ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Παραγοντικοί Σχεδιασμοί $3^k$

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

## $3^κ$ Παραγοντικοί σχεδιασμοί

Οι σχεδιασμοί $3^κ$ είναι μία κατηγορία παραγοντικών σχεδιασμών όπου κάθε παράγοντας έχει τρία επίπεδα. Τα επίπεδα μπορούν να κωδικοποιηθούν ως -1 (χαμηλό επίπεδο), 0 (μεσαίο επίπεδο) και +1 (υψηλό επίπεδο) ή εναλλακτικά ως 0, 1 και 2.

Είναι χρήσιμοι σχεδιασμοί στην βιομηχανική έρευνα και χρησιμοποιούνται κυρίως όταν μας ενδιαφέρει η επίδραση της καμπυλότητας ενός ποσοτικού παράγοντα στη συνάρτηση απόκρισης. Η προσθήκη του τρίτου επιπέδου επιτρέπει η σχέση μεταξύ της απόκρισης και κάθε παράγοντα να περιγράφεται από ένα μοντέλο δεύτερης τάξης.

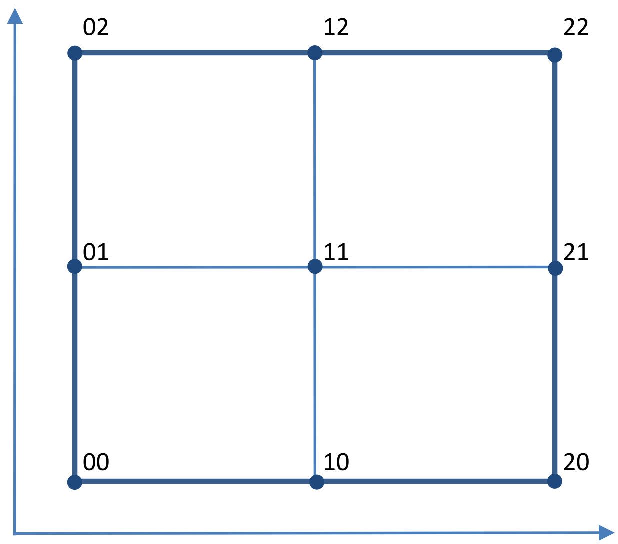
$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon_j$$

# *Πειραματικοί Σχεδιασμοί*

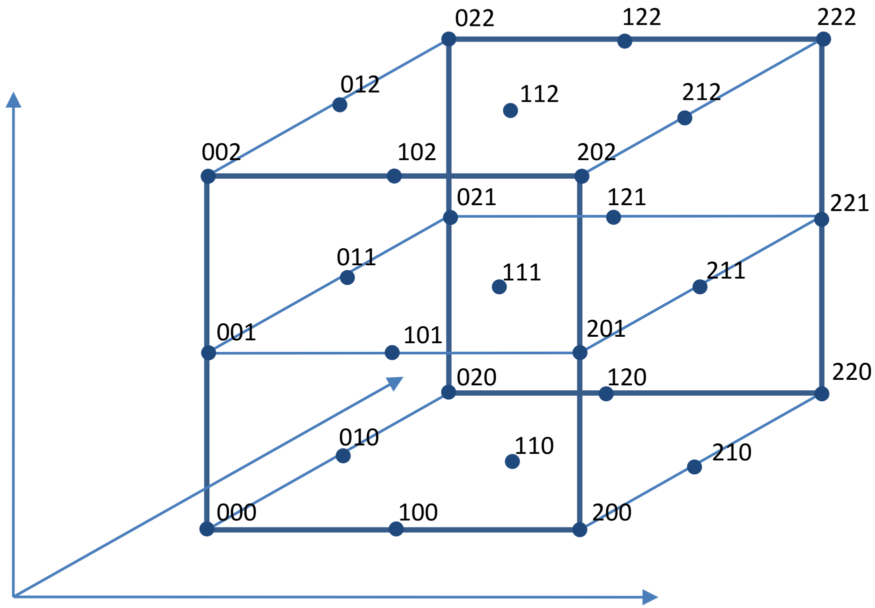
Το σημαντικότερο μειονέκτημα των σχεδιασμών $3^κ$ είναι ότι όταν ο αριθμός των παραγόντων k είναι μεγάλος, αυξάνεται πάρα πολύ το μέγεθος του πειράματος (9, 27, 81, ...).

Ο σχεδιασμός $3^k$ δεν είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για αποδώσουμε το μοντέλο δεύτερης τάξης, όπου τα σχέδια επιφανειακής απόκρισης υπερτερούν, ενώ οι σχεδιασμοί $2^k$ με την προσθήκη κεντρικών σημείων παρέχουν μια καλή ένδειξη της καμπυλότητας και επιτρέπουν να διατηρηθεί το μέγεθος και η πολυπλοκότητα του σχεδιασμού σε χαμηλό επίπεδο.

## Συνδυασμοί επεμβάσεων σε $3^k$ σχεδιασμό




$3^2$ σχεδιασμός, 9 εκτελέσεις




$3^3$ σχεδιασμός, 27 εκτελέσεις

**Παράδειγμα:** Παραγοντικός σχεδιασμός $3^2$ (Montgomery, $8^{th}$ ed.)

| **Παράγοντας A** | **Παράγοντας B** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **125** | **150** | **175** | $Y_{i..}$ |
| **15** | -2 | -3 | 2 | -1 |
| | -1 | 0 | 3 | |
| $Y_{1j.}$ | -3 | -3 | 5 | |
| **20** | 0 | 1 | 4 | 16 |
| | 2 | 3 | 6 | |
| $Y_{2j.}$ | 2 | 4 | 10 | |
| **25** | -1 | 5 | 0 | 9 |
| | 0 | 6 | -1 | |
| $Y_{3j.}$ | -1 | 11 | -1 | |
| $Y_{.j.}$ | -2 | 12 | 14 | $Y_{...} = 24$ |

**Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας**

| **Πηγή παρ/τας** | **ΒΕ** | **ΑΤ** | **ΜΤ** | **F** | **Pr(>F)** |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | 2 | 24,33 | 12,16 | 8,423 | 0,00868 ** |
| Β | 2 | 25,33 | 12,66 | 8,769 | 0,00770 ** |
| ΑΒ | 4 | 61,33 | 15,33 | 10,6154 | 0,001844 |
| Υπόλοιπο | 9 | 13,00 | 1,44 | | |
| Σύνολο | 17 | 124,00 | | | |

