ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Παραγοντικοί Σχεδιασμοί 2^k

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

2^{k} Παραγοντικοί σχεδιασμοί

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί 2^{k} (και 3^{k}) είναι ειδικές περιπτώσεις σχεδιασμών με μεγάλη πρακτική αξία με εφαρμογές κυρίως στην βιομηχανία.

Ο αριθμός 2 αναφέρεται στον αριθμό των επιπέδων και k στον αριθμό των παραγόντων.

Τα επίπεδα μπορεί να είναι ποιοτικά (υψηλά - χαμηλά επίπεδα, παρουσία - απουσία ενός παράγοντα) ή ποσοτικά και μπορούν να κωδικοποιηθούν ως -1 και +1.

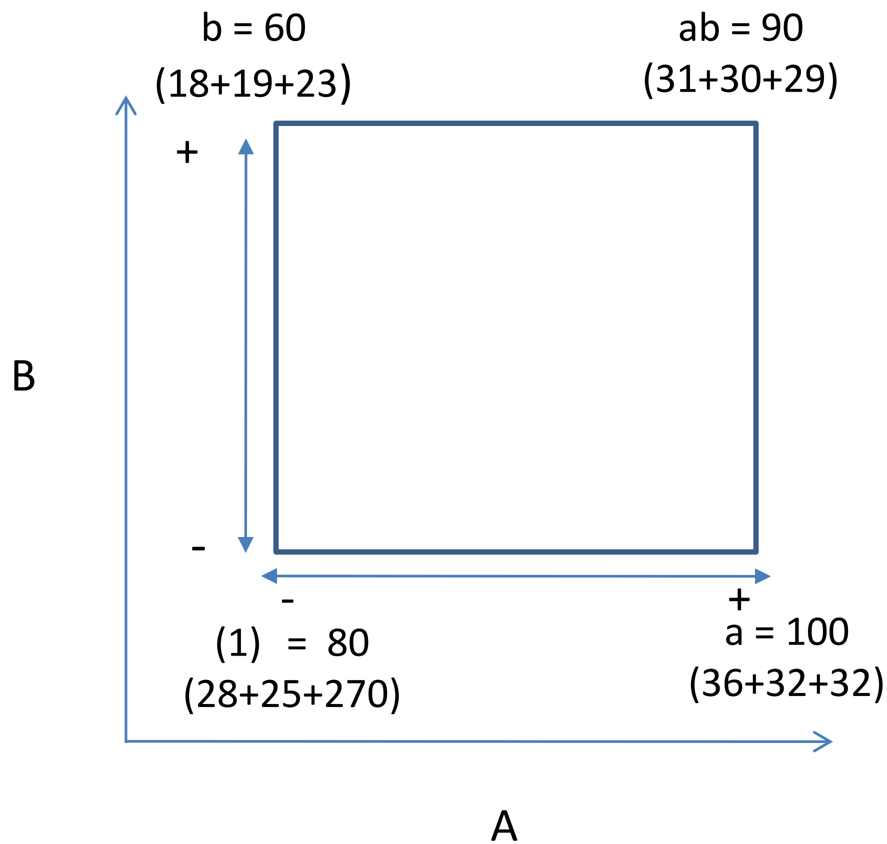
Ο σχεδιασμός 2^k είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στα αρχικά στάδια της πειραματικής διαδικασίας, όταν μεγάλος αριθμός παραγόντων πρέπει να διερευνηθεί. Παρέχει τον ελάχιστο αριθμό εκτελέσεων στην οποία k παράγοντες μπορούν να μελετηθούν με έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Τα σχέδια είναι ευρέως χρησιμοποιούμενα σε πειράματα διαλογής παραγόντων (**factor screening experiments)**.

Υποθέτουμε ότι οι παράγοντες είναι σταθεροί, τα σχέδια είναι εντελώς τυχαιοποιημένα και οι προϋποθέσεις κανονικότητας ικανοποιούνται και επιπλέον ότι η απόκριση είναι προσεγγιστικά γραμμική στα επιλεγόμενα επίπεδα των παραγόντων.

Παράδειγμα: Πείραμα 2^2 (Α - συγκέντρωση και Β - ποσότητα καταλύτη σε δύο επίπεδα) με τρεις επαναλήψεις, (Montgomery)

Παράγοντες A	B	Συνδυασμός επεμβάσεων	Επανάληψη 1	2	3	Σύνολο
–	–	A_{low} B_{low}	28	25	27	80
+	–	A_{high} B_{low}	36	32	32	100
–	+	A_{low} B_{high}	18	19	23	60
+	+	A_{high} B_{high}	31	30	29	90

Συνδυασμοί επεμβάσεων στον 2^2 σχεδιασμό



Αλγεβρικά πρόσημα για τον υπολογισμό των επιδράσεων στον 2^2 σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων		**Παραγοντική επίδραση**			
		I	**A**	**B**	**AB**
- -	(1)	+	-	-	+
+ -	a	+	+	-	-
-+	b	+	-	+	-
+ +	ab	+	+	+	+

Οι **απλές επιδράσεις** των παραγόντων Α και Β δίνονται για μεν τον παράγοντα Α από τις διαφορές (ab – b)/n και (a – (1))/n σε κάθε επίπεδο του Β, για δε τον Β από τις διαφορές (ab – a)/n και (b – (1))/n σε κάθε επίπεδο του Α.

Οι **κύριες (μέσες) επιδράσεις** (μέσος όρος των απλών επιδράσεων) των παραγόντων Α και Β υπολογίζονται με ως εξής:

$$A = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})+(\mathrm{a}-(1))] \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})+(\mathrm{b}-(1))]$$

Η **αλληλεπίδραση** υπολογίζεται ως η μέση διαφορά των απλών επιδράσεων του παράγοντα Α ή του Β.

$$AB = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})-(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})-(\mathrm{b}-(1))]$$

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε την κύρια επίδραση A, είναι να υπολογίζουμε το μέσο των μετρήσεων στη δεξιά θετική πλευρά του τετραγώνου και αφαιρούμε το μέσο των μετρήσεων στην αριστερή αρνητική πλευρά.

$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{ab}}{2\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{b} + (1)}{2\mathrm{n}} = \frac{[\mathrm{a} + \mathrm{ab} - \mathrm{b} - (1)]}{2\mathrm{n}}$$

Αντίστοιχα για να υπολογίσουμε την κύρια επίδραση B, υπολογίζουμε το μέσο των μετρήσεων στη πάνω θετική πλευρά του τετραγώνου και αφαιρούμε το μέσο των μετρήσεων στην κάτω αρνητική πλευρά.

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-} = \frac{\mathrm{b} + \mathrm{ab}}{2\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{a} + (1)}{2\mathrm{n}} = \frac{[\mathrm{b} + \mathrm{ab} - \mathrm{a} - (1)]}{2\mathrm{n}}$$

Για την αλληλεπίδραση AB, υπολογίζουμε τη διαφορά των μέσων στις διαγώνιες του τετραγώνου.

$$AB = \frac{\mathrm{ab} + (1)}{2\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2\mathrm{n}} = \frac{[\mathrm{ab} + (1) - \mathrm{a} - \mathrm{b}]}{2\mathrm{n}}$$

Απλές επιδράσεις – Κύριες (Μέσες) επιδράσεις - Αλληλεπιδράσεις

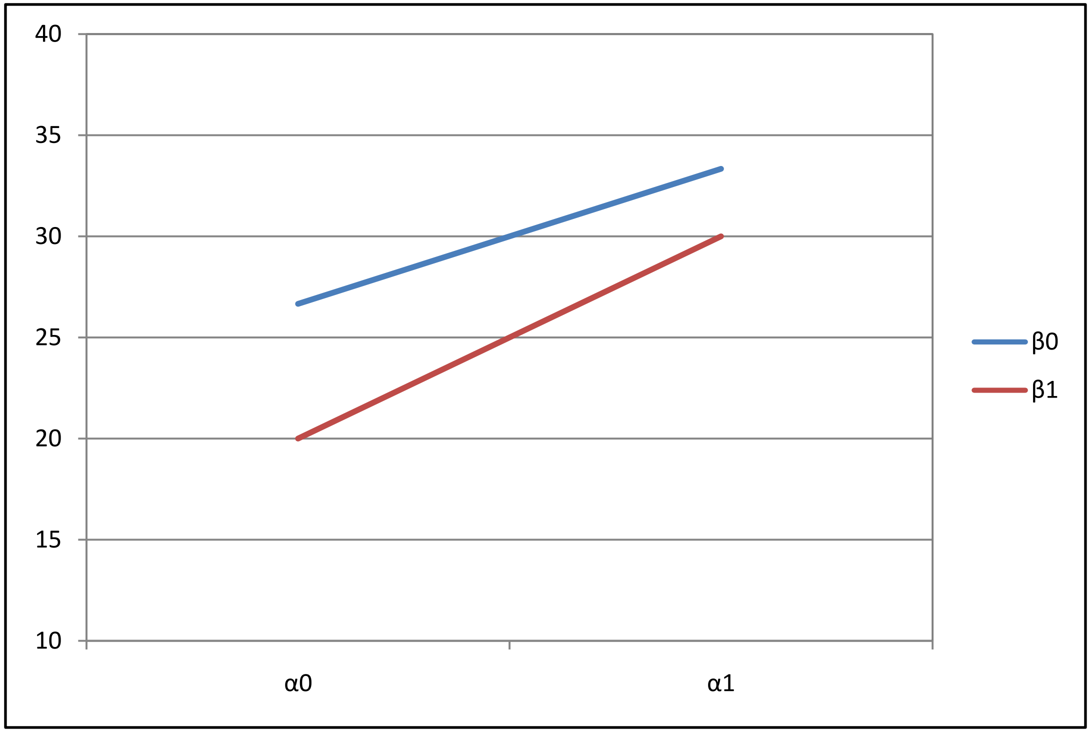
Παράγοντας B	Παράγοντας A		
επίπεδο	- 1	+ 1	Απλή επίδραση
- 1	80	100	(100 – 80)/3 = 6,6
+ 1	60	90	(90 – 60)/3 = 10
Απλή επίδραση	(60 – 80)/3 = - 6,6	(90 – 100)/3 = - 3,3	

$$A = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})+(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{6}[(90-60)+(100-80)] = 8{,}3$$

$$B = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})+(\mathrm{b}-(1))] = \frac{1}{6}[(90-100)+(60-80)] = -5$$

$$AB = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})-(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{6}[(90-60)-(100-80)] = 1{,}66$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί



A = 8,33, B = -5 και A*B = 1,6

Στον σχεδιασμό 2^κ για τον υπολογισμό των αθροισμάτων των τετραγώνων του πίνακα της ανάλυσης παραλλακτικότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$AT_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2^k} c_i Y_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^{2^k} c_i{}^2} = \frac{(Contrast)^2}{4n}$$

με έναν βαθμό ελευθερίας.

