



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Μεθοδολογία αποκριτικής επιφάνειας (Response surface methodology)

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2018

Μεθοδολογία αποκριτικής επιφανείας (Response Surface Methodology)

Η μεθοδολογία των αποκριτικών επιφανειών αναπτύχθηκε από τους Box και wilson (1951) και είναι μία σειρά από μαθηματικές και στατιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση και μοντελοποίηση των πειραματικών δεδομένων με σκοπό την βελτιστοποίηση μιας μεταβλητής απόκρισης.

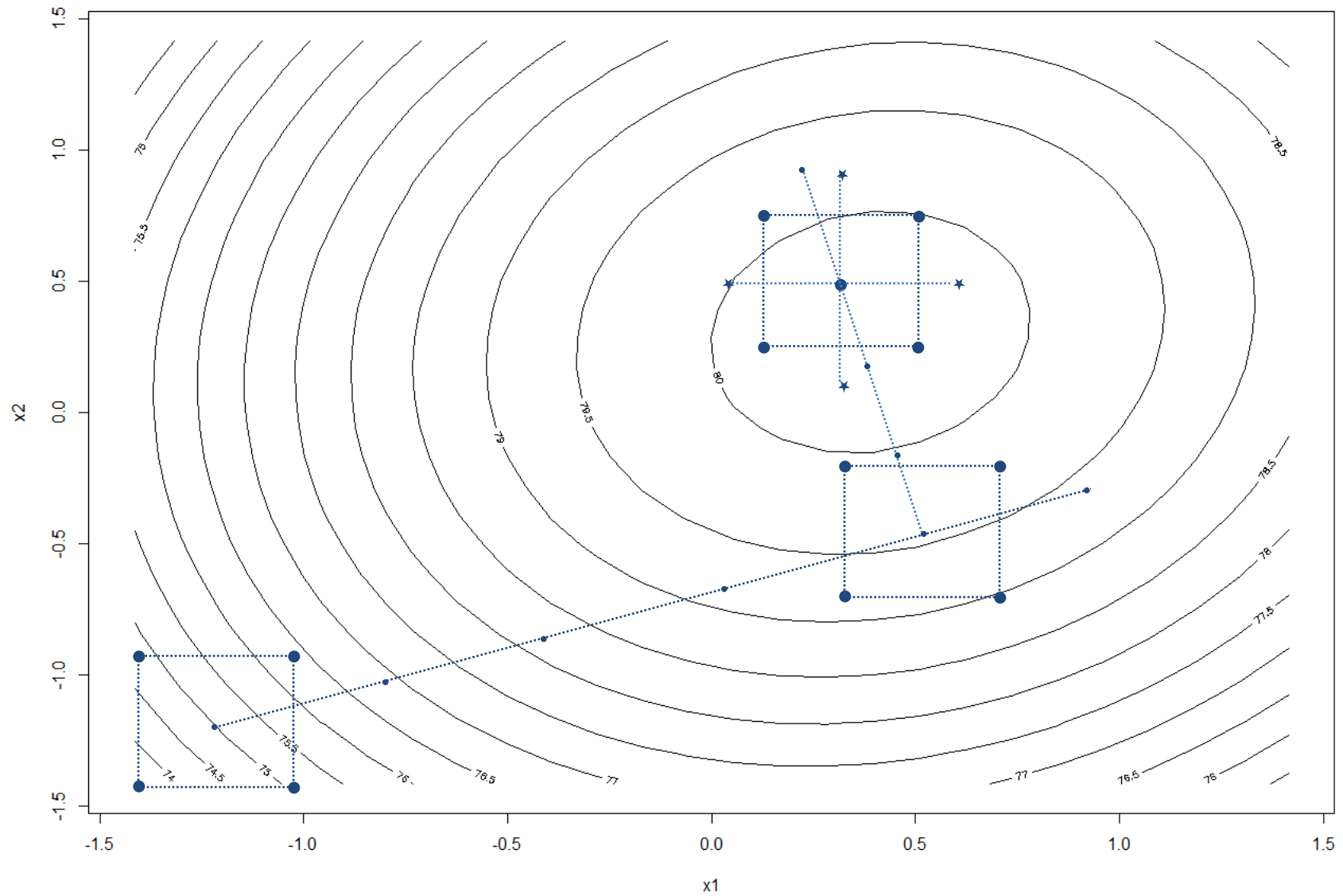
Χρησιμοποιούνται διαδοχικά πειραματικοί σχεδιασμοί (πρώτης τάξης, δεύτερης τάξης) με σκοπό την εύρεση του κατάλληλου μοντέλου, το οποίο προσεγγίζει καλύτερα την επιφάνεια απόκρισης.