Αν οι παράγοντες είναι ποσοτικοί και τα επίπεδα ισαπέχουν, οι κύριες επιδράσεις μπορούν να διαχωριστούν σε 2 συνιστώσες, μία γραμμική (L) και μία τετραγωνική (Q), με ένα βαθμό ελευθερίας η καθεμία.

| **Συντελεστές ορθογώνιων αντιθέσεων** | |
|---|---|
| **Γραμμικός (L)** | **Τετραγωνικός (Q)** |
| -1 | 1 |
| 0 | -2 |
| 1 | 1 |

$$A_L = \sum_{i=1}^{a} c_i y_{i..} = -1*(-1)+0*16+1*9=10$$

$$AT_{A_L} = (\sum_{i=1}^{a} c_i y_{i..})^2 / bn\sum_{i=1}^{a} c_i^2 = (10)^2/3*2*2=8,33$$

$$A_Q = \sum_{i=1}^{a} c_i y_{i..} = 1*(-1)+(-2)*16+1*9=-24$$

$$AT_{A_Q} = (\sum_{i=1}^{a} c_i y_{i..})^2 / bn\sum_{i=1}^{a} c_i^2 = (-24)^2/3*2*2=16$$

$$B_L = \sum_{j=1}^{b} c_j y_{.j.} = -1*(-2)+0*12+1*14=16$$

$$AT_{B_L} = (\sum_{j=1}^{b} c_j y_{.j.})^2 / an\sum_{j=1}^{b} c_j^2 = (16)^2/3*2*6=21,33$$

$$B_Q = \sum_{j=1}^{b} c_j y_{.j.} = 1*(-2)+(-2)*12+1*14=-12$$

$$AT_{B_Q} = (\sum_{j=1}^{b} c_j y_{.j.})^2 / an\sum_{j=1}^{b} c_j^2 = (-12)^2/3*2*6=4$$

Η αλληλεπίδραση δύο παραγόντων διαχωρίζεται σε 4 συνιστώσες με 1 βαθμό ελευθερίας η καθεμία.

| | **$B_L$** | | |
|---|---|---|---|
| **$A_L$** | **-1** | **0** | **1** |
| **1** | -1 | 0 | 1 |
| **0** | 0 | 0 | 0 |
| **-1** | 1 | 0 | -1 |

$$AB_{LxL}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}y_{ij.}=1*(-3)+0*(-3)+(-1)5+0*2+0*4+0*10+(-1)*(-1)+0*11+1*(-1)=-8$$

$$AB_{LxL}=(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}y_{ij.})^2/n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}^2=(-8)^2/2*4=8$$

| | **$B_Q$** | | |
|---|---|---|---|
| **$A_L$** | **1** | **-2** | **1** |
| **1** | 1 | -2 | 1 |
| **0** | 0 | 0 | 0 |
| **-1** | -1 | 2 | -1 |

$$AB_{LxQ}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}y_{ij.}=(-1)*(-3)+2*(-3)+(-1)5+0*2+0*4+0*10+1*(-1)+(-2)*11+1*(-1)=-8$$

$$AB_{LxQ}=(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}y_{ij.})^2/n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}c_{ij}^2=(-32)^2/2*12=42,67$$

| | $B_L$ | | |
|---|---|---|---|
| **$A_Q$** | **-1** | **0** | **1** |
| **1** | -1 | 0 | 1 |
| **-2** | 2 | 0 | -2 |
| **1** | -1 | 0 | 1 |

$$AB_{QxL} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij} y_{ij.} = (-1)*(-3) + 0*(-3) + 1*5 + 2*2 + 0*4 + (-2)*10 + (-1)*(-1) + 0*11 + 1*(-1) = -8$$

$$AB_{QxL} = (\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij} y_{ij.})^2 / n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij}^2 = (-8)^2 / 2*12 = 2{,}67$$

| | $B_Q$ | | |
|---|---|---|---|
| **$A_Q$** | **1** | **-2** | **1** |
| **1** | 1 | -2 | 1 |
| **-2** | -2 | 4 | -2 |
| **1** | 1 | -2 | 1 |

$$AB_{QxQ} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij} y_{ij.} = 1*(-3) + (-2)*(-3) + 1*5 + (-2)*2 + 4*4 + (-2)*10 + 1*(-1) + (-2)*11 + 1*(-1) = -24$$

$$AB_{QxQ} = (\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij} y_{ij.})^2 / n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} c_{ij}^2 = (-24)^2 / 2*36 = 8$$

## Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

| **Πηγή παρ/τας** | **ΒΕ** | **ΑΤ** | **ΜΤ** | **F** | **Pr(>F)** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 24,33 | 12,16 | 8,423 | 0,00868 ** |
| ($A_L$) | 1 | (8,33) | 8,33 | 5,7692 | 0,0397723* |
| ($A_Q$) | 1 | (16,00) | 16,00 | 11,0769 | 0,0088243** |
| B | 2 | 25,33 | 12,66 | 8,769 | 0,00770 ** |
| ($B_L$) | 1 | (21,33) | 21,33 | 14,7692 | 0,0039479** |
| ($B_Q$) | 1 | (4,00) | 4,00 | 2,7692 | 0,1304507 |
| AB | 4 | 61,33 | 15,33 | 10,6154 | 0,001844 |
| ($A_LB_L$) | 1 | (8,00) | 8,00 | 5,5385 | 0,0430650* |
| ($A_LB_Q$) | 1 | (42,66) | 42,66 | 29,5385 | 0,0004137*** |
| ($A_QB_L$) | 1 | (2,66) | 2,66 | 1,8462 | 0,2073056 |
| ($A_QB_Q$) | 1 | (8,00) | 8,00 | 5,5385 | 0,0430650* |
| Υπόλοιπο | 9 | 13,00 | 1,44 | | |
| Σύνολο | 17 | 124,00 | | | |