όπου: c οι συντελεστές των αντιθέσεων και Y_i τα αθροίσματα των επεμβάσεων.

$$Contrast_A = -(1) + \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{ab}$$

$$Contrast_B = -(1) - \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{ab}$$

$$Contrast_{AB} = +(1) - \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{ab}$$

Οι τρεις αντιθέσεις είναι ορθογώνιες.

$$AT_A = \frac{\left(-(1) + \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{ab}\right)^2}{n*4} = \frac{\left(-80 + 100 - 60 + 90\right)^2}{3*4} = \frac{(50)^2}{12} = 208{,}3$$

$$AT_B = \frac{\left(-(1) - \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{ab}\right)^2}{n*4} = \frac{\left(-80 - 100 + 60 + 90\right)^2}{3*4} = \frac{\left(-30\right)^2}{12} = 75$$

$$AT_{AB} = \frac{\left(+(1) - \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{ab}\right)^2}{n*4} = \frac{\left(+80 - 100 - 60 + 90\right)^2}{3*4} = \frac{(10)^2}{12} = 8{,}3$$

$$AT_{\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda o\upsilon} = \sum_{ijk} Y_{ijk}^2 - \frac{\mathrm{Y}_{\dots}^{\ 2}}{abn} = 9398 - 9075 = 323$$

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	F πιν.
A	a – 1 = 1	208,3	208,3	53,191***	
B	b – 1 = 1	75	75	19,148**	5,317
AB	(a – 1)(b – 1) = 1	8,3	8,3	2,127	
Υπόλοιπο	ab(n – 1) = 8	31,3	3,917		
Σύνολο	abn – 1 = 11	323			

Μοντέλο παλινδρόμησης

Σε ένα 2^k παραγοντικό σχεδιασμό, μπορούμε αναλύσουμε τα δεδομένα του πειράματος με ένα μοντέλο παλινδρόμησης (πρώτης τάξης):

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \varepsilon$$

για το παράδειγμα ισχύει:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι κωδικοποιημένες μεταβλητές των παραγόντων A και B και *β_1 και β_2* οι συντελεστές παλινδρόμησης.

Η σχέση των κωδικοποιημένων μεταβλητών με τα πραγματικά δεδομένα είναι:

$$x_1 = \frac{A - (A_{low} + A_{high})/2}{(A_{high} - A_{low})/2} \qquad x_2 = \frac{B - (B_{low} + B_{high})/2}{(B_{high} - B_{low})/2}$$

$$x_1 = \frac{A - (15 + 25)/2}{(25 - 15)/2} = \frac{A - 20}{5} \qquad x_2 = \frac{B - (1 + 2)/2}{(2 - 1)/2} = \frac{B - 1{,}5}{0{,}5}$$

Το μοντέλο παλινδρόμησης είναι:

$$y = 27{,}5 + \frac{8{,}33}{2} x_1 + \frac{(-5)}{2} x_2$$

όπου: ο σταθερός όρος είναι ο γενικός μέσος του πειράματος και οι συντελεστές το μισό των αντίστοιχων εκτιμήσεων των επιδράσεων των παραγόντων και αυτό γιατί ο συντελεστής παλινδρόμησης μετρά την επίδραση μίας μονάδας μεταβολής του *x* πάνω στο *y*, ενώ η εκτίμηση της επίδρασης βασίζεται σε δύο μονάδες μεταβολής (από -1 σε 1).

$$y = 27{,}5 + \frac{8{,}33}{2}(-1) + \frac{(-5)}{2}(-1) = 25{,}8$$

$e_1 = 28 - 25{,}8 = 2{,}16$
$e_2 = 25 - 25{,}8 = -0{,}835$
$e_3 = 27 - 25{,}8 = 1{,}16$

$$y = 27{,}5 + \frac{8{,}33}{2}(-1) + \frac{(-5)}{2}(+1) = 20{,}83$$

$e_4 = 36 - 34{,}16 = 1{,}84$
$e_5 = 32 - 34{,}16 = -2{,}16$
$e_6 = 32 - 34{,}16 = -2{,}16$

$$y = 27{,}5 + \frac{8{,}33}{2}(+1) + \frac{(-5)}{2}(-1) = 34{,}16$$

$e_7 = 18 -20{,}83 = -2{,}17$
$e_8 = 19 -20{,}83 = -0{,}83$
$e_9 = 23 -20{,}83 = 2{,}16$

$$y = 27{,}5 + \frac{8{,}33}{2}(+1) + \frac{(-5)}{2}(+1) = 29{,}16$$

$e_{10} = 31 - 29{,}16 = 1{,}835$
$e_{11} = 30 - 29{,}16 = 0{,}835$
$e_{12} = 29 - 29{,}16 = -0{,}16$

Μοντέλο Αποκριτικής Επιφάνειας

Το μοντέλο παλινδρόμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή σχημάτων αποκριτικής επιφάνειας.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις κωδικοποιημένες τιμές με τις πραγματικές:

$$y = 27{,}5 + \left(\frac{8{,}2}{2}\right)\left(\frac{A-20}{5}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{B-1{,}5}{0{,}5}\right)$$

$$y = 18.33 + 0.8333\,\mathrm{A} - 5.00\,\mathrm{B}$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=expand.grid(A = c(-1, 1), B = c(-1, 1), Rep = c(1,2,3))
> design
```

	A	B	Rep
1	-1	-1	1
2	1	-1	1
3	-1	1	1
4	1	1	1
5	-1	-1	2
6	1	-1	2
7	-1	1	2
8	1	1	2
9	-1	-1	3
10	1	-1	3
11	-1	1	3
12	1	1	3

ή

```
> library(FrF2)
> design=FrF2(4, 2, replications = 3, randomize = FALSE)
```

ή

```
> library(DoE.base)
> design=fac.design(2, 2, replications= 3, randomize=FALSE)
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(28, 36, 18, 31, 25, 32, 19, 30, 27, 32, 23, 29)
> data=cbind(design, Y)
> data
```

	A	B	Rep	Y
1	-1	-1	1	28
2	1	-1	1	36
3	-1	1	1	18
4	1	1	1	31
5	-1	-1	2	25
6	1	-1	2	32
7	-1	1	2	19
8	1	1	2	30
9	-1	-1	3	27
10	1	-1	3	32
11	-1	1	3	23
12	1	1	3	29

```
> fit=lm(Y~(A+B)^2,data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

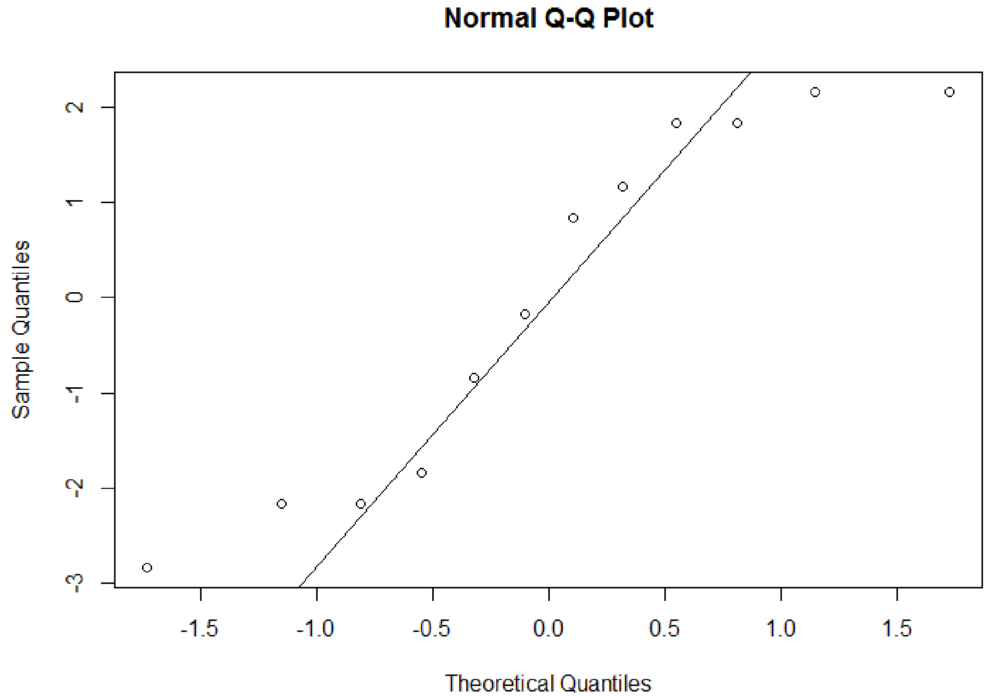
Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	208.333	208.333	53.1915	8.444e-05 ***
B	1	75.000	75.000	19.1489	0.002362 **
A:B	1	8.333	8.333	2.1277	0.182776
Residuals	8	31.333	3.917		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> summary(fit)

Call:
lm.default(formula = Y ~ (A + B)^2, data = data)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-2.000 -1.333 -0.500  1.083  3.000

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  27.5000     0.5713  48.135 3.84e-11 ***
A1            4.1667     0.5713   7.293 8.44e-05 ***
B1           -2.5000     0.5713  -4.376  0.00236 **
A1:B1         0.8333     0.5713   1.459  0.18278
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.979 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.903,     Adjusted R-squared:  0.8666
F-statistic: 24.82 on 3 and 8 DF,  p-value: 0.0002093
```