Για να εντοπίσει ο πειραματιστής την βέλτιστη περιοχή θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα.

1. Επιλογή των κατάλληλων παραγόντων, επιπέδων και μεταβλητών απόκρισης (προκαταρκτικά πειράματα, screening).
2. Επιλογή της περιοχής σχεδιασμού και προσαρμογή μοντέλου πρώτης τάξης με έλεγχο για καμπυλότητα (παραγοντικός σχεδιασμός με κεντρικά σημεία).
3. Υπολογισμός της κατεύθυνσης - μονοπάτι της πιο απότομης μεταβολής (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) της μεταβλητής απόκρισης (path of steepest ascent).
4. Εκτέλεση επαναλαμβανόμενων πειραματικών δοκιμών κατά μήκος του μονοπατιού και παρατήρηση μεταβολών της τιμής απόκρισης.

5. Στην θέση του μονοπατιού όπου η τιμή της απόκρισης είναι η επιθυμητή (μέγιστη ή ελάχιστη), προσαρμόζεται ένα άλλο μοντέλο πρώτης τάξης όπου και γίνεται έλεγχος για καμπυλότητα. Αν η έλλειψη προσαρμογής δεν είναι σημαντική, υπολογίζεται ένα δεύτερο μονοπάτι βασισμένο στο νέο μοντέλο και διεξάγονται πειράματα κατά μήκος του δεύτερου μονοπατιού.
6. Αν η έλλειψη προσαρμογής είναι σημαντική, προσαρμόζεται ένα άλλο μοντέλο δεύτερης τάξης (π.χ. κεντρικός σύνθετός σχεδιασμός) και υπολογίζεται το στάσιμο σημείο.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί



Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός (Central Composite Design)

Ο κεντρικός σύνθετος σχεδιασμός αποτελείται από τρία τμήματα:

1. Έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό 2^k ή ένα κλάσμα του, στον οποίο τα επίπεδα είναι κωδικοποιημένα ως -1 και 1 και οι συνδυασμοί των επεμβάσεων ονομάζονται παραγοντικά σημεία (n_f).
2. Τα αξονικά σημεία (axial) τα οποία είναι τοποθετημένα ανά δύο στους άξονες των παραγόντων του σχεδιασμού και απέχουν απόσταση $\pm a$ από το κέντρο του ($n_{ax} = 2*k$).
3. Τα κεντρικά σημεία (n_c).