## Αλγόριθμός του Yates για το $3^2$ σχεδιασμό

| Συνδυασμός επεμβάσεων | Y | 1 | 2 | Διαιρέτης | | Επίδραση | Άθροισμα Τετραγώνων $(3)^2$/Διαιρέτη |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | -3 | -2[a] | 24 | ---- | ---- | ----- | ---- |
| <u>1</u>0 | 2 | 12 | 10 | $2^1 x 3^1 x 2$ [d] | 12 | $A_{\underline{L}}$ | 8,33 |
| 20 | -1 | 14 | -24 | $2^1 x 3^2 x 2$ | 36 | $A_Q$ | 16,00 |
| 01 | -3 | 2[b] | 16 | $2^1 x 3^1 x 2$ | 12 | $B_L$ | 21,33 |
| 11 | 4 | 14 | -8 | $2^2 x 3^0 x 2$ | 8 | $AB_{LxL}$ | 8,00 |
| 21 | 11 | -6 | -8 | $2^2 x 3^1 x 2$ | 24 | $AB_{QxL}$ | 2,67 |
| 02 | 5 | -8[c] | -12 | $2^1 x 3^2 x 2$ | 36 | $B_Q$ | 4,00 |
| 12 | 10 | 0 | -32 | $2^2 x 3^1 x 2$ | 24 | $AB_{LxQ}$ | 42,67 |
| 22 | -1 | -16 | -24 | $2^2 x 3^2 x 2$ | 72 | $AB_{QxQ}$ | 8,00 |

[a] (-3) + (2) + (-1) = -2, [b] - (-3) + 0*(2) + (-1) = 2 και [c] (-3) - 2*(2) + (-1) = -8
[d] $2^r x 3^t x n$, όπου r ο αριθμός των παραγόντων στον συνδυασμό επεμβάσεων με μεσαίο ή υψηλό επίπεδο (**<u>1</u>**0), t ο αριθμός των παραγόντων του πειράματος (k=2) μείον τον αριθμό των γραμμικών όρων στην επίδραση ($A_{\underline{L}}$) και n ο αριθμός των επαναλήψεων

Η αλληλεπίδραση δύο παραγόντων μπορεί επίσης να διαχωριστεί σε 2 συνιστώσες (AB και $AB^2$) με 2 βαθμούς ελευθερίας η καθεμία, οι οποίες δεν έχουν πραγματική σημασία αλλά χρησιμοποιούνται στην κατασκευή άλλων σχεδιασμών. Ο Yates ονόμασες τις δύο συνιστώσες ως I και J συνιστώσες της αλληλεπίδρασης ($I(AB)=AB^2$ και $J(AB)=AB$).

| | **B** | | | **Σύνολα** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **0** | **1** | **2** | **I** | **J** |
| **0** | -3 | -3 | 5 | 0 | 8 |
| **1** | 2 | 4 | 10 | 6 | -2 |
| **2** | -1 | 11 | -1 | 18 | 18 |
| | | | | $AB^2$ = 28 | AB = 33,34 |

$$AB^2 = I(AB^2) = \frac{(0)^2 + (6)^2 + (18)^2}{6} - \frac{(24)^2}{18} = 28$$

$$AB = J(AB) = \frac{(8)^2 + (-2)^2 + (18)^2}{6} - \frac{(24)^2}{18} = 33{,}34$$

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(DoE.base)
> data=fac.design(3, 2, replications=2,randomize=F)
creating full factorial with 9 runs ...

> data
   run.no run.no.std.rp A B Blocks
1       1           1.1 1 1     .1
2       2           2.1 2 1     .1
3       3           3.1 3 1     .1
4       4           4.1 1 2     .1
5       5           5.1 2 2     .1
6       6           6.1 3 2     .1
7       7           7.1 1 3     .1
8       8           8.1 2 3     .1
9       9           9.1 3 3     .1
10     10           1.2 1 1     .2
11     11           2.2 2 1     .2
12     12           3.2 3 1     .2
13     13           4.2 1 2     .2
14     14           5.2 2 2     .2
15     15           6.2 3 2     .2
16     16           7.2 1 3     .2
17     17           8.2 2 3     .2
18     18           9.2 3 3     .2
class=design, type= full factorial
NOTE: columns run.no and run.no.std.rp  are annotation,  not part of the data frame
```

# *Πειραματικοί Σχεδιασμοί*

```
> Y=c(-2,0,-1,-3,1,5,2,4,0,-1,2,0,0,3,6,3,6,-1)
> data=add.response(data, Y)
> data
   run.no run.no.std.rp A B Blocks  Y
1       1           1.1 1 1     .1 -2
2       2           2.1 2 1     .1  0
3       3           3.1 3 1     .1 -1
4       4           4.1 1 2     .1 -3
5       5           5.1 2 2     .1  1
6       6           6.1 3 2     .1  5
7       7           7.1 1 3     .1  2
8       8           8.1 2 3     .1  4
9       9           9.1 3 3     .1  0
10     10           1.2 1 1     .2 -1
11     11           2.2 2 1     .2  2
12     12           3.2 3 1     .2  0
13     13           4.2 1 2     .2  0
14     14           5.2 2 2     .2  3
15     15           6.2 3 2     .2  6
16     16           7.2 1 3     .2  3
17     17           8.2 2 3     .2  6
18     18           9.2 3 3     .2 -1
class=design, type= full factorial
NOTE: columns run.no and run.no.std.rp  are annotation,  not part of the data frame
```

# *Πειραματικοί Σχεδιασμοί*

```
> fit=lm(Y~(A+B)^2, data)
> anova(fit)

Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq   Mean Sq   F value   Pr(>F)
A          2  24.333   12.1667    8.4231   0.008676 **
B          2  25.333   12.6667    8.7692   0.007703 **
A:B        4  61.333   15.3333   10.6154   0.001844 **
Residuals  9 13.000  1.4444
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

# *Πειραματικοί Σχεδιασμοί*

```
> AL=rep(c(-1,0,1),6)
> AQ=rep(c(1,2,1),6)
> BL=rep(c(-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1),2)
> BQ=rep(c(1,1,1,2,2,2,1,1,1),2)
> ALBL=AL*BL
> ALBQ=AL*BQ
> AQBL=AQ*BL
> AQBQ=AQ*BQ
> data1=cbind(data, AL, AQ, BL, BQ, ALBL, ALBQ, AQBL, AQBQ)
```