```
> fit1=lm(Y~(A+B),data)
> residuals=residuals(fit1)
> residuals
         1          2          3          4          5          6          7          8          9
 2.1666667  1.8333333 -2.8333333  1.8333333 -0.8333333 -2.1666667 -1.8333333  0.8333333  1.1666667
        10         11         12
-2.1666667  2.1666667 -0.1666667
> qqnorm(residuals)
> qqline(residuals)
```

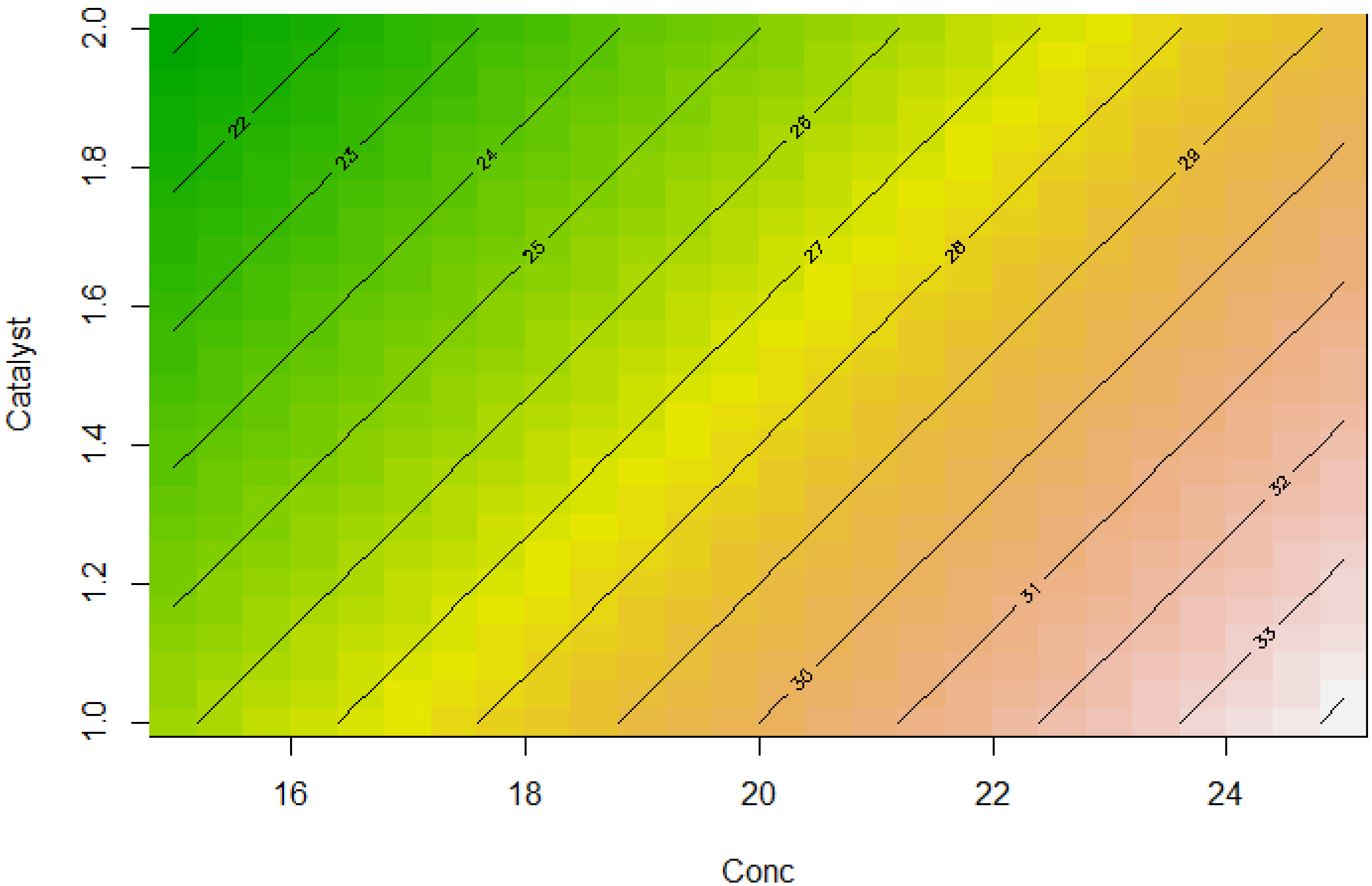


Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library (rsm)
> data=as.coded.data(data, A ~ (Conc - 20)/5, B ~ (Catalyst - 1.5)/0.5)
> data
```

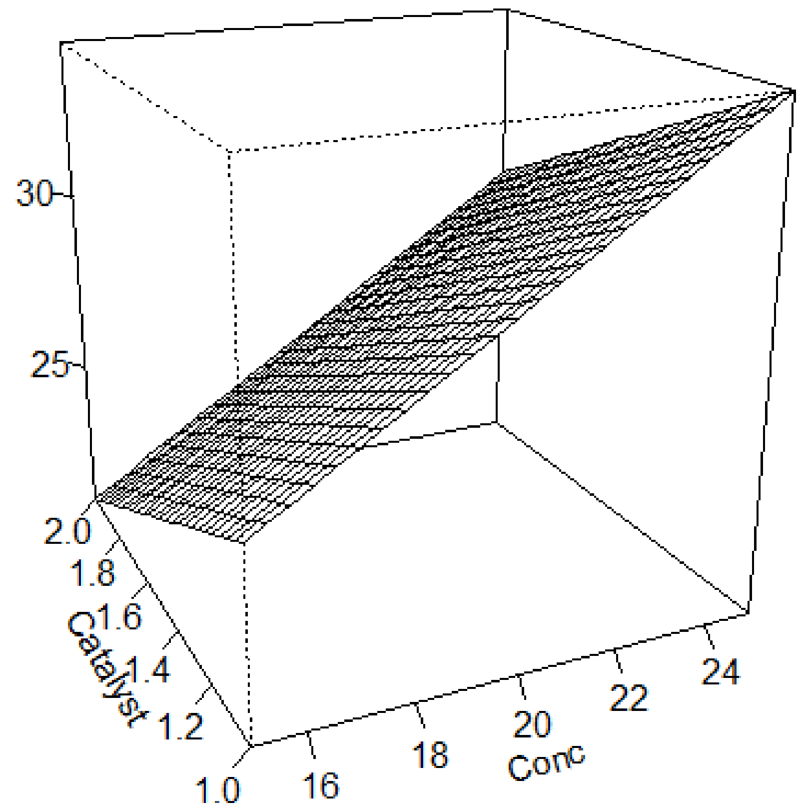
	Conc	Catalyst	Rep	Y
1	15	1	1	28
2	25	1	1	36
3	15	2	1	18
4	25	2	1	31
5	15	1	2	25
6	25	1	2	32
7	15	2	2	19
8	25	2	2	30
9	15	1	3	27
10	25	1	3	32
11	15	2	3	23
12	25	2	3	29

```
> datarsm=rsm(Y ~ FO(A,B), data)
> contour(datarsm, ~ A + B, image=TRUE)
```



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> persp(datarsm, B ~ A)

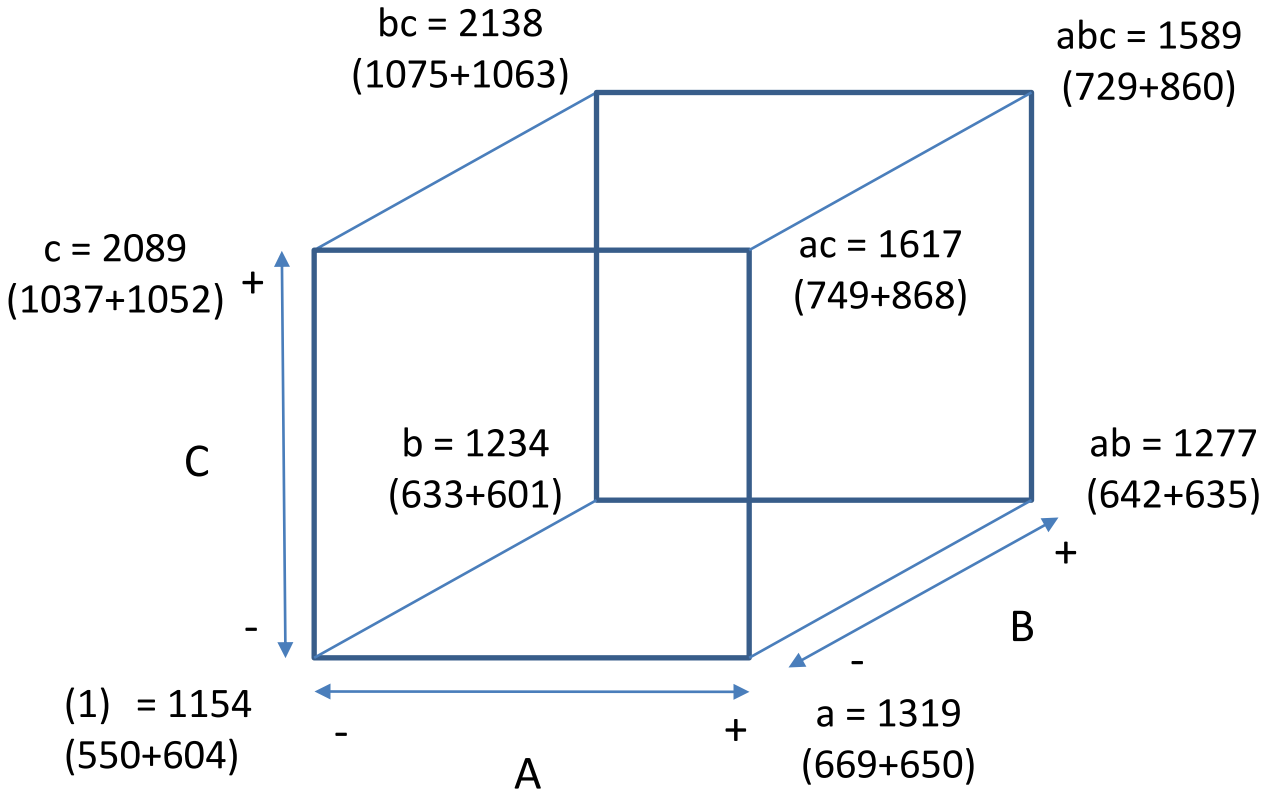


Παράδειγμα : Σχεδιασμός 2^3 (A – κενό ηλεκτρόδιου, B – φλόγα και C – ισχύς με δύο επίπεδα) με δύο επαναλήψεις (Montgomery)

	Επίπεδα παραγόντων	
Παράγοντες	Χαμηλό (-1)	Υψηλό (1)
A (Gap, cm)	0,80	1,20
B (C2F6 flow, SCCM)	125	200
C (Power, W)	275	325

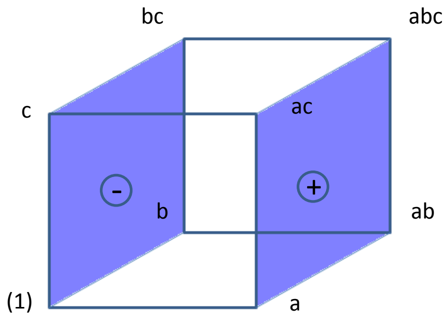
Run	A	B	C	$1^η$ επανάληψη	$2^η$ επανάληψη	Σύνολο (Etch Rate)
1	-1	-1	-1	550	604	(1) = 1154
2	1	-1	-1	669	650	a = 1319
3	-1	1	-1	633	601	b = 1234
4	1	1	-1	642	635	ab = 1277
5	-1	-1	1	1037	1052	c = 2089
6	1	-1	1	749	868	ac = 1617
7	-1	1	1	1075	1063	bc =2138
8	1	1	1	729	860	abc =1589

Συνδυασμοί επεμβάσεων στον 2^3 σχεδιασμό



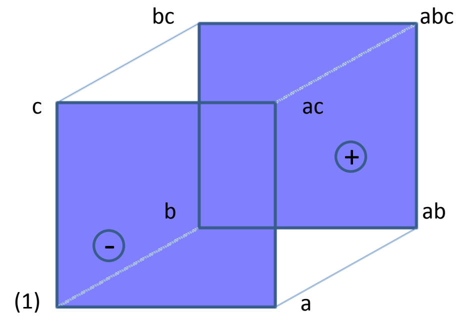
Πειραματικοί Σχεδιασμοί

A



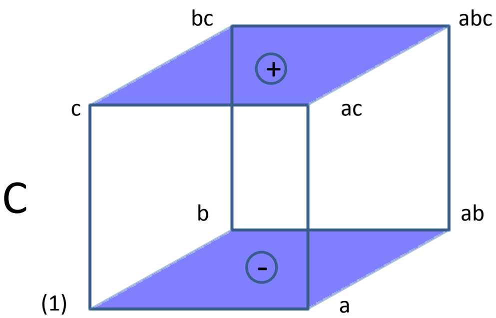
$$a + ab + ac + abc - b - c - bc - (1)$$

