



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Ανάλυση διακύμανσης με υποδειγματοληψία

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2017

### Ανάλυση διακύμανσης με υποδειγματοληψία

Σε πολλά πειράματα οι παρατηρήσεις που λαμβάνουμε ανά πειραματική μονάδα μπορούν να είναι περισσότερες από μία. Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το μέγεθος του σφάλματος στα διάφορα στάδια του πειράματος. Οι μονάδες από τις οποίες λαμβάνονται οι παρατηρήσεις αυτές, ονομάζονται δειγματοληπτικές μονάδες.

Έχουμε δύο πηγές παραλλακτικότητας.

α. Η παραλλακτικότητα μεταξύ των πειραματικών μονάδων που δέχθηκαν την ίδια επέμβαση, η οποία ονομάζεται **Πειραματικό σφάλμα**.

β. Η παραλλακτικότητα μεταξύ των δειγματοληπτικών μονάδων που δέχθηκαν την ίδια επέμβαση, η οποία ονομάζεται **Δειγματοληπτικό σφάλμα**.

## Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο με υποδειγματοληψία

Το Γραμμικό Πρότυπο

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

όπου

$Y_{ijk}$  = το k δείγμα της j παρατήρησης της i επέμβασης

$\mu$  = ο μέσος όρος του πληθυσμού

$\tau_i$  = η επίδραση της i-στής επέμβασης

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  το πειραματικό σφάλμα

$\delta_{ijk} \sim N(0, \sigma_\delta^2)$  το δειγματοληπτικό σφάλμα

## Κατάτμηση Αθροίσματος Τετραγώνων

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

|                                 |        |                    |
|---------------------------------|--------|--------------------|
| $\bar{Y}_{...}$                 | εκτιμά | $\mu$              |
| $\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$ | »      | $\tau_i$           |
| $\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}$ | »      | $\varepsilon_{ij}$ |
| $Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$       | »      | $\delta_{ijk}$     |

οπότε: 
$$Y_{ijk} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{..} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την πιο πάνω ταυτότητα για κάθε παρατήρηση και αθροίσουμε όλες τις παρατηρήσεις:

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2 = ns \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + s \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$$

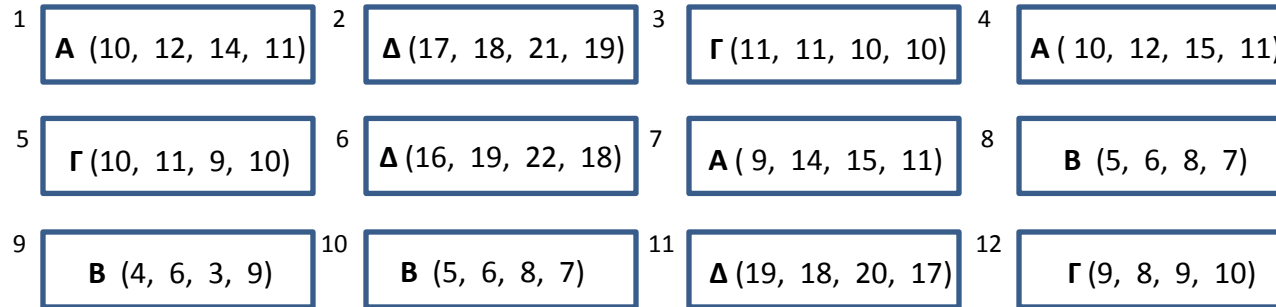
# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο με υποδειγματοληψία.

| Πηγή παρ/τητας         | ΒΕ      | ΑΤ  | ΜΤ  | F                           | ΘΣΜΤ*   |
|------------------------|---------|---|---|-----------------------------|---|
| Επεμβάσεις             | a-1     | $AT\varepsilon = ns \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$                 | $MT\varepsilon = \frac{AT\alpha}{(\alpha-1)}$ | $\frac{MT\varepsilon}{MTn}$ | $\sigma_s^2 + s\sigma_e^2 + ns \frac{\sum \tau_i^2}{a-1}$ |
| Πειραματικό σφάλμα     | a(n-1)  | $AT\pi.\sigma. = s \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2$     | $MTn = \frac{AT\pi\sigma}{\alpha(n-1)}$       | $\frac{MTn}{MTs}$           | $\sigma_s^2 + s\sigma_e^2$                                |
| Δειγματοληπτικό σφάλμα | an(s-1) | $AT\delta.\sigma. = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_k^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$ | $MTs = \frac{AT\delta\sigma}{\alpha n(s-1)}$  |                             | $\sigma_s^2$  |
| Σύνολο                 | ans-1   | $AT_\sigma = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_k^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$        |   |                             |   |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