> data1

| | A | B | Blocks | Y | AL | AQ | BL | BQ | ALBL | ALBQ | AQBL | AQBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | .1 | -2 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | .1 | 0 | 0 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | -2 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | .1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | .1 | -3 | -1 | 1 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 2 |
| 5 | 2 | 2 | .1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 6 | 3 | 2 | .1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 7 | 1 | 3 | .1 | 2 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 8 | 2 | 3 | .1 | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 9 | 3 | 3 | .1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | .2 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 11 | 2 | 1 | .2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | -2 | 2 |
| 12 | 3 | 1 | .2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 13 | 1 | 2 | .2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 2 |
| 14 | 2 | 2 | .2 | 3 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 15 | 3 | 2 | .2 | 6 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 16 | 1 | 3 | .2 | 3 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 17 | 2 | 3 | .2 | 6 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 18 | 3 | 3 | .2 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
> fit=lm(Y~AL+AQ+BL+BQ+ALBL+ALBQ+AQBL+AQBQ, data1)
> anova(fit)
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value   Pr(>F)
AL         1   8.333   8.333    5.7692  0.0397723 *
AQ         1  16.000  16.000   11.0769  0.0088243 **
BL         1  21.333  21.333   14.7692  0.0039479 **
BQ         1   4.000   4.000    2.7692  0.1304507
ALBL       1   8.000   8.000    5.5385  0.0430650 *
ALBQ       1  42.667  42.667   29.5385  0.0004137 ***
AQBL       1   2.667   2.667    1.8462  0.2073056
AQBQ       1   8.000   8.000    5.5385  0.0430650 *
Residuals  9  13.000   1.444
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

**Παράδειγμα:** Παραγοντικός σχεδιασμός $3^3$ (Montgomery, 8th ed.)

| **Παράγοντας C** | **Παράγοντας A** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | | | **2** | | | **3** | | |
| | **Παράγοντας B** | | | | | | | | |
| | **1** | **2** | **3** | **1** | **2** | **3** | **1** | **2** | **3** |
| **1** | -35 | -45 | -40 | 17 | -65 | 20 | -39 | -55 | 15 |
| | -25 | -60 | 15 | 24 | -58 | 4 | -35 | -67 | -30 |
| **2** | 110 | -10 | 80 | 55 | -55 | 110 | 90 | -28 | 110 |
| | 75 | 30 | 54 | 120 | -44 | 44 | 113 | -26 | 135 |
| **3** | 4 | -40 | 31 | -23 | -64 | -20 | -30 | -61 | 54 |
| | 5 | -30 | 36 | -5 | -62 | -31 | -55 | -52 | 4 |

## Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

| Πηγή Παρ/τας | ΒΕ | Άθροισμα Τετραγώνων | Μέσο Τετράγωνο | F-Ratio | P-Value |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 994 | 497 | 1,1650 | 0,3271016 |
| B | 2 | 61190 | 30595 | 71,7354 | 1,571e-11 *** |
| AB | 4 | 6301 | 1575 | 3,6934 | 0,0159498 * |
| C | 2 | 69105 | 34553 | 81,0145 | 3,893e-12 *** |
| AC | 4 | 7514 | 1878 | 4,4044 | 0,0071866 ** |
| BC | 4 | 12854 | 3214 | 7,5348 | 0,0003269 *** |
| ABC | 8 | 4629 | 579 | 1,3566 | 0,2594959 |
| Σφάλμα | 27 | 11516 | 427 | | |
| Σύνολο | 53 | 174102 | | | |

## Αλγόριθμός του Yates για το $3^3$ σχεδιασμό

| Συνδυασμός επεμβάσεων | Y | 1 | 2 | 3 | Διαιρέτης | | Επίδραση | Άθροισμα Τετραγώνων $(3)^2$/Διαιρέτη |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | -60 | -93 | -459 | 165 | ---- | ---- | ----- | ---- |
| 100 | 41 | -350 | 963 | -112 | $2^1 x3^2 x2$ | 36 | $A_L$ | 348,44 |
| 200 | -74 | -16 | -339 | 264 | $2^1 x3^3 x2$ | 108 | $A_Q$ | 645,33 |
| 010 | -105 | 563 | -21 | 225 | $2^1 x3^2 x2$ | 36 | $B_L$ | 1406,25 |
| 110 | -123 | -133 | 55 | 202 | $2^2 x3^1 x2$ | 24 | $AB_{LxL}$ | 1700,17 |
| 210 | -122 | 533 | -146 | 408 | $2^2 x3^2 x2$ | 72 | $AB_{QxL}$ | 2312,00 |
| 020 | -25 | -104 | -285 | 2541 | $2^1 x3^3 x2$ | 108 | $B_Q$ | 59784,08 |
| 120 | 24 | -309 | 273 | 290 | $2^2 x3^2 x2$ | 72 | $AB_{LxQ}$ | 1168,06 |
| 220 | -15 | 74 | 276 | -492 | $2^2 x3^3 x2$ | 216 | $AB_{QxQ}$ | 1120,67 |
| 001 | 185 | -14 | 77 | 120 | $2^1 x3^2 x2$ | 36 | $C_L$ | 400,00 |
| 101 | 175 | -17 | -30 | -125 | $2^2 x3^1 x2$ | 24 | $AC_{LxL}$ | 651,04 |
| 201 | 203 | 10 | 178 | 561 | $2^2 x3^2 x2$ | 72 | $AC_{QxL}$ | 4371,13 |
| 011 | 20 | 18 | 24 | 101 | $2^2 x3^1 x2$ | 24 | $BC_{LxL}$ | 425,04 |
| 111 | -99 | -74 | 93 | 61 | $2^2 x3^0 x2$ | 16 | $ABC_{LxLxL}$ | 232,56 |
| 211 | -54 | 111 | 85 | 119 | $2^3 x3^1 x2$ | 48 | $ABC_{QxLxL}$ | 295,02 |
| 021 | 134 | -94 | 128 | -3 | $2^2 x3^2 x2$ | 72 | $BC_{QxL}$ | 0,13 |
| 121 | 154 | -43 | 33 | -47 | $2^3 x3^1 x2$ | 48 | $ABC_{LxQxL}$ | 46,02 |
| 221 | 245 | -9 | 247 | 411 | $2^3 x3^2 x2$ | 144 | $ABC_{QxQxL}$ | 1173,06 |
| 002 | 9 | -216 | 591 | -2724 | $2^1 x3^3 x2$ | 108 | $C_Q$ | 68705,33 |
| 102 | -28 | 19 | 1362 | -277 | $2^2 x3^1 x2$ | 72 | $AC_{LxQ}$ | 1065,68 |
| 202 | -85 | -88 | 588 | -555 | $2^2 x3^3 x2$ | 216 | $AC_{QxQ}$ | 1426,04 |
| 012 | -70 | 38 | 30 | 315 | $2^2 x3^2 x2$ | 72 | $BC_{LxQ}$ | 1378,13 |
| 112 | -126 | 164 | 277 | -77 | $2^3 x3^1 x2$ | 48 | $ABC_{LxLxQ}$ | 123,52 |
| 212 | -113 | 71 | -17 | 309 | $2^3 x3^2 x2$ | 144 | $ABC_{QxLxQ}$ | 663,06 |
| 022 | 67 | -20 | -342 | -1545 | $2^2 x3^3 x2$ | 216 | $BC_{QxQ}$ | 11051,04 |
| 122 | -51 | 69 | -219 | -541 | $2^3 x3^2 x2$ | 144 | $ABC_{LxQxQ}$ | 2032,51 |
| 222 | 58 | 227 | 69 | 165 | $2^3 x3^3 x2$ | 432 | $ABC_{QxQxQ}$ | 63,02 |

Οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων μπορούν να διαχωριστούν στα συστατικά I και J, τα οποία είναι AB, $AB^2$, AC, $AC^2$, BC, και $BC^2$, με δύο βαθμούς ελευθερίας.

| | | **A** | | | **Σύνολα** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **B** | 1 | 2 | 3 | **I** | **J** |
| 1 | 1 | -60 | 41 | -74 | -198 | -222 |
| | 2 | -105 | -123 | -122 | -106 | -79 |
| | 3 | -25 | 24 | -15 | -155 | -158 |
| 2 | 1 | 185 | 175 | 203 | 331 | 238 |
| | 2 | 20 | -99 | -54 | 255 | 440 |
| | 3 | 134 | 154 | 245 | 377 | 285 |
| 3 | 1 | 9 | -28 | -85 | -59 | -144 |
| | 2 | -70 | -126 | -113 | -74 | -40 |
| | 3 | 67 | -51 | 58 | -206 | -155 |

Οι αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων ABC μπορούν να διαχωριστούν σε τέσσερα συστατικά W, X, Y και Z ($AB^2C^2$, $AB^2C$, $ABC^2$ και ABC αντίστοιχα).

| | | | | **Σύνολα** | | | | | | **Σύνολα** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **I(AB)** | | | **I** | **J** | **C** | **J(AB)** | | | **I** | **J** |
| 1 | -198 | -106 | -155 | -149 | 41 | 1 | -222 | -79 | -158 | 63 | 138 |
| 2 | 331 | 255 | 377 | 212 | 19 | 2 | 238 | 440 | 285 | 62 | 4 |
| 3 | -59 | -74 | -206 | 102 | 105 | 3 | -144 | -40 | -155 | 40 | 23 |

$$I[I(AB)xC] = AB^2C^2 = W(ABC) = \frac{(-149)^2 + (212)^2 + (102)^2}{8} - \frac{(165)^2}{54} = 3804{,}11$$

$$J[I(AB)xC] = AB^2C^2 = X(ABC) = \frac{(41)^2 + (19)^2 + (105)^2}{8} - \frac{(165)^2}{54} = 221{,}77$$

$$I[J(AB)xC] = ABC^2 = Y(ABC) = \frac{(63)^2 + (62)^2 + (40)^2}{8} - \frac{(165)^2}{54} = 18{,}77$$

$$J[J(AB)xC] = ABC = Z(ABC) = \frac{(138)^2 + (4)^2 + (23)^2}{8} - \frac{(165)^2}{54} = 584{,}11$$

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=fac.design(3, 3, replications= 2, randomize=FALSE)
creating full factorial with 27 runs ...