B



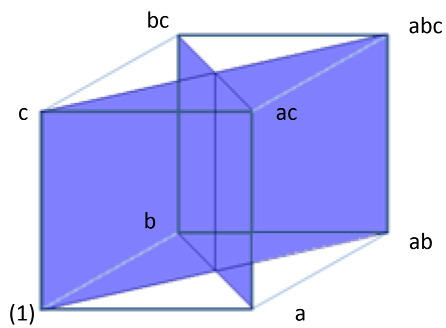
$$b + ab + bc + abc - a - c - ac - (1)$$

C



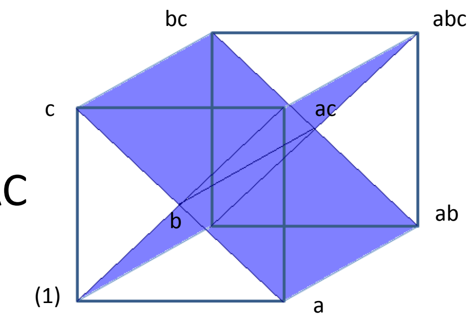
$$c + ac + bc + abc - a - b - ab - (1)$$

AB



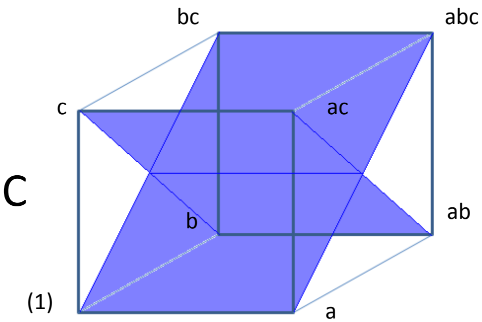
$$ab + (1) + abc + c - b - a - bc - ac$$

AC

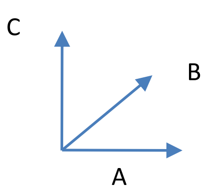


$$ac + (1) + abc + b - a - c - ab - bc$$

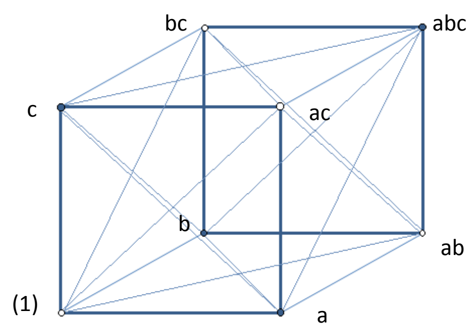
BC



$$bc + (1) + abc + a - b - c - ab - ac$$



ABC



$$abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)$$

● = + run

○ = − run

Αλγεβρικά πρόσημα για τον υπολογισμό των επιδράσεων στον 2^3 σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων		Παραγοντική επίδραση							
		I	**A**	**B**	**AB**	**C**	**AC**	**BC**	**ABC**
- - -	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
+ - -	a	+	+	-	-	-	-	+	+
- + -	b	+	-	+	-	-	+	-	+
+ + -	ab	+	+	+	+	-	-	-	-
- - +	c	+	-	-	+	+	-	-	+
+ - +	ac	+	+	-	-	+	+	-	-
- + +	bc	+	-	+	-	+	-	+	-
+ + +	abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Εκτίμηση Επιδράσεων - Αλληλεπιδράσεων

$$A = \frac{1}{4n}[-(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc] = \frac{1}{8}[-1154 + 1319 - 1234 + 1277 - 2089 + 1617 - 2138 + 1589] = \frac{(-813)}{8} = -101,625$$

$$B = \frac{1}{4n}[-(1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc] = \frac{1}{8}[-1154 - 1319 + 1234 + 1277 - 2089 - 1617 + 2138 + 1589] = \frac{59}{8} = 7,375$$

$$C = \frac{1}{4n}[+(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc] = \frac{1}{8}[+1154 - 1319 - 1234 + 1277 + 2089 - 1617 - 2138 + 1589] = \frac{2449}{8} = 306,125$$

$$AB = \frac{1}{4n}[+(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc] = \frac{1}{8}[+1154 - 1319 - 1234 + 1277 + 2089 - 1617 - 2138 + 1589] = \frac{(-199)}{8} = -24,875$$

$$AC = \frac{1}{4n}[+(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] = \frac{1}{8}[+1154 - 1319 + 1234 - 1277 - 2089 + 1617 - 2138 + 1589] = \frac{(-1229)}{8} = -153,625$$

$$BC = \frac{1}{4n}[+(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] = \frac{1}{8}[+1154 + 1319 - 1234 - 1277 - 2089 - 1617 + 2138 + 1589] = \frac{(-17)}{8} = -2,125$$

$$ABC = \frac{1}{4n}[-(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc] = \frac{1}{8}[-1154 + 1319 + 1234 - 1277 + 2089 - 1617 - 2138 + 1589] = \frac{45}{8} = 5,625$$

Στον σχεδιασμό 2^3 για τον υπολογισμό των αθροισμάτων των τετραγώνων χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$AT = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2^k} c_i Y_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{\,2}} = \frac{(Contrast)^2}{8n}$$

$$AT_A = \frac{(-813)^2}{16} = 41.310{,}5$$

$$AT_{AB} = \frac{(-199)^2}{16} = 2.475$$

$$AT_B = \frac{(59)^2}{16} = 217{,}5$$

$$AT_{AC} = \frac{(-1229)^2}{16} = 94.402{,}5$$

$$AT_C = \frac{(2449)^2}{16} = 374.850$$

$$AT_{BC} = \frac{(-17)^2}{16} = 18$$

$$AT_{ABC} = \frac{(45)^2}{16} = 126{,}56$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	Fπιν.
A	1	41.311	41.311	18,3394**	5,31
B	1	218	218	0,0966	
C	1	374.850	374.850	166,4105***	
AB	1	2.475	2.475	1,0988	
AC	1	94.403	94.403	41,9090***	
BC	1	18	18	0,0080	
ABC	1	127	127	0,0562	
Υπόλοιπο	8	18.020	2.253		
Σύνολο	15	531.421			

Αλγόριθμός του Yates για το 2^3 σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y (σύνολα)	(1)	(2)	(3)	Επίδραση	Εκτίμηση Επίδρασης $(3)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(3)^2/r2^k$
(1)	1154	2473	4984	12417	I	-	-
a	1319	2511	7433	-813	A	-101,6	41.311
b	1234	3706	208	59	B	7,4	218
ab	1277	3727	-1021	-199	AB	-24,9	2.475
c	2089	165	38	2449	C	306,1	374.850
ac	1617	43	21	-1229	AC	-153,6	94.403
bc	2138	-472	-122	-17	BC	-2,1	18
abc	1589	-549	-77	45	ABC	5,6	127

Οι τέσσερις πρώτες τιμές της στήλης (1) υπολογίζονται προσθέτοντας ανά ζεύγη τις τιμές της στήλης Y (1154+1319=2473, 1234+1277=2511, 2089+1617=3706 και 2138+1589=3727), ενώ οι επόμενες τέσσερις, αφαιρώντας την πρώτη τιμή τους ζεύγους από τη δεύτερη (1319-1154=165, 1277-1234=43, ...). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται 2 φορές στο 2^3 (συνολικά υπάρχουν k στήλες).

Το μοντέλο παλινδρόμησης και επιφάνειας απόκρισης.

Το μοντέλο παλινδρόμησης (πρώτης τάξης και αλληλεπίδραση) για την πρόβλεψη της μεταβλητής (etch rate) είναι :

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

$$\mathrm{y} = 776.0625 + \frac{(-101.625)}{2}\mathrm{x}_1 + \frac{306.125}{2}\mathrm{x}_3 + \frac{(-153.625)}{2}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=expand.grid(A = c(-1,1), B = c(-1,1), C = c(-1,1), Rep = c(1,2))
> design
```

A	B	C	Rep	Y
1	-1	-1	-1	1
2	1	-1	-1	1
3	-1	1	-1	1
4	1	1	-1	1
5	-1	-1	1	1
6	1	-1	1	1
7	-1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	-1	-1	-1	2
10	1	-1	-1	2
11	-1	1	-1	2
12	1	1	-1	2
13	-1	-1	1	2
14	1	-1	1	2
15	-1	1	1	2
16	1	1	1	2

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(550,669,633,642,1037,749,1075,729,604,650,601,635,1052,868,1063,860)
> data=cbind(design, Y)
> data
```