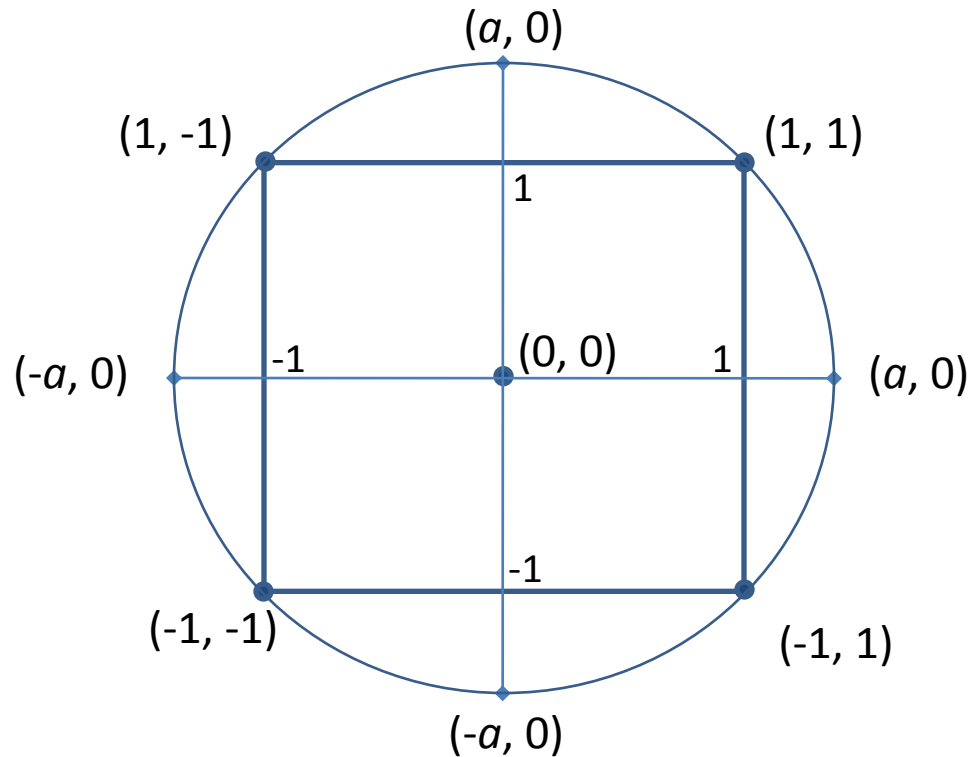
Ο συνολικός αριθμός των σημείων σε έναν κεντρικό σύνθετο σχεδιασμό είναι $N = n_f + n_{ax} + n_c$

Επιλογή αξονικού σημείου a

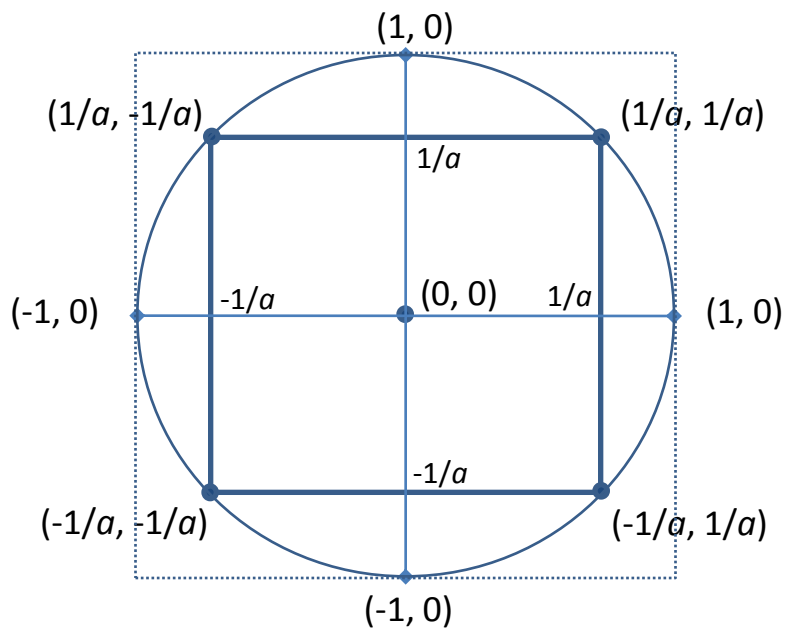
Οι τιμές του a και του n_c επιλέγονται κατά τρόπο ώστε ο σχεδιασμός να έχει επιθυμητές ιδιότητες (rotatability and orthogonality). Ο σχεδιασμός είναι περιστρέψιμος όταν η διακύμανση της προβλεπόμενης απόκρισης σε οποιοδήποτε σημείο x εξαρτάται μόνο από την απόσταση του x από το κεντρικό σημείο του σχεδιασμού και ορθογώνιος όταν οι εκτιμήσεις όλων των όρων στο μοντέλο δεύτερης τάξης δεν συσχετίζονται.