> design
   run.no run.no.std.rp A B C Blocks
1       1           1.1 1 1 1     .1
2       2           2.1 2 1 1     .1
3       3           3.1 3 1 1     .1
4       4           4.1 1 2 1     .1
5       5           5.1 2 2 1     .1
6       6           6.1 3 2 1     .1
7       7           7.1 1 3 1     .1
8       8           8.1 2 3 1     .1
……
48     48          21.2 3 1 3     .2
49     49          22.2 1 2 3     .2
50     50          23.2 2 2 3     .2
51     51          24.2 3 2 3     .2
52     52          25.2 1 3 3     .2
53     53          26.2 2 3 3     .2
54     54          27.2 3 3 3     .2
class=design, type= full factorial
NOTE: columns run.no and run.no.std.rp  are annotation,  not part of the data frame
```

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(-35,17,-39,-45,-65,-55,-40,20,15,110,55,90,-10,-55,-28,80,110,110,4,-23,-30,-40,-64,-61,
31,-20,54,-25,24,-35,-60,-58,-67,15,4,-30,75,120,113,30,-44,-26,54,44,135,5,-5,-55,-30,-62,-52,
36,-31,4)
> data=cbind(design, Y)
> data
  A B C Blocks   Y
1  1 1 1     .1 -35
2  2 1 1     .1  17
3  3 1 1     .1 -39
4  1 2 1     .1 -45
5  2 2 1     .1 -65
6  3 2 1     .1 -55
7  1 3 1     .1 -40
8  2 3 1     .1  20
9     3 3 1     .1  15
…
48 3 1 3     .2 -55
49 1 2 3     .2 -30
50 2 2 3     .2 -62
51 3 2 3     .2 -52
52 1 3 3     .2  36
53 2 3 3     .2 -31
54 3 3 3     .2   4
```

```
> fit=lm(Y~A*B*C,data)
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

| | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F) |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 994 | 497 | 1.1650 | 0.3271016 |
| B | 2 | 61190 | 30595 | 71.7354 | 1.571e-11 *** |
| C | 2 | 69105 | 34553 | 81.0145 | 3.893e-12 *** |
| A:B | 4 | 6301 | 1575 | 3.6934 | 0.0159498 * |
| A:C | 4 | 7514 | 1878 | 4.4044 | 0.0071866 ** |
| B:C | 4 | 12854 | 3214 | 7.5348 | 0.0003269 *** |
| A:B:C | 8 | 4629 | 579 | 1.3566 | 0.2594959 |
| Residuals | 27 | 11516 | 427 | | |

---

Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

## Παραγοντικός σχεδιασμός $3^k$ με ανάμειξη

Στον $3^k$ σχεδιασμό μπορεί να σχηματιστούν με ανάμειξη $3^p$ μη πλήρεις ομάδες (τρεις, εννέα, …), όπου $p<k$. Για τον σχηματισμό των ομάδων αναμειγνύονται οι συνιστώσες των αλληλοεπιδράσεων.

Η βασική αντίθεση L είναι η εξής:

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$$

όπου $\alpha_i$ παριστάνει τον εκθέτη του i παράγοντα στην επίδραση που είναι αναμειγμένος και $x_i$ είναι το επίπεδο του i παράγοντα στον συγκεκριμένο συνδυασμό επεμβάσεων. Το $\alpha_i$ παίρνει τιμές 0, 1 και 2, εκτός πρώτο μη μηδενικό $\alpha_i$ που είναι 1 και το $x_i$ παίρνει τιμές 0, 1 και 2.

Οι συνδυασμοί των επεμβάσεων τοποθετούνται στις ομάδες με βάση τις τιμές των βασικών αντιθέσεων L (modulo 3).

Στο παράδειγμα με το πειραματικό σχεδιασμό $3^2$, μπορούμε να αναμείξουμε τις συνιστώσες της διπλής αλληλεπίδρασης $AB^2$ με τις ομάδες. Αν επιλέξουμε την $AB^2$, η ορίζουσα είναι: $L = x_1 + 2x_2$

οι τιμές του L (mod 3) είναι:

$$
\begin{aligned}
00 &: L = 1(0) + 2(0) = 0 = 0\,(mod3) \\
01 &: L = 1(0) + 2(1) = 2 = 2\,(mod3) \\
02 &: L = 1(0) + 2(2) = 4 = 1\,(mod3) \\
10 &: L = 1(1) + 2(0) = 1 = 1\,(mod3) \\
11 &: L = 1(1) + 2(1) = 3 = 0\,(mod3) \\
20 &: L = 1(2) + 2(0) = 2 = 2\,(mod3) \\
21 &: L = 1(2) + 2(1) = 4 = 1\,(mod3) \\
12 &: L = 1(1) + 2(2) = 5 = 2\,(mod3) \\
22 &: L = 1(2) + 2(2) = 3 = 0\,(mod3)
\end{aligned}
$$

| **Ομάδα 1** | **Ομάδα 2** | **Ομάδα 3** |
|---|---|---|
| 0 0 | 1 0 | 0 1 |
| 1 1 | 2 1 | 1 2 |
| 2 2 | 0 2 | 2 0 |

**Παράδειγμα:** Σχεδιασμός $3^2$ σε τρεις ομάδες με ανάμειξη $AB^2$

| | **B** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | **0** | **1** | **2** | Σύνολο |
| **0** | 4 | 5 | 8 | 17 |
| **1** | -2 | -4 | -5 | -11 |
| **2** | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Σύνολο | 2 | 2 | 3 | 7 |

| **Ομάδα 1** | **Ομάδα 2** | **Ομάδα 3** |
|---|---|---|
| 00 = 4 | 10 = -2 | 01 = 5 |
| 11 = -4 | 21 = 1 | 12 = -5 |
| 22 = 0 | 02 = 8 | 20 = 0 |
| 0 | 7 | 0 |

$$AT_A = \frac{17^2 + (-11)^2 + 1^2}{3} - \frac{7^2}{9} = 131{,}56 \qquad AT_B = \frac{2^2 + 2^2 + 3^2}{3} - \frac{7^2}{9} = 0{,}22$$

$$AT_{\text{ομάδων}} = AT_{AB^2} = \frac{0^2 + 0^2 + 7^2}{3} - \frac{7^2}{9} = 10{,}89$$

| **Πηγή Παρ/τας** | **ΒΕ** | **Άθροισμα Τετραγώνων** |
|---|---|---|
| Ομάδες ($AB^2$) | 2 | 10,89 |
| Α | 2 | 131,56 |
| Β | 2 | 0,22 |
| ΑΒ | 2 | 2,89 |
| Σύνολο | 8 | 145,56 |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=conf.design(c(A = 1, B = 2), 3)
> design
  Blocks A B
1      0 0 0
2      0 1 1
3      0 2 2
4      1 1 0
5      1 2 1
6      1 0 2
7      2 2 0
8      2 0 1
9      2 1 2
> Y=c(4,-4,0,-2,1,8,0,5,-5)
> data=cbind(design,Y)
> data
  Blocks A B  Y
1      0 0 0  4
2      0 1 1 -4
3      0 2 2  0
4      1 1 0 -2
5      1 2 1  1
6      1 0 2  8
7      2 2 0  0
8      2 0 1  5
9      2 1 2 -5
```

# *Πειραματικοί Σχεδιασμοί*

```
> fit=aov(Y ~ (A+B)^2 + Error(Blocks), data)
> summary(fit)

Error: Blocks
      Df  Sum Sq  Mean Sq
A:B    2   10.89    5.444

Error: Within
           Df  Sum Sq  Mean Sq
A           2  131.56    65.78
B           2    0.22     0.11
A:B         2    2.89     1.44
```

**Παράδειγμα:** Σχεδιασμός $3^3$ σε τρεις ομάδες με ανάμειξη $AB^2C^2$

| **A** | **B** | **C** | **$L = x_1 + 2x_2 + 2x_2$** | **L (mod 3)** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 0 | 4 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 5 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 6 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| 0 | 2 | 1 | 6 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 7 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 4 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 8 | 2 |
| 0 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 6 | 0 |
| 0 | 2 | 2 | 8 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 5 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 7 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 9 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 6 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 8 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 10 | 1 |

## Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

| Πηγή Παραλλακτικότητας | Άθροισμα Τετραγώνων |
|---|---|
| Ομάδες ($AB^2C^2$) | 2 |
| A | 2 |
| B | 2 |
| AB | 4 |
| C | 2 |
| AC | 4 |
| BC | 4 |
| Σφάλμα ($ABC+AB^2C+ABC^2$) | 6 |
| Σύνολο | 26 |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=conf.design(c(A = 1, B = 2, C = 2), 3)
> design
      Blocks A B C
1       0 0 0 0
2       0 1 1 0
3       0 2 2 0
4       0 1 0 1
5       0 2 1 1
6       0 0 2 1
7       0 2 0 2
8       0 0 1 2
9       0 1 2 2
10      1 1 0 0
.....
18      1 2 2 2
19      2 2 0 0
20      2 0 1 0
21      2 1 2 0
22      2 0 0 1
23      2 1 1 1
24      2 2 2 1
25      2 1 0 2
26      2 2 1 2
27      2 0 2 2
```

## Σχεδιασμός $3^3$ σε εννέα ομάδες με ανάμειξη ABC και $AB^2D^2$

Για δημιουργηθούν οι εννέα ομάδες μπορούμε να επιλέξουμε δύο συνιστώσες (P και Q) και επιπλέον δύο ακόμα συνιστώσες αναμειγνύονται, για να έχουμε τον απαραίτητο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Οι συνιστώσες αυτές ορίζονται ως $PQ^2$ ή $P^2Q$.

$$(ABC)(AB^2D^2) = A^2B^3CD^2 = (A^2B^3CD^2)^2 = AC^2D$$

$$(ABC)(AB^2D^2)^2 = A^2B^5CD^4 = B^2CD = (B^2CD)^2 = BC^2D^2$$

Οι βασικές αντιθέσεις είναι:

$$L_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{και} \quad L_2 = x_1 + 2x_2 + 2x_4$$

| **$1^η$ (0,0)** | **$2^η$ (0,1)** | **$3^η$ (0,2)** | **$4^η$(1,0)** | **$5^η$(1,1)** | **$6^η$(1,2)** | **$7^η$(2,0)** | **$8^η$(2,1)** | **$9^η$(2,2)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 | 1 2 0 0 | 2 1 0 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 2 2 0 0 | 0 2 0 0 | 1 1 0 0 | 2 0 0 0 |
| 1 1 1 0 | 2 0 1 0 | 0 2 1 0 | 1 2 1 0 | 2 1 1 0 | 0 0 1 0 | 1 0 1 0 | 2 2 1 0 | 0 1 1 0 |
| 2 2 2 0 | 0 1 2 0 | 1 0 2 0 | 2 0 2 0 | 0 2 2 0 | 1 1 2 0 | 2 1 2 0 | 0 0 2 0 | 1 2 2 0 |
| 2 1 0 1 | 0 0 0 1 | 1 2 0 1 | 2 2 0 1 | 0 1 0 1 | 1 0 0 1 | 2 0 0 1 | 0 2 0 1 | 1 1 0 1 |
| 0 2 1 1 | 1 1 1 1 | 2 0 1 1 | 0 0 1 1 | 1 2 1 1 | 2 1 1 1 | 0 1 1 1 | 1 0 1 1 | 2 2 1 1 |
| 1 0 2 1 | 2 2 2 1 | 0 1 2 1 | 1 1 2 1 | 2 0 2 1 | 0 2 2 1 | 1 2 2 1 | 2 1 2 1 | 0 0 2 1 |
| 1 2 0 2 | 2 1 0 2 | 0 0 0 2 | 1 0 0 2 | 2 2 0 2 | 0 1 0 2 | 1 1 0 2 | 2 0 0 2 | 0 2 0 2 |
| 2 0 1 2 | 0 2 1 2 | 1 1 1 2 | 2 1 1 2 | 0 0 1 2 | 1 2 1 2 | 2 2 1 2 | 0 1 1 2 | 1 0 1 2 |
| 0 1 2 2 | 1 0 2 2 | 2 2 2 2 | 0 2 2 2 | 1 1 2 2 | 2 0 2 2 | 0 0 2 2 | 1 2 2 2 | 2 1 2 2 |

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> conf.design(rbind(c(A = 1, B = 1, C = 1, D = 0), c(A = 1, B = 2, C = 0, D = 2)), p = 3)
```

| | Blocks | A B C D |
|---|---|---|
| 1 | 00 | 0 0 0 0 |
| 2 | 00 | 1 1 1 0 |
| 3 | 00 | 2 2 2 0 |
| 4 | 00 | 2 1 0 1 |
| 5 | 00 | 0 2 1 1 |
| 6 | 00 | 1 0 2 1 |
| 7 | 00 | 1 2 0 2 |
| 8 | 00 | 2 0 1 2 |
| 9 | 00 | 0 1 2 2 |
| …… | | |
| 74 | 22 | 0 1 1 0 |
| 75 | 22 | 1 2 2 0 |
| 76 | 22 | 1 1 0 1 |
| 77 | 22 | 2 2 1 1 |
| 78 | 22 | 0 0 2 1 |
| 79 | 22 | 0 2 0 2 |
| 80 | 22 | 1 0 1 2 |
| 81 | 22 | 2 1 2 2 |

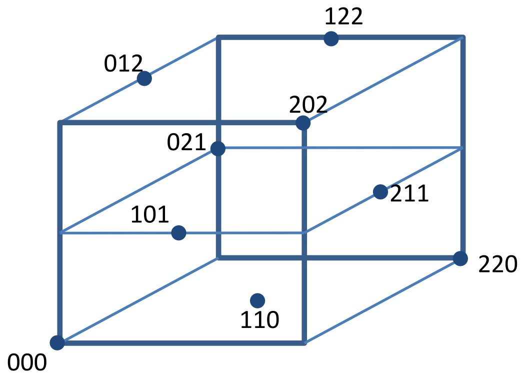
## Κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός $3^k$

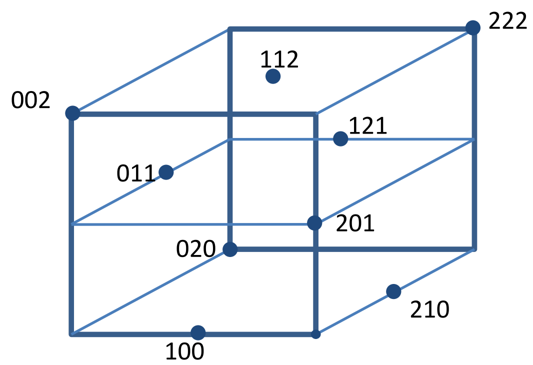
Στους $3^k$ σχεδιασμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $(1/3)^p$ κλάσμα, όπου $p<k$, το οποίο θα έχει $3^{k-p}$ συνδυασμούς επεμβάσεων. Αρχικά επιλέγουμε τις p συνιστώσες, τοποθετούμε τους συνδυασμούς σε $3^p$ μη πλήρεις ομάδες και εκτελούμε την ομάδα που επιλέγουμε.