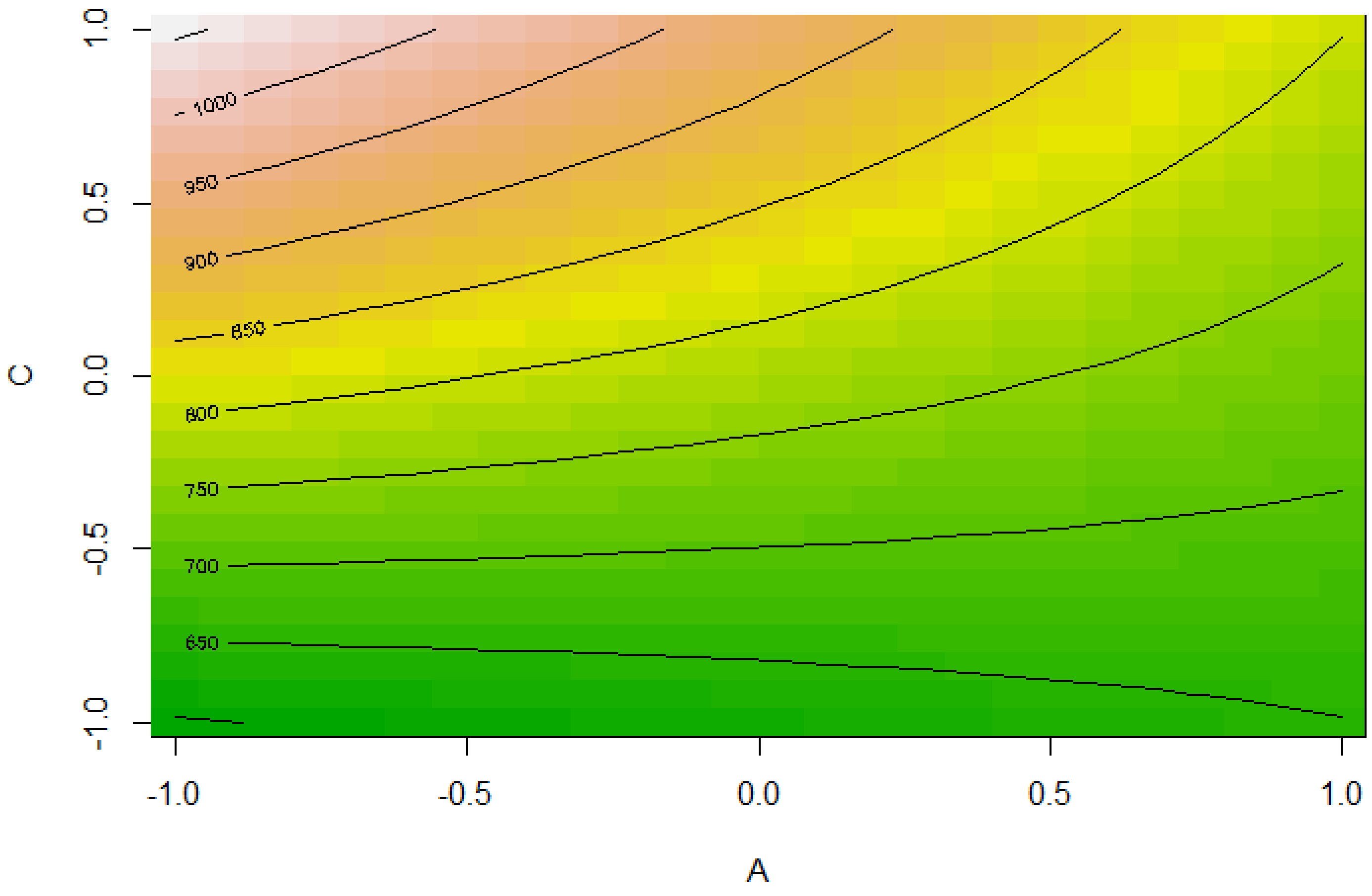
	A	B	C	Rep	Y
1	-1	-1	-1	1	550
2	1	-1	-1	1	669
3	-1	1	-1	1	633
4	1	1	-1	1	642
5	-1	-1	1	1	1037
6	1	-1	1	1	749
7	-1	1	1	1	1075
8	1	1	1	1	729
9	-1	-1	-1	2	604
10	1	-1	-1	2	650
11	-1	1	-1	2	601
12	1	1	-1	2	635
13	-1	-1	1	2	1052
14	1	-1	1	2	868
15	-1	1	1	2	1063
16	1	1	1	2	860

```
> fit=lm(Y~A*B*C, data)
> summary(fit)

Call:
  lm.default(formula = Y ~ A * B * C, data = data)

Residuals:
  Min     1Q Median    3Q    Max
-65.50 -11.12   0.00  11.12  65.50

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  776.062    11.865   65.406  3.32e-12 ***
  A1         -50.813    11.865   -4.282  0.002679 **
  B1           3.687    11.865    0.311  0.763911
  C1         153.063    11.865   12.900  1.23e-06 ***
  A1:B1      -12.437    11.865   -1.048  0.325168
  A1:C1      -76.812    11.865   -6.474  0.000193 ***
  B1:C1       -1.062    11.865   -0.090  0.930849
  A1:B1:C1     2.812    11.865    0.237  0.818586
---
  Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 47.46 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9661,       Adjusted R-squared:  0.9364
F-statistic: 32.56 on 7 and 8 DF,  p-value: 2.896e-05
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

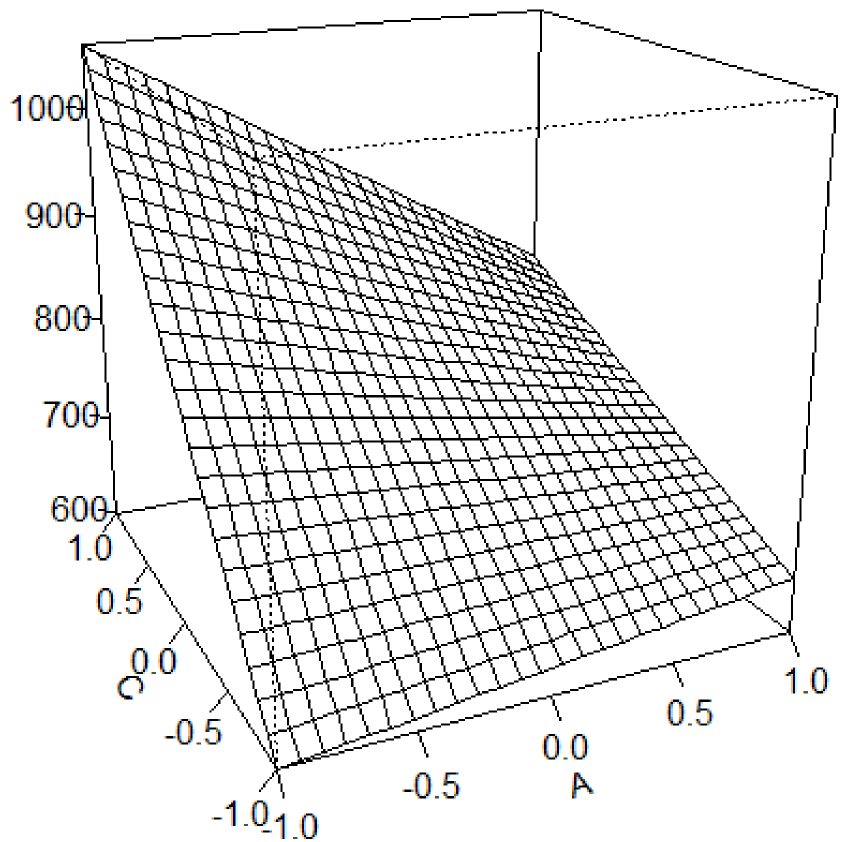
```
> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y
            Df  Sum Sq  Mean Sq   F value     Pr(>F)
A            1   41311    41311   18.3394  0.0026786 **
B            1     218      218    0.0966  0.7639107
C            1  374850   374850  166.4105  1.233e-06 ***
A:B          1    2475     2475    1.0988  0.3251679
A:C          1   94403    94403   41.9090  0.0001934 ***
B:C          1      18       18    0.0080  0.9308486
A:B:C        1     127      127    0.0562  0.8185861
Residuals    8   18020     2253
---
  Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

```
> datarsm=rsm(Y ~ FO(A, C) + TWI(A, C), data)  # πρώτης τάξης + αλληλεπίδραση
> contour(datarsm, ~ A + C, image=TRUE)
```