1. **Περιστρέψιμο σχεδιασμό (Rotatable):** $a = n_f^{1/4}$
2. **Ορθογώνιο σχεδιασμό (Orthogonal):** $a = \{[(n_f + n_{ax} + n_c)^{1/2} - n_f^{1/2}]^2 * n_f / 4\}^{1/4}$
3. **Σφαιρικό σχεδιασμό (Spherical):** $a = k^{1/2}$
4. **Κυβοειδή σχεδιασμό (Face-centered):** $a = 1$

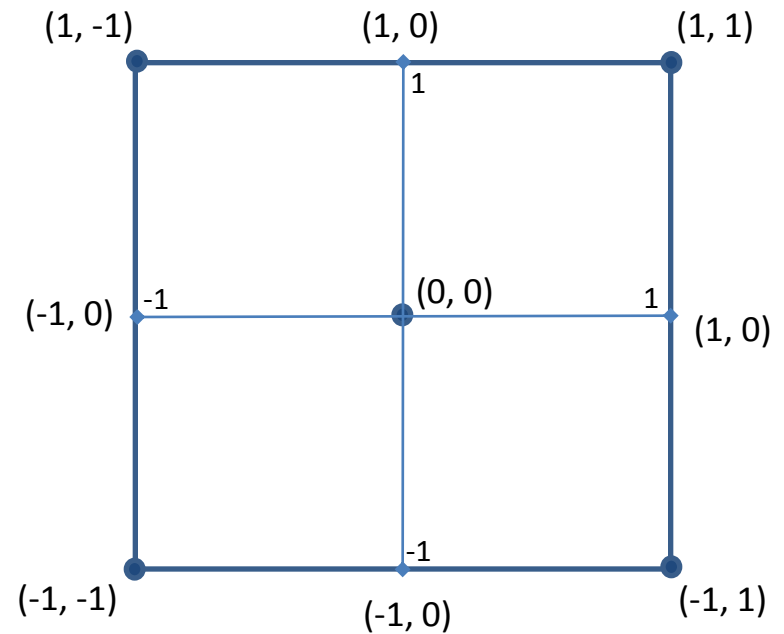
Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός ($k = 2$)



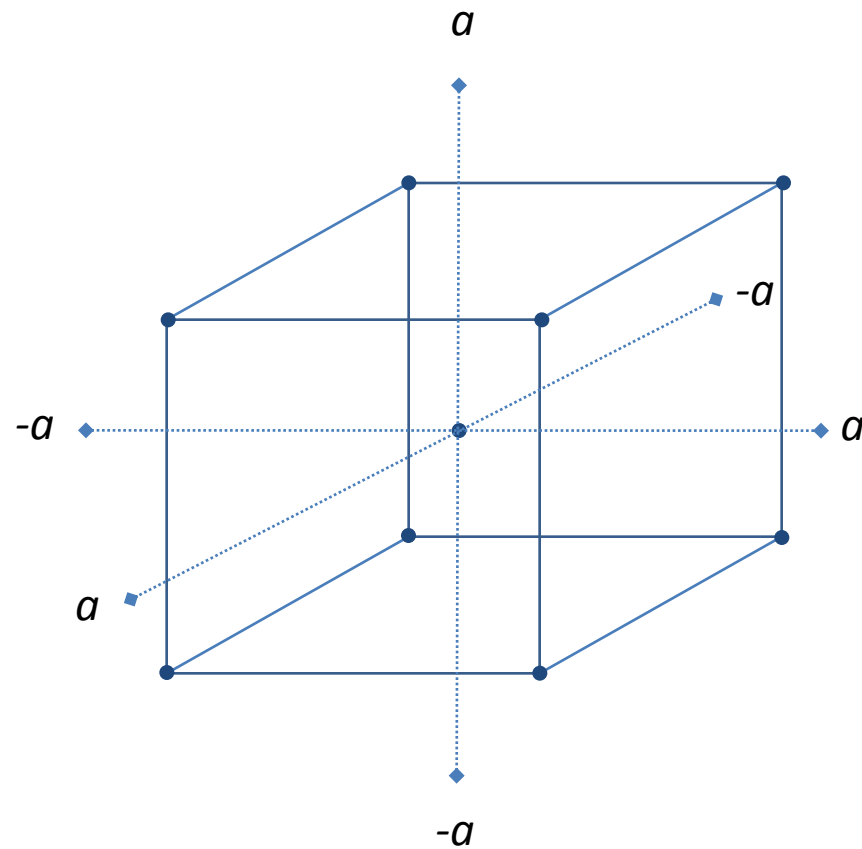
Εγγεγραμμένος (Inscribe, $a = 1$, $levels = 1/a$)