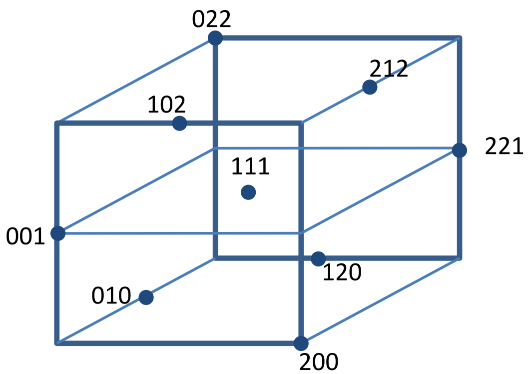
Αν $AB^{\alpha_2}C^{\alpha_3}\ldots K^{\alpha_k}$ είναι η συνιστώσα της αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία των ομάδων, τότε η $I=AB^{\alpha_2}C^{\alpha_3}\ldots K^{\alpha_k}$ είναι η ορίζουσα σχέση του κλασματικού σχεδιασμού. Οι ταυτόσημες επιδράσεις - αλληλοεπιδράσεις παράγονται με τον πολλαπλασιασμό της επίδρασης με I και $I^2$ (modulo 3).

## Τρία ένα-τρίτο κλάσματα σχεδιασμού $3^3$ με $I=AB^2C^2$

| 1ο κλάσμα | 2ο κλάσμα | 3ο κλάσμα |
|---|---|---|
| 000 | 100 | 200 |
| 012 | 112 | 212 |
| 101 | 201 | 001 |
| 202 | 002 | 102 |
| 021 | 121 | 221 |
| 110 | 210 | 010 |
| 122 | 222 | 022 |
| 211 | 011 | 111 |
| 220 | 020 | 120 |



**Ταυτόσημες επιδράσεις με I=$AB^2C^2$**

$A = A(AB^2C^2) = A^2B^2C^2 = ABC$

$A = A(AB^2C^2)^2 = A^3B^4C^4 = BC$

$B = B(AB^2C^2) = AB^3C^2 = AC^2$

$B = B(AB^2C^2)^2 = A^2B^5C^4 = ABC^2$

$C = C(AB^2C^2) = AB^2C^3 = AB^2$

$C = C(AB^2C^2)^2 = A^2B^4C^5 = AB^2C$

$AB = AB(AB^2C^2) = A^2B^3C^2 = AC$

$AB = AB(AB^2C^2)^2 = A^3B^5C^4 = BC^2$

Οι επιδράσεις που εκτιμούνται είναι οι εξής:

$A + BC + ABC$, $B + AC^2 + ABC^2$, $C + AB^2 + AB^2C$ και $AB + AC + BC^2$

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=conf.design(c(A = 1, B = 2, C = 2), 3)
> design
   Blocks      A B C
1     0        0 0 0
2     0        1 1 0
3     0        2 2 0
4     0        1 0 1
5     0        2 1 1
6     0        0 2 1
7     0        2 0 2
8     0        0 1 2
9     0        1 2 2
10     1       1 0 0
.....
18     1       2 2 2
19     2       2 0 0
20     2       0 1 0
21     2       1 2 0
22     2       0 0 1
23     2       1 1 1
24     2       2 2 1
25     2       1 0 2
26     2       2 1 2
27     2       0 2 2
```

# Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fract_design=design[c(19:27),]
> fract_design
```

| | Blocks | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 20 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 21 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| 22 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 23 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 24 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 25 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 26 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 27 | 2 | 0 | 2 | 2 |

## Παραγοντικοί σχεδιασμοί με μικτά επίπεδα

Για να σχεδιάσουμε ένα πείραμα δύο παραγόντων (Α και Χ) με δύο και τρία επίπεδα, χρησιμοποιούμε ένα σχεδιασμό $2^3$ όπου τα επίπεδα των παραγόντων Β και C συνδυάζονται για να δημιουργηθούν τα τρία επίπεδα του Χ παράγοντα. Η επίδραση του Α υπολογίζεται από τις εκτελέσεις 1, 2, 7 και 8, όπου ο Χ είναι σε χαμηλό και υψηλό επίπεδο.

| | **A** | | **$X_L$** | | **X** | **$A*X_L$** | **$A*X_L$** | **$X_Q$** | **$A*X_Q$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ***B*** | ***C*** | | **AB** | **AC** | **BC** | **ABC** |
| 1 | - | χαμηλό | - | - | χαμηλό | + | + | + | - |
| 2 | + | υψηλό | - | - | χαμηλό | - | - | + | + |
| 3 | - | χαμηλό | + | - | μεσαίο | - | + | - | + |
| 4 | + | υψηλό | + | - | μεσαίο | + | - | - | - |
| 5 | - | χαμηλό | - | + | μεσαίο | + | - | - | + |
| 6 | + | υψηλό | - | + | μεσαίο | - | + | - | - |
| 7 | - | χαμηλό | + | + | υψηλό | - | - | + | - |
| 8 | + | υψηλό | + | + | υψηλό | + | + | + | + |

Οι εκτελέσεις 3 και 5 είναι επαναλαμβανόμενες και χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση σφάλματος με 1 βαθμό ελευθερίας όπως επίσης και οι εκτελέσεις 4 και 6. Η μέση διακύμανση των δυο ζευγών εκτελέσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο τετράγωνο του υπολοίπου με 2 βαθμούς ελευθερίας.

**Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας**

| Πηγή παραλλακτικότητας | ΒΕ | ΑΤ | ΜΤ |
|---|---|---|---|
| Α | 1 | $AT_A$ | $MT_A$ |
| Χ ($X_L$ +$X_Q$) | 2 | $AT_X$ | $MT_X$ |
| ΑΧ (A*$X_L$ +A*$X_Q$) | 2 | $AT_{AX}$ | $MT_{AX}$ |
| Υπόλοιπο (από τις εκτελέσεις 3 και 5 και τις 4 και 6) | 2 | $AT_{Υπ}$ | $MT_{Υπ}$ |
| Σύνολο | 7 | $AT_{Συν}$ | |