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> persp(datarsm, C ~ A)
```

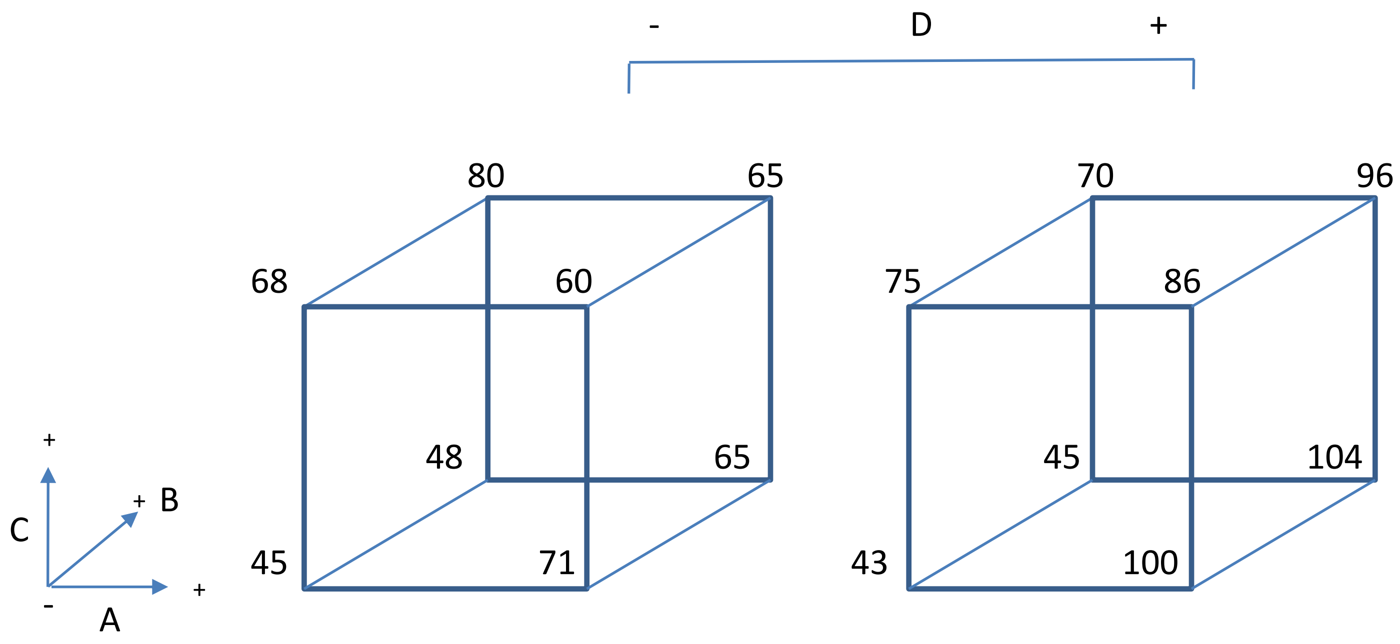


Μία επανάληψη του $2^κ$ σχεδιασμό

Παράδειγμα : Σχεδιασμός 2^4 (A – θερμοκρασία, B – πίεση, C – συκγ. Φορμαλδεΰδης, D – ρυθμός ανάδευσης και Y – ρυθμός φιλτραρίσματος) (Montgomery)

Αριθμός Εκτέλεσης	Παράγοντας				Συνδυασμός επέμβασης	Y
	A	B	C	D		
1	-1	-1	-1	-1	(1)	45
2	1	-1	-1	-1	a	71
3	-1	1	-1	-1	b	48
4	1	1	-1	-1	ab	65
5	-1	-1	1	-1	c	68
6	1	-1	1	-1	ac	60
7	-1	1	1	-1	bc	80
8	1	1	1	-1	abc	65
9	-1	-1	-1	1	d	43
10	1	-1	-1	1	ad	100
11	-1	1	-1	1	bd	45
12	1	1	-1	1	abd	104
13	-1	-1	1	1	cd	75
14	1	-1	1	1	acd	86
15	-1	1	1	1	bcd	70
16	1	1	1	1	abcd	96

Συνδυασμοί επεμβάσεων στον 2^4 σχεδιασμό



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Αλγεβρικά πρόσημα για τον υπολογισμό των επιδράσεων στον 2^4 σχεδιασμό

Συνδυασμοί		A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
- - - -	(1)	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
+ - - -	a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
- + - -	b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
++ - -	ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
- - + -	c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
+ - + -	ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
- + + -	bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
+ + + -	abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
- - - +	d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
+ - - +	ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
- + - +	bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
+ + - +	abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
- - + +	cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
+ - + +	acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
- + + +	bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
+ + + +	abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Αλγόριθμός του Yates για το 2^4 σχεδιασμό

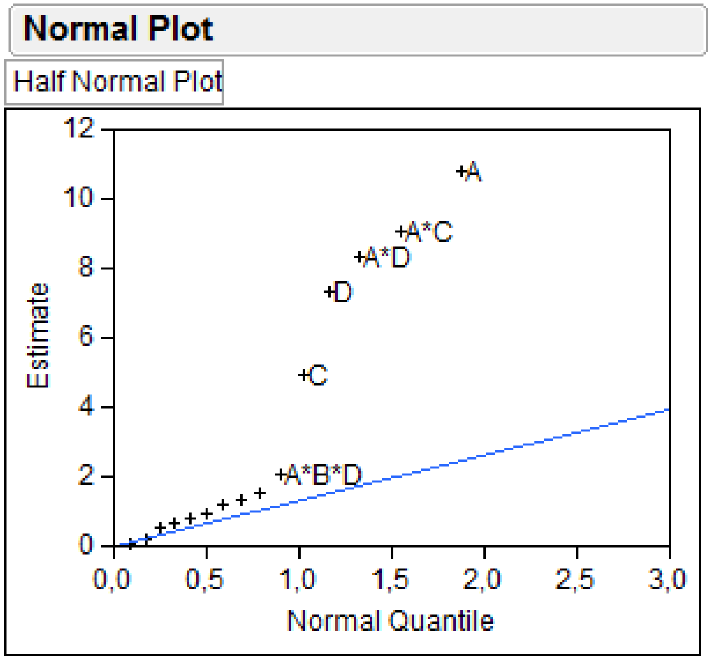
Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	Επιδράσεις (4) /$r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(4)^2/r2^k$
1	45	116	229	502	1121		
a	71	113	273	619	173	21,63	1870,56
b	48	128	292	20	25	3,125	39,06
ab	65	145	327	153	1	0,125	0,06
c	68	143	43	14	79	9,875	390,06
ac	60	149	-23	11	-145	-18,13	1314,06
bc	80	161	116	-16	19	2,375	22,56
abc	65	166	37	17	15	1,875	14,06
d	43	26	-3	44	117	14,63	855,56
ad	100	17	17	35	133	16,63	1105,56
bd	45	-8	6	-66	-3	-0,375	0,56
abd	104	-15	5	-79	33	4,125	68,06
cd	75	57	-9	20	-9	-1,125	5,06
acd	86	59	-7	-1	-13	-1,625	10,56
bcd	70	11	2	2	-21	-2,625	27,56
abcd	96	26	15	13	11	1,375	7,56

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

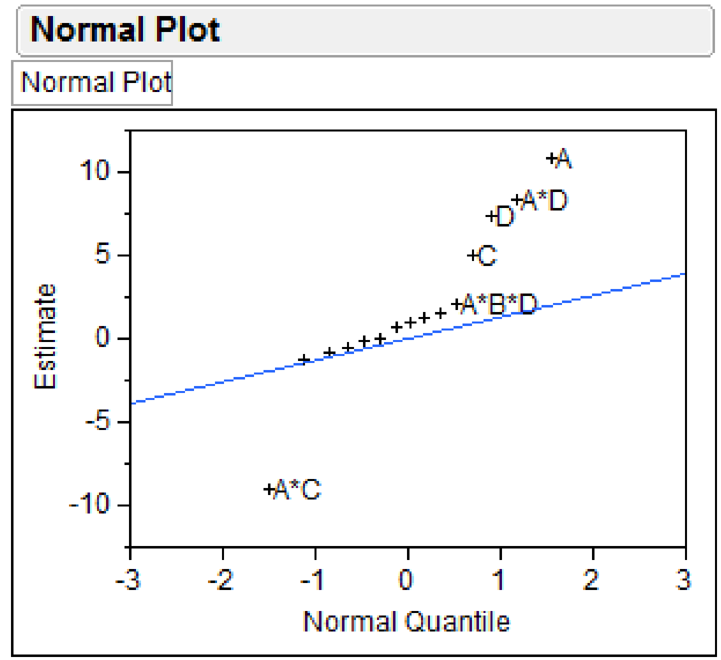
Παράγοντας	Επίδραση	Άθροισμα Τετραγώνων	Ποσοστό
A	***21.625***	***1870.56***	***32.63***
B	3.125	39.0625	0.68
C	***9.875***	***390.062***	***6.80***
D	***14.625***	***855.563***	***14.92***
AB	0.125	0.0625	0.001
AC	***18.125***	***1314.06***	***22.92***
AD	***16.625***	***1105.56***	***19.29***
BC	2.375	22.5625	0.39
BD	0.375	0.5625	0.01
CD	1.125	5.0625	0.08
ABC	1.875	14.0625	0.24
ABD	4.125	68.0625	1.18
ACD	1.625	10.5625	0.18
BCD	2.625	27.5625	0.48
ABCD	1.375	7.5625	0.13

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Η τυπική διαδικασία σε έναν μη επαναλαμβανόμενο σχεδιασμό δύο παραγόντων για τον έλεγχο των επιδράσεων και αλληλοεπιδράσεων είναι το normal ή half-normal plot (JMP).



Blue line is Lenth's PSE, from the estimates population.



Blue line is Lenth's PSE, from the estimates population.

Έλεγχος Lenth

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε m επιδράσεις που μας ενδιαφέρουν, π.χ. c_1, c_2, ..., c_m. Εάν το σχέδιο αφορά ένα μη επαναλαμβανόμενο 2^k παραγοντικό σχεδιασμό, αυτές οι επιδράσεις αντιστοιχούν σε $m = 2^k - 1$.
Ορίζουμε:

$$s_0 = 1.5 * median|c_j|$$

$$PSE = 1.5 * median(|c_j| : |c_j| < 2{,}5 s_0)$$

όπου PSE είναι το ψευδο-τυπικό σφάλμα **(pseudostandard error)** και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των επιδράσεων-αλληλοεπιδράσεων.

ορίζουμε το περιθώριο σφάλματος **(margin of error):**

$$ME = t_{0,025,d} * PSE$$

όπου οι ΒΕ ορίζονται ως d = m/3.
και το ταυτόχρονο περιθώριο σφάλματος **(simultaneous margin of error):**

$$SME = t_{\gamma,d} * PSE$$

όπου $$\gamma = 1 - (1 + 0{,}95^{1/m}) / 2$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Τιμές t κατανομής για m και d = m/3 ΒΕ

m	$t_{d,0.025}$	$t_{d,(1-\gamma)}$
7	3,76	9,01
15	2,57	5,22
31	2,22	4,22
63	2,80	3,91

$$s_0 = 1.5 * median|c_j| = 1.5 * median|c_8| = 1.5 * 2,63 = 3,945$$

$$PSE = 1.5 * median(|c_j| : |c_j| < 2,5 s_0) = 1.5 * median(|c_j| : |c_j| < 9,8625) =$$

$$= 1,5 \frac{(|c_{10}| + |c_{11}|)}{2} = 1,5 \frac{(1,88 + 1,63)}{2} = 2,6325$$

Για επίπεδο σημαντικότητας 0,05 και d = 15/3 =5 ΒΕ

$$ME = t_{0,025,d} * PSE = 2,57 * 2,6325 = 6,765$$

$$SME = t_{\gamma,d} * PSE = 5,22 * 2,6325 = 13,7$$

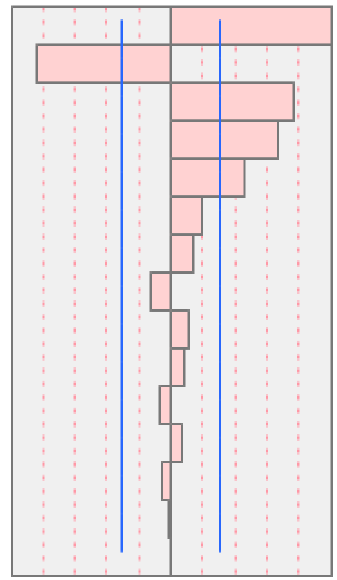
Επομένως οι επιδράσεις που κατά απόλυτη τιμή υπερβαίνουν το SME είναι σημαντικές (A, AC, AD, D), ενώ οι υπόλοιπες που είναι κάτω από το ME είναι μη σημαντικές. Η επίδραση C βρίσκεται στην περιοχή αβεβαιότητας, η οποία είναι μεταξύ ME και SME.

	Παράγοντας	**Επίδραση c_j**
1	A	21,625
2	AC	-18,125
3	AD	16,625
4	D	14,625
5	C	9,875
6	ABD	4,125
7	B	3,125
8	BCD	-2,625
9	BC	2,375
10	ABC	1,875
11	ACD	-1,625
12	ABCD	1,375
13	CD	-1,125
14	BD	-0,375
15	AB	0,125

Έλεγχος Lenth σημαντικότητας εκτίμησης επιδράσεων - αλληλοεπιδράσεων (JMP).

Sorted Parameter Estimates

Term	Estimate	Relative Std Error	Pseudo t-Ratio	Pseudo p-Value
A	10,8125	0,25	8,24	0,0004*
A*C	-9,0625	0,25	-6,90	0,0010*
A*D	8,3125	0,25	6,33	0,0014*
D	7,3125	0,25	5,57	0,0026*
C	4,9375	0,25	3,76	0,0131*
A*B*D	2,0625	0,25	1,57	0,1769
B	1,5625	0,25	1,19	0,2873
B*C*D	-1,3125	0,25	-1,00	0,3632
B*C	1,1875	0,25	0,90	0,4071
A*B*C	0,9375	0,25	0,71	0,5070
A*C*D	-0,8125	0,25	-0,62	0,5630
A*B*C*D	0,6875	0,25	0,52	0,6228
C*D	-0,5625	0,25	-0,43	0,6861
B*D	-0,1875	0,25	-0,14	0,8920
A*B	0,0625	0,25	0,05	0,9639



No error degrees of freedom, so ordinary tests uncomputable.
Relative Std Error corresponds to residual standard error of 1.
Pseudo t-Ratio and p-Value calculated using Lenth PSE = 1,3125
and DFE=5

Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**
A	1	1870.6	1870.6	83.36**
C	1	390.1	390.1	17.38**
D	1	855.6	855.6	38.13**
AC	1	1314.06	1314.06	58.56**
AD	1	1105.6	1105.6	49.27**
CD	1	5.06	5.06	0.22
ACD	1	10.56	10.56	0.47
Υπόλοιπο	8	179.52	22.44	
Σύνολο	15	5730.93		

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(FrF2)
> design=FrF2(16, 4,randomize = FALSE)
creating full factorial with 16 runs ...

> design

     A  B  C  D
1   -1 -1 -1 -1
2    1 -1 -1 -1
3   -1  1 -1 -1
4    1  1 -1 -1
5   -1 -1  1 -1
6    1 -1  1 -1
7   -1  1  1 -1
8    1  1  1 -1
9   -1 -1 -1  1
10   1 -1 -1  1
11  -1  1 -1  1
12   1  1 -1  1
13  -1 -1  1  1
14   1 -1  1  1
15  -1  1  1  1
16   1  1  1  1
class=design, type= full factorial
```

```
> Y=c(45,71,48,65,68,60,80,65,43,100,45,104,75,86,70,96)
> data=add.response(design, Y)
> data

     A  B  C  D   Y
1   -1 -1 -1 -1  45
2    1 -1 -1 -1  71
3   -1  1 -1 -1  48
4    1  1 -1 -1  65
5   -1 -1  1 -1  68
6    1 -1  1 -1  60
7   -1  1  1 -1  80
8    1  1  1 -1  65
9   -1 -1 -1  1  43
10   1 -1 -1  1 100
11  -1  1 -1  1  45
12   1  1 -1  1 104
13  -1 -1  1  1  75
14   1 -1  1  1  86
15  -1  1  1  1  70
16   1  1  1  1  96
class=design, type= full factorial
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~A*B*C*D,data)
> summary(fit)
Call:  lm.default(formula = Y ~ A * B * C * D, data = data)
Residuals:   ALL 16 residuals are 0: no residual degrees of freedom!
   Coefficients:
                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     70.0625        NA      NA       NA
A1              10.8125        NA      NA       NA
B1               1.5625        NA      NA       NA
C1               4.9375        NA      NA       NA
D1               7.3125        NA      NA       NA
A1:B1            0.0625        NA      NA       NA
A1:C1           -9.0625        NA      NA       NA
B1:C1            1.1875        NA      NA       NA
A1:D1            8.3125        NA      NA       NA
B1:D1           -0.1875        NA      NA       NA
C1:D1           -0.5625        NA      NA       NA
A1:B1:C1         0.9375        NA      NA       NA
A1:B1:D1         2.0625        NA      NA       NA
A1:C1:D1        -0.8125        NA      NA       NA
B1:C1:D1        -1.3125        NA      NA       NA
A1:B1:C1:D1      0.6875        NA      NA       NA
Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom
Multiple R-squared:      1,          Adjusted R-squared:    NaN
F-statistic:   NaN on 15 and 0 DF,  p-value: NA
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

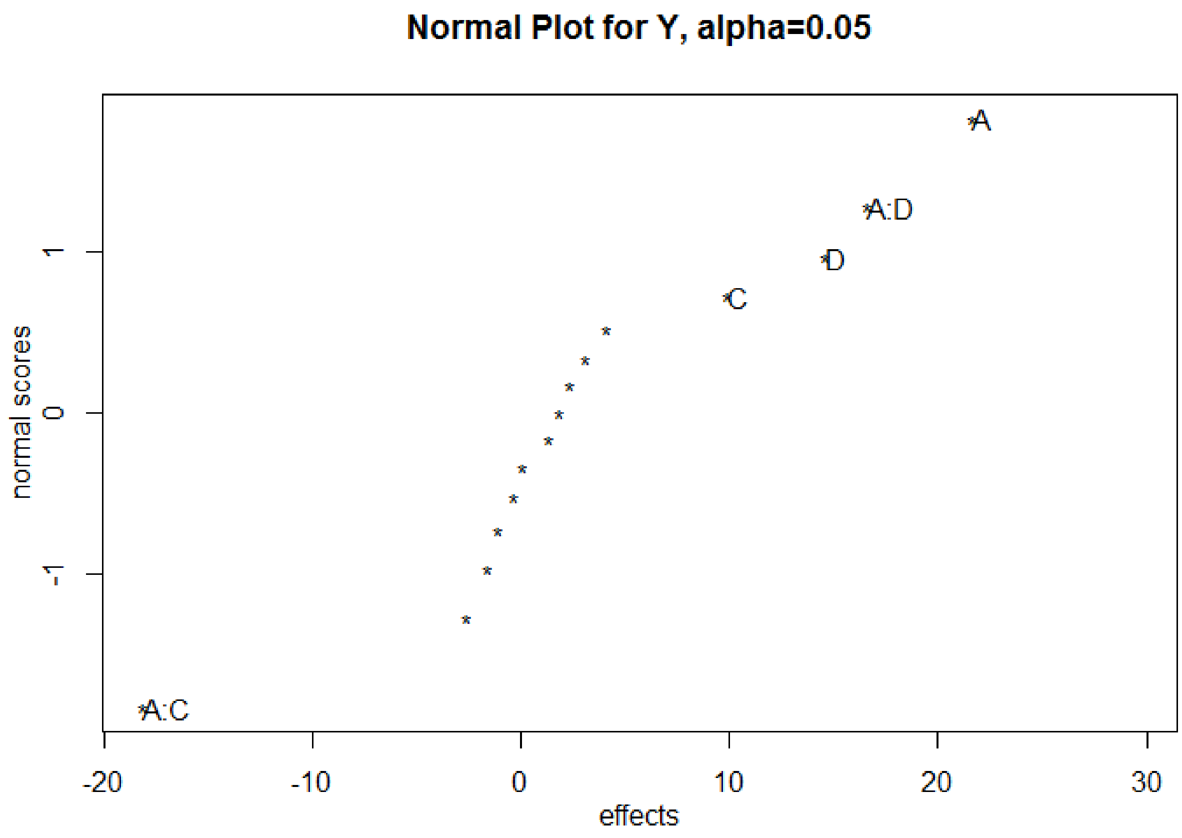
> anova(fit)
Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	1870.56	1870.56		
B	1	39.06	39.06		
C	1	390.06	390.06		
D	1	855.56	55.56		
A:B	1	0.06	0.06		
A:C	1	1314.06	1314.06		
B:C	1	22.56	22.56		
A:D	1	1105.56	1105.56		
B:D	1	0.56	0.56		
C:D	1	5.06	5.06		
A:B:C	1	14.06	14.06		
A:B:D	1	68.06	68.06		
A:C:D	1	10.56	10.56		
B:C:D	1	27.56	27.56		
A:B:C:D	1	7.56	7.56		
Residuals	0	0.00			

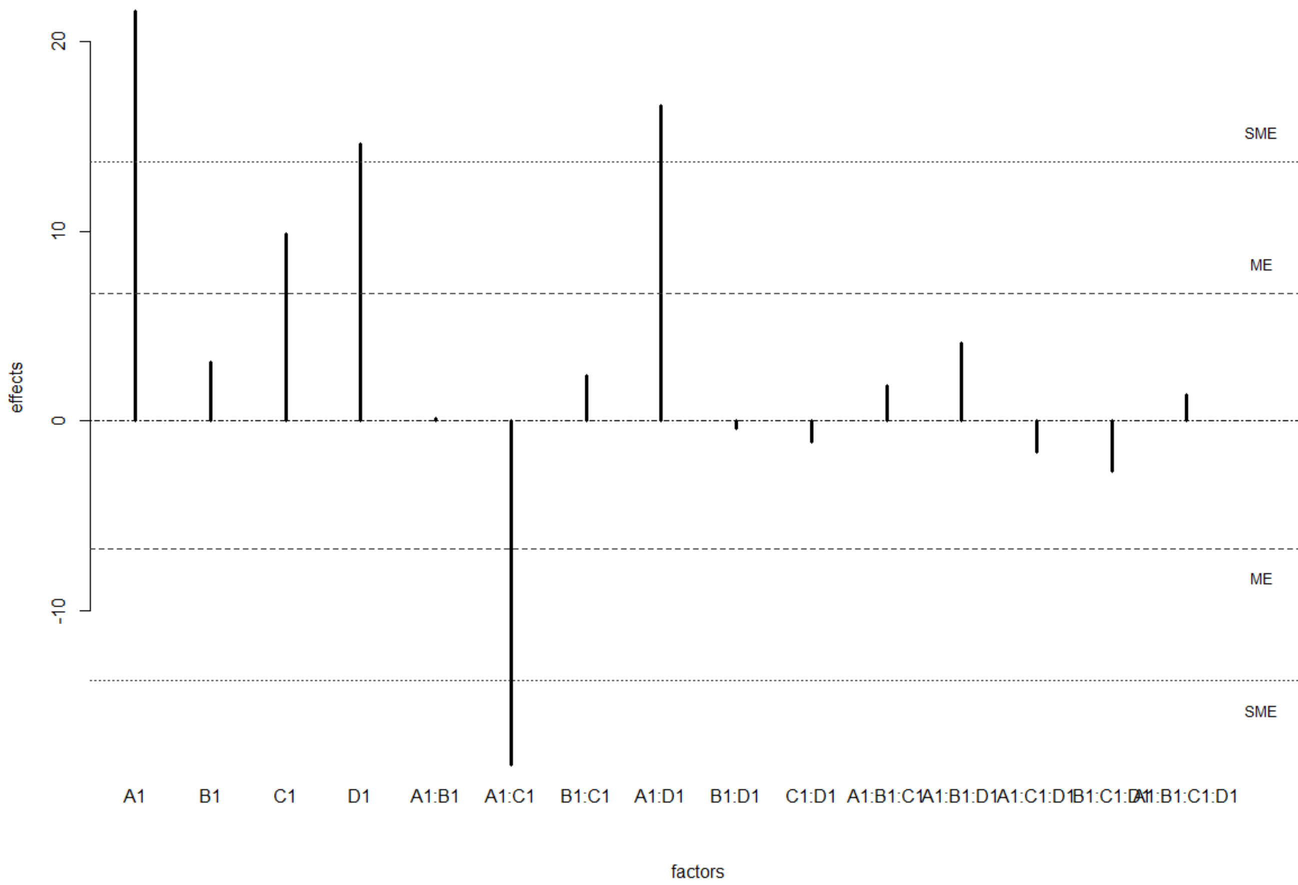
Warning message:
In anova.lm(fit) :
ANOVA F-tests on an essentially perfect fit are unreliable

> DanielPlot(fit)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(BsMD)
> LenthPlot(fit)
   alpha       PSE         ME       SME
0.050000 2.625000 6.747777 13.698960
```