**Παράδειγμα 1.** Πείραμα τεσσάρων επεμβάσεων με τρεις επαναλήψεις των τεσσάρων παρατηρήσεων σε ΕΤΣ.



| Επέμβαση | Επανάληψη 1 |    |    |    |                  | Επανάληψη 2 |    |    |    |                  | Επανάληψη 3 |    |    |    |                  | Y <sub>1..</sub> | Ȳ <sub>1..</sub> |
|----------|-------------|----|----|----|------------------|-------------|----|----|----|------------------|-------------|----|----|----|------------------|------------------|------------------|
|          | 1           | 2  | 3  | 4  | Y <sub>11.</sub> | 1           | 2  | 3  | 4  | Y <sub>12.</sub> | 1           | 2  | 3  | 4  | Y <sub>12.</sub> |                  |                  |
| A        | 10          | 12 | 14 | 11 | 47               | 10          | 12 | 15 | 11 | 48               | 9           | 14 | 15 | 11 | 49               | 144              | 12,0             |
| B        | 5           | 6  | 8  | 7  | 26               | 4           | 6  | 3  | 9  | 22               | 5           | 6  | 8  | 7  | 26               | 74               | 6,2              |
| Γ        | 11          | 11 | 10 | 10 | 42               | 10          | 11 | 9  | 10 | 40               | 9           | 8  | 9  | 10 | 36               | 118              | 9,8              |
| Δ        | 17          | 18 | 21 | 19 | 75               | 16          | 19 | 22 | 18 | 75               | 19          | 18 | 20 | 17 | 74               | 224              | 18,7             |

$$Y_{...} = 560 \quad \bar{Y}_{...} = 11,6$$

## Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

Το συνολικό άθροισμα τετραγώνων υπολογίζεται ως εξής:

$$AT_{\text{συνόλου}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s Y_{ijk}^2 - \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s Y_{ijk} \right]^2 / ans$$

Ο διορθωτικός όρος:  $\Delta O = \frac{Y_{...}^2}{ans} = \frac{500^2}{4 * 3 * 4} = 6533,33$

$$AT_{\text{συνόλου}} = 10^2 + 12^2 + \dots + 17^2 - 5208 = 100 + 144 + \dots + 289 - 6533,3 = 1114,6$$

Το άθροισμα τετραγώνων επεμβάσεων δίνεται ως εξής:

$$AT_{\text{επεμβάσεων}} = ns \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \frac{Y_{i..}^2}{ns} - \Delta O = \frac{144^2}{3 * 4} + \dots + \frac{224^2}{3 * 4} - 6533,3 = 992,7$$

## Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

Το άθροισμα τετραγώνων πειραματικών μονάδων υπολογίζεται ως εξής:

$$AT\pi.\mu. = \sum \frac{Y_{ij}^2}{s} - \Delta O = \left( \frac{47^2}{4} + \dots + \frac{74^2}{4} \right) - 5208 = 7534 - 6533,3 = 1000,7$$

Το άθροισμα τετραγώνων πειραματικού σφάλματος υπολογίζεται ως εξής:

$$AT\pi.\sigma. = AT\pi.\mu. - AT\varepsilon = 1000,7 - 992,7 = 8$$

Το άθροισμα τετραγώνων δειγματοληπτικού σφάλματος υπολογίζεται ως εξής:

$$AT\delta.\sigma. = AT\sigma - AT\pi.\mu. = 1114,7 - 1000,7 = 114$$



## Πειραματικοί Σχεδιασμοί

| Πηγή παρ/τητας         | BE             | AT      | MT      | F      | Prob > F |
|------------------------|----------------|---------|---------|--------|----------|
| Πειραματικές μονάδες   | $an - 1 = 11$  | 1000,7  |         |        |          |
| Επεμβάσεις             | $a - 1 = 3$    | 992,67  | 330,889 | 330,89 | <,0001   |
| Πειραματικό σφάλμα     | $a(n - 1) = 8$ | 8       | 1       | 0,32   |          |
| Δειγματοληπτικό σφάλμα | $an(s-1) = 36$ | 114     | 3,16    |        |          |
| Σύνολο                 | $ans-1 = 47$   | 1114,67 |         |        |          |

Η κρίσιμη τιμή του F πίνακα για BE αριθμητή (3) και BE παρανομαστή (8) και  $\alpha = 0,05$  είναι 4,06. Επειδή η τιμή F πειράματος = 330,89, είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή, οι επεμβάσεις διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους.