Κυβοειδής (Faces, $a = 1$)

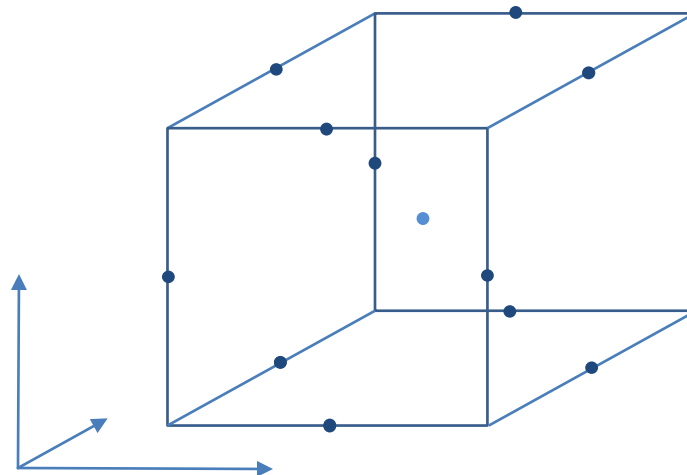


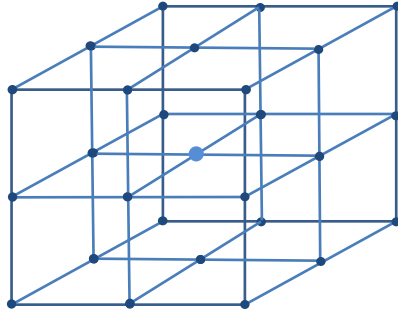
Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός ($k = 3$)



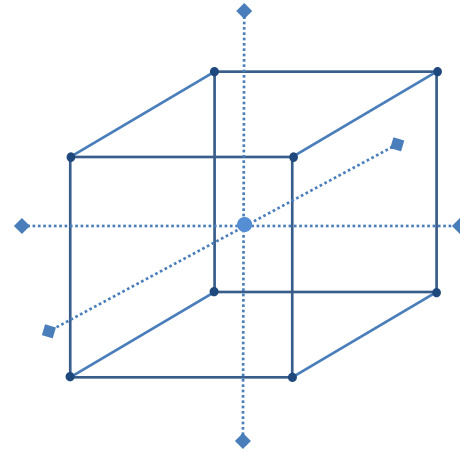
Box-Behnken Σχεδιασμός

Είναι μία ειδική κατηγορία 3^k παραγοντικού σχεδιασμού όπου οι συνδυασμοί των επεμβάσεων δεν στις κορυφές της πειραματικής περιοχής αλλά στα μέσα σημεία και στο κέντρο. Είναι χρήσιμα όταν επιθυμούμε αποφυγή ακραίων συνδυασμών επεμβάσεων. Είναι περιστρέψιμα ή σχεδόν περιστρέψιμα.

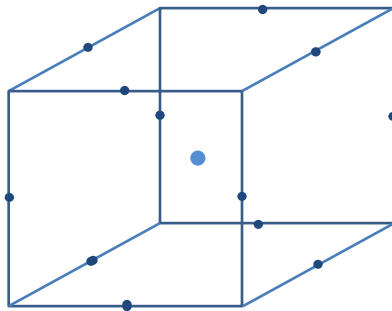




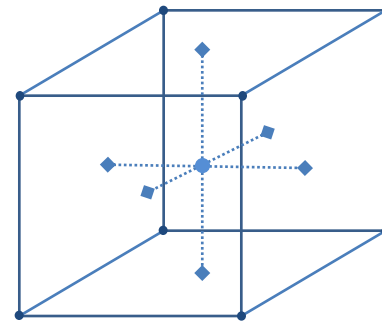
Παραγοντικός Σχεδιασμός 3^k



Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός ($k = 3$)