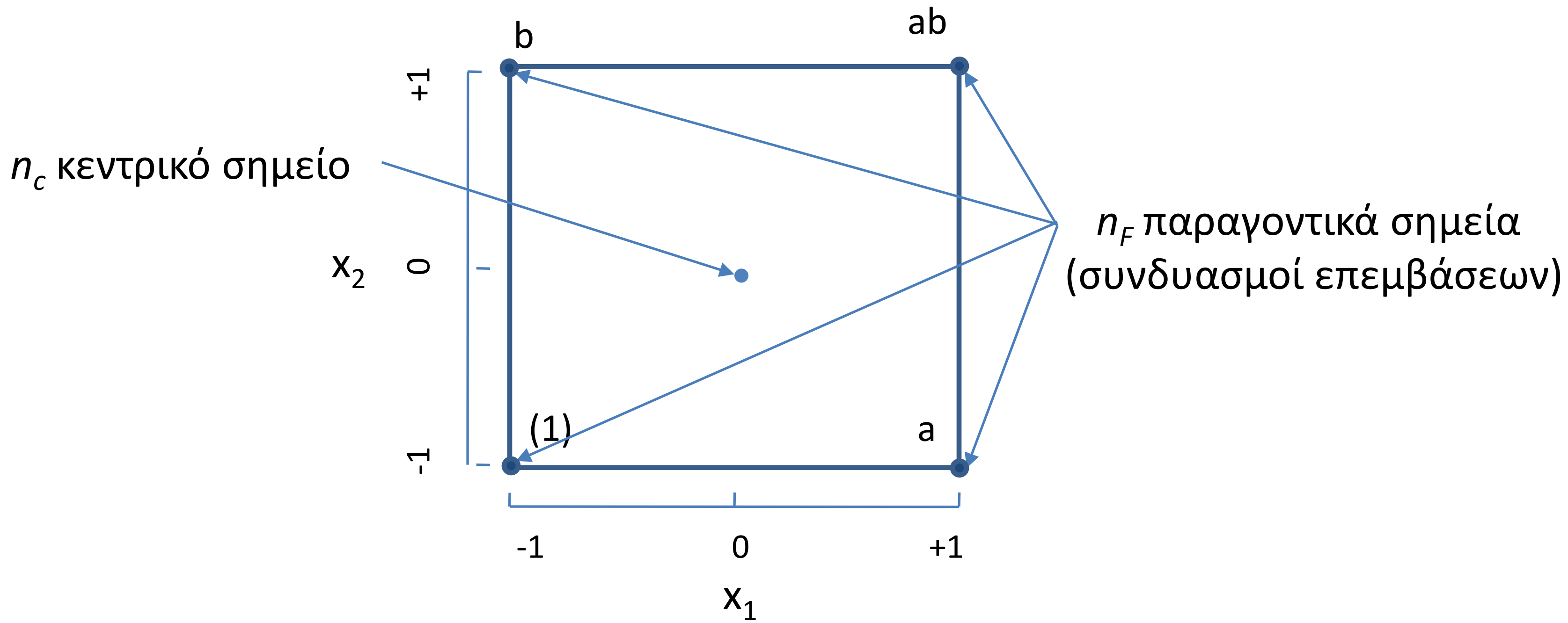


```
> fit=lm(Y~A+C+D+A*C+A*D+C*D+A*C*D, data)
> summary(fit)

Call:  lm.default(formula = Y ~ A + C + D + A*C + A*D + C*D + A*C*D, data = data)
Residuals:
Min     1Q   Median    3Q    Max
-6.0   -2.5    0.0     2.5    6.0

Coefficients:
             Estimate   Std. Error  t value    Pr(>|t|)
(Intercept)   70.0625     1.1842     59.164    7.40e-12 ***
A1            10.8125     1.1842      9.131    1.67e-05 ***
C1             4.9375     1.1842      4.169    0.003124 **
D1             7.3125     1.1842      6.175    0.000267 ***
A1:C1         -9.0625     1.1842     -7.653    6.00e-05 ***
A1:D1          8.3125     1.1842      7.019    0.000110 ***
C1:D1         -0.5625     1.1842     -0.475    0.647483
A1:C1:D1      -0.8125     1.1842     -0.686    0.512032
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.737 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9687,      Adjusted R-squared:  0.9413
F-statistic: 35.35 on 7 and 8 DF,  p-value: 2.119e-05
```

```
> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
A          1 1870.56  1870.56  83.3677 1.667e-05 ***
C          1  390.06   390.06  17.3844 0.0031244 **
D          1  855.56   855.56  38.1309 0.0002666 ***
A:C        1 1314.06  1314.06  58.5655 6.001e-05 ***
A:D        1 1105.56  1105.56  49.2730 0.0001105 ***
C:D        1    5.06     5.06   0.2256 0.6474830
A:C:D      1   10.56    10.56   0.4708 0.5120321
Residuals  8  179.50    22.44
---
 Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Προσθήκη σημείων στο κέντρο σε 2^k σχεδιασμό

Με τα 2 επίπεδα υπάρχει πιθανότητα να μην ισχύει η υπόθεση περί γραμμικότητας. Με την προσθήκη κεντρικών σημείων σε ένα σχεδιασμό 2^2 υπάρχει προστασία ενάντια της καμπυλότητας καθώς επίσης και μία ανεξάρτητη εκτίμηση του σφάλματος.



Το άθροισμα τετραγώνων για την καμπυλότητα, με έναν βαθμό ελευθερίας, υπολογίζεται:

$$SS_{Curvature} = \frac{n_F n_C \left(\bar{y}_F - \bar{y}_C\right)^2}{n_F + n_C}$$

όπου n_F και $\bar{y}_F$ ο αριθμός και ο μέσος των κεντρικών σημείων.

Το μοντέλο είναι το εξής:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon$$

και ελέγχεται η υπόθεση:

$$H_0: \ \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} = 0 \qquad H_1: \ \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} \neq 0$$

Παράδειγμα : Στον σχεδιασμό 2^4 με μία επανάληψη προστεθούμε τα κεντρικά σημεία 73, 75, 66 και 69.

$$MT_E = \frac{AT_E}{n_C - 1} = \frac{\sum_{\text{center points}} (y_i - \bar{y}_c)^2}{n_C - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{4} (y_\text{i} - 70{,}75)^2}{4-1} = \frac{48{,}75}{3} = 16{,}25$$

$$SS_{\text{Pure quadratic}} = \frac{n_F n_C \left(\bar{y}_F - \bar{y}_C\right)^2}{n_F + n_C} = \frac{(16)(4)(70{,}06 - 70{,}75)^2}{16+4} = 1{,}51$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> datac=add.center(data, 4)
> datac
```