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

```
> attach(crd_subsampling)
> Tr=factor(Tr); R=factor(R); S=factor(S)
> fit=aov(Y~Tr+Error(Tr:R))
Warning message:
In aov(Y ~ Tr + Error(Tr:R)) : Error() model is singular
```

```
> summary(fit)
```

Error: Tr:R

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)    |
|-----------|----|--------|---------|---------|-----------|
| Tr        | 3  | 992.7  | 330.9   | 330.9   | 1e-08 *** |
| Residuals | 8  | 8.0    | 1.0     |         |           |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Error: Within

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F) |
|-----------|----|--------|---------|---------|--------|
| Residuals | 36 | 114    | 3.167   |         |        |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

```
> library(agricolae)
> LSD.test(Y, Tr, 8, 1, console = T)
```

Study: Y ~ Tr

LSD t Test for Y

Mean Square Error: 1

Tr, means and individual ( 95 %) CI

|   | Y         | std       | r  | LCL       | UCL       | Min | Max |
|---|-----------|-----------|----|-----------|-----------|-----|-----|
| 1 | 12.000000 | 2.0449494 | 12 | 11.334314 | 12.665686 | 9   | 15  |
| 2 | 6.166667  | 1.7494588 | 12 | 5.500981  | 6.832353  | 3   | 9   |
| 3 | 9.833333  | 0.9374369 | 12 | 9.167647  | 10.499019 | 8   | 11  |
| 4 | 18.666667 | 1.7232809 | 12 | 18.000981 | 19.332353 | 16  | 22  |

Alpha: 0.05 ; DF Error: 8

Critical Value of t: 2.306004

least Significant Difference: 0.9414222

Treatments with the same letter are not significantly different.

|   | Y         | groups |
|---|-----------|--------|
| 4 | 18.666667 | a      |
| 1 | 12.000000 | b      |
| 3 | 9.833333  | c      |
| 2 | 6.166667  | d      |

### Σχέδιο Τυχαιοποιημένων Πλήρων Ομάδων με Υποδειγματοληψία

Το Γραμμικό Πρότυπο

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

όπου

$Y_{ijk}$  = η παρατήρηση στο  $k$  δείγμα της  $j$  ομάδας της  $i$  επέμβασης

$\mu$  = ο μέσος όρος του πληθυσμού

$\tau_i$  = η επίδραση της  $i$  επέμβασης

$\beta_j$  = η επίδραση της  $j$  ομάδας

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  το πειραματικό σφάλμα

$\delta_{ijk} \sim N(0, \sigma_\delta^2)$  το δειγματοληπτικό σφάλμα

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το Σχέδιο Τυχαιοποιημένων Πλήρων Ομάδων με υποδειγματοληψία.

| Πηγή παρ/τητας         | ΒΕ           | ΑΤ  | ΜΤ               | F                                    | ΘΣΜΤ  |
|------------------------|--------------|---|------------------|--------------------------------------|---|
| Ομάδες                 | $b - 1$      | $AT_o = as \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...})^2$   | $MT_o\mu$        | $\frac{MT_o\mu}{MT\pi\sigma}$        | $\sigma_\delta^2 + s\sigma_\varepsilon^2 + as\sigma_b^2$      |
| Επεμβάσεις             | $a-1$        | $AT_\varepsilon = bs \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$  | $MT_\varepsilon$ | $\frac{MT_\varepsilon}{MT\pi\sigma}$ | $\sigma_\delta^2 + s\sigma_\varepsilon^2 + bs\sigma_\alpha^2$ |
| Πειραματικό σφάλμα     | $(a-1)(b-1)$ | $AT\pi\sigma = s \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$ | $MT\pi\sigma$    | $\frac{MT\pi\sigma}{MT\delta\sigma}$ | $\sigma_\delta^2 + s\sigma_\varepsilon^2$                     |
| Δειγματοληπτικό σφάλμα | $ab(s-1)$    | $AT\delta\sigma = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_k^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$                             | $MT\delta\sigma$ |                                      | $\sigma_\delta^2$   |
| Σύνολο                 | $abs-1$      | $AT_\sigma = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_k^s (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$                                  |                  |                                      |   |

## Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

**Παράδειγμα 2.** Το παράδειγμα 1 σε σχέδιο Τ.Π.Ο. με τρεις ομάδες των τεσσάρων παρατηρήσεων.

| Πηγή παρ/τητας         | ΒΕ | ΑΤ    | ΜΤ    | F       | Pr(>F) |
|------------------------|----|-------|-------|---------|--------|
| Ομάδες                 | 2  | 1,0   | 0,5   | 0,449   | 0,658  |
| Επεμβάσεις             | 3  | 992,7 | 330,9 | 285,317 | <,0001 |
| Πειραματικό σφάλμα     | 6  | 7,0   | 1,2   |         |        |
| Δειγματοληπτικό σφάλμα | 36 | 114   | 3,167 |         |        |
| Σύνολο                 | 46 |       |       |         |        |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

```
> fit=aov(Y~Tr+R+Error(Tr:R))
```

```
Warning message:
```

```
In aov(Y ~ Tr + R + Error(Tr:R)) : Error() model is singular
```

```
> summary(fit)
```

```
Error: Tr:R
```

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)       |
|-----------|----|--------|---------|---------|--------------|
| Tr        | 3  | 992.7  | 330.9   | 285.317 | 7.36e-07 *** |
| R         | 2  | 1.0    | 0.5     | 0.449   | 0.658        |
| Residuals | 6  | 7.0    | 1.2     |         |              |

```
---
```

```
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Error: Within
```

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F) |
|-----------|----|--------|---------|---------|--------|
| Residuals | 36 | 114    | 3.167   |         |        |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

---

```
> LSD.test(Y,Tr,6,1.2,console = T)
```

Study: Y ~ Tr

LSD t Test for Y

Mean Square Error: 1.2

Tr, means and individual ( 95 %) CI

|   | Y         | std       | r  | LCL       | UCL       | Min | Max |
|---|-----------|-----------|----|-----------|-----------|-----|-----|
| 1 | 12.000000 | 2.0449494 | 12 | 11.226219 | 12.773781 | 9   | 15  |
| 2 | 6.166667  | 1.7494588 | 12 | 5.392885  | 6.940448  | 3   | 9   |
| 3 | 9.833333  | 0.9374369 | 12 | 9.059552  | 10.607115 | 8   | 11  |
| 4 | 18.666667 | 1.7232809 | 12 | 17.892885 | 19.440448 | 16  | 22  |

Alpha: 0.05 ; DF Error: 6

Critical Value of t: 2.446912

least Significant Difference: 1.094292

Treatments with the same letter are not significantly different.

|   | Y         | groups |
|---|-----------|--------|
| 4 | 18.666667 | a      |
| 1 | 12.000000 | b      |
| 3 | 9.833333  | c      |
| 2 | 6.166667  | d      |



## Πειραματικοί Σχεδιασμοί

**Άσκηση 1.** Μελετήθηκε η επίδραση τριών αντιβιοτικών στην ανάπτυξη ενός βακτηρίου. Χρησιμοποιήθηκε το εντελώς τυχαίοποιημένο σχέδιο με τέσσερις επαναλήψεις (τρυβλία) και μετρήθηκε η αναστολή ανάπτυξης του βακτηρίου σε τέσσερις περιοχές των τρυβλίων. Ελέγξτε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των αντιβιοτικών.

|             | Τρυβλία |    |    |    |
|-------------|---------|----|----|----|
| Αντιβιοτικά | 1       | 2  | 3  | 4  |
| A           | 2       | 4  | 3  | 2  |
|             | 4       | 5  | 5  | 4  |
|             | 1       | 3  | 3  | 5  |
|             | 3       | 4  | 2  | 2  |
| B           | 5       | 8  | 9  | 7  |
|             | 8       | 8  | 10 | 9  |
|             | 7       | 9  | 9  | 8  |
|             | 6       | 5  | 6  | 8  |
| C           | 12      | 12 | 14 | 10 |
|             | 11      | 15 | 15 | 14 |
|             | 9       | 10 | 9  | 15 |
|             | 13      | 8  | 11 | 12 |