	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΕΣΔ	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98
Duncan	1,98	2,09	2,15	2,21	2,24	2,28	2,30	2,33	2,34
SNK	1,98	2,38	2,60	2,77	2,90	3,00	3,08	3,16	3,22
Tukey	3,22	3,22	3,22	3,22	3,22	3,22	3,22	3,22	3,22
Scheffe	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο με άνισο αριθμό παρατηρήσεων

Πηγή παρ/τητας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**ΘΣΜΤ**
Επεμβάσεις	a – 1	$AT\varepsilon = n_i \sum_{i=1}^{a} \left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2$	$MT\varepsilon = \dfrac{AT\alpha}{(\alpha - 1)}$	$\dfrac{MT\varepsilon}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + n\sum_{i=1}^{a} n_i t_i^2 /(a-1)$
Υπόλοιπο	N – a	$AT\upsilon = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{ni}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2$	$MT\upsilon = \dfrac{AT\upsilon}{N-a}$		σ_e^2
Σύνολο	N – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2$			

Άσκηση 1. Τα δεδομένα αναφέρονται σε πείραμα αξιολόγησης τεσσάρων συγκεντρώσεων ορμόνης α-NAA (Α - 0ppm, Β - 50ppm, Γ - 100ppm & Δ - 200ppm), σε θάλαμο σταθερών συνθηκών, με πέντε επαναλήψεις σύμφωνα με ΕΤΣ. Ελέγξετε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επεμβάσεων.



Άσκηση 2. Μετρήθηκε η περιεκτικότητα σε λάδι σε τέσσερα υβρίδια ηλίανθου. Ελέγξτε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Υβρίδια	1	2	3	4	5	6	7
6107	38,5	33,6	41,2	46,4	46,0	48,7	29,1
6112	49,2	46,6	40,7	48,6	43,6	46,2	49,4
6114	41,5	42,3	44,9	47,1	45,4	42,8	51,4
6097	47,2	44,2	46,8	39,4	44,0	47,1	43,2

Άσκηση 3. Μετρήθηκε η επίδραση πέντε συγκεντρώσεων μυκητοκτόνου στην ανάπτυξη του μυκηλίου. Ελέγξτε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Συγκέντρωση	1	2	3	4	5
0	0,33	0,42	0,24	0,35	0,29
1	0,28	0,24	0,20	0,25	0,17
5	0,12	0,08	0,14	0,09	0,11
10	0,05	0,04	0,08	0,07	0,08
15	0,00	0,02	0,01	0,03	0,02