	A	B	C	D	Y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	-1	71
3	-1	1	-1	-1	48
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	-1	68
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	-1	65
9	-1	-1	-1	1	43
10	1	-1	-1	1	100
11	-1	1	-1	1	45
12	1	1	-1	1	104
13	-1	-1	1	1	75
14	1	-1	1	1	86
15	-1	1	1	1	70
16	1	1	1	1	96
17	0	0	0	0	NA
18	0	0	0	0	NA
19	0	0	0	0	NA
20	0	0	0	0	NA

class=design, type= full factorial.center

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(45,71,48,65,68,60,80,65,43,100,45,104,75,86,70,96,73,75,66,69)
> datac=add.response(datac, Y, replace=TRUE)
> datac
```

	A	B	C	D	Y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	-1	71
3	-1	1	-1	-1	48
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	-1	68
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	-1	65
9	-1	-1	-1	1	43
10	1	-1	-1	1	100
11	-1	1	-1	1	45
12	1	1	-1	1	104
13	-1	-1	1	1	75
14	1	-1	1	1	86
15	-1	1	1	1	70
16	1	1	1	1	96
17	0	0	0	0	73
18	0	0	0	0	75
19	0	0	0	0	66
20	0	0	0	0	69

class=design, type= full factorial.center

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D)^4, datac)
> library(alr3)
> pureErrorAnova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	1870.56	1870.56	115.1115	0.001731	**
B	1	39.06	39.06	2.4038	0.218821	
C	1	390.06	390.06	24.0038	0.016273	*
D	1	855.56	855.56	52.6500	0.005401	**
A:B	1	0.06	0.06	0.0038	0.954450	
A:C	1	1314.06	1314.06	80.8654	0.002903	**
A:D	1	1105.56	1105.56	68.0346	0.003731	**
B:C	1	22.56	22.56	1.3885	0.323620	
B:D	1	0.56	0.56	0.0346	0.864273	
C:D	1	5.06	5.06	0.3115	0.615686	
A:B:C	1	14.06	14.06	0.8654	0.420856	
A:B:D	1	68.06	68.06	4.1885	0.133202	
A:C:D	1	10.56	10.56	0.6500	0.479099	
B:C:D	1	27.56	27.56	1.6962	0.283757	
A:B:C:D	1	7.56	7.56	0.4654	0.544069	
Residuals	4	50.26	12.57			
Lack of fit	1	1.51	1.51	0.0931	0.780243	
Pure Error	3	48.75	16.25			

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Άσκηση 1. Πραγματοποιήθηκε ένα 2^3 παραγοντικός σχεδιασμός με τρεις επαναλήψεις και μετρήθηκε η διάρκεια ζωής ενός εργαλείου. Εκτιμήστε τις κύριες επιδράσεις και αλληλοεπιδράσεις των παραγόντων, ελέγξτε την σημαντικότητα τους και να αξιολογήσετε τα αποτελέσματα.

A (cutting speed)	**B (tool geometry)**	**C (cutting angle)**	**Treatment Combination**	**(Hours)**		
				I	**II**	**III**
-	-	-	(1)	22	31	25
+	-	-	a	32	43	29
-	+	-	b	35	34	50
+	+	-	ab	55	47	46
-	-	+	c	44	45	38
+	-	+	ac	40	37	36
-	+	+	bc	60	50	54
+	+	+	abc	39	41	47

Άσκηση 2. Πραγματοποιήθηκε ένα 2^4 παραγοντικός σχεδιασμός με μία επανάληψη και μετρήθηκε η μεταβλητή UEC (unused error correction). Εκτιμήστε τις κύριες επιδράσεις και αλληλοεπιδράσεις των παραγόντων, ελέγξτε την σημαντικότητα τους και να αξιολογήσετε τα αποτελέσματα.

Laser Power (9 and 13 W)	**Pulse Frequency** (4000 and 12,000 Hz),	**Cell Size** (0.07 and 0.12 in.),	**Writing Speed** (10 and 20 in./sec),	**UEC**
-1	-1	-1	-1	0.75
1	-1	-1	-1	0.98
-1	1	-1	-1	0.72
1	1	-1	-1	0.98
-1	-1	1	-1	0.63
1	-1	1	-1	0.67
-1	1	1	-1	0.65
1	1	1	-1	0.8
-1	-1	-1	1	0.6
1	-1	-1	1	0.81
-1	1	-1	1	0.63
1	1	-1	1	0.79
-1	-1	1	1	0.56
1	-1	1	1	0.65
-1	1	1	1	0.55
1	1	1	1	0.69

Άσκηση 3. Πραγματοποιήθηκε ένα 2^5 παραγοντικός σχεδιασμός με μία επανάληψη. Εκτιμήστε τις κύριες επιδράσεις και αλληλοεπιδράσεις των παραγόντων, ελέγξτε την σημαντικότητα τους και να αξιολογήσετε τα αποτελέσματα. Επαναλάβετε την ανάλυση προσθέτοντας τα κεντρικά σημεία 68, 74, 76 και 70.

(1)	7	d	8	e	8	de	6
a	9	ad	10	ae	12	ade	10
b	34	bd	32	be	35	bde	30
ab	55	abd	50	abe	52	abde	53
c	16	cd	18	ce	15	cde	15
ac	20	acd	21	ace	22	acde	20
bc	40	bcd	44	bce	45	bcde	41
abc	60	abcd	61	abce	65	abcde	63