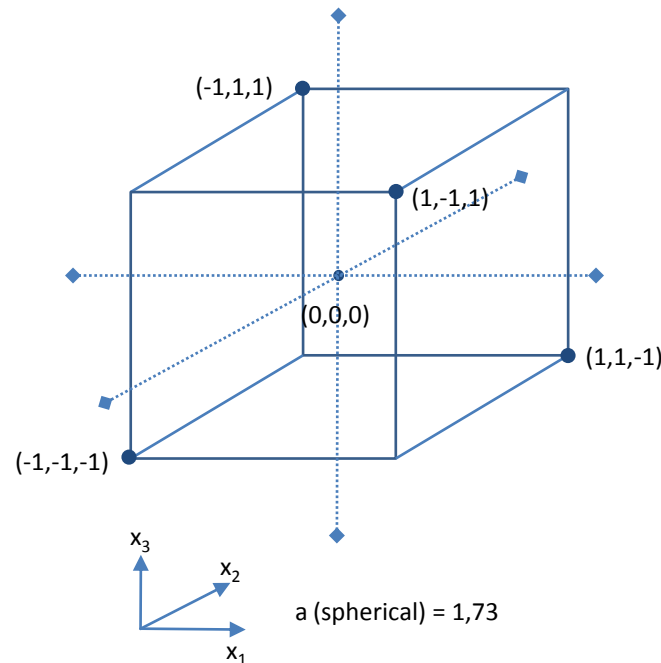
Box-Behnken Σχεδιασμός



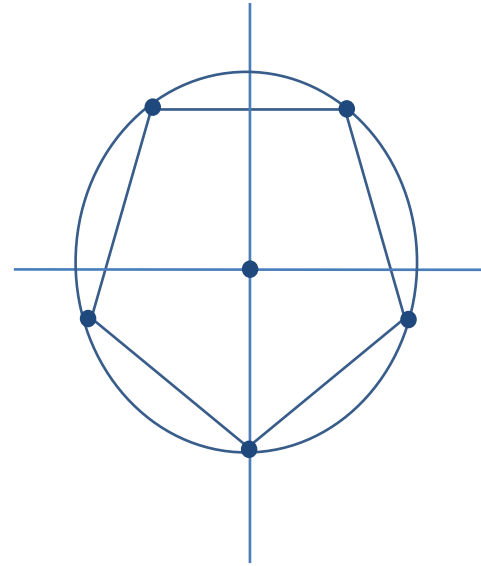
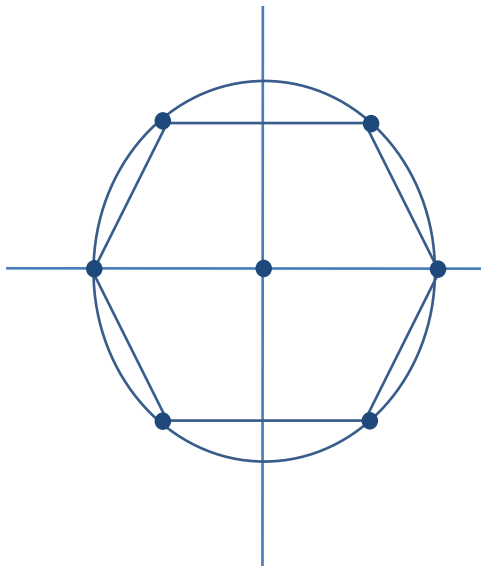
Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός ($\alpha = 1$)

Μικρός Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός

Ο μικρός κεντρικός σύνθετος σχεδιασμός είναι κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός τριών παραγόντων, διαχωριστικής ικανότητας III, με προσθήκη αξονικών και κεντρικών σημείων.



Ισοακτινικός Σχεδιασμός (Equiradial designs)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Συνδυασμός επεμβάσεων		X1	X2	X1	X2	X1	X2	X1	X2
n_f	--	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	+-	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	-+	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	++	1	1	1	1	1	1	1	1
n_c	00	0	0	0	0	0	0	0	0
	00	0	0	0	0	0	0	0	0
Αξονικά σημεία		Περιστρέψιμος		Σφαιρικός		Ορθογώνιος		Κυβοειδής	
	0a	0	-1,414	0	-1,414	0	-1,078	0	-1
	0A	0	1,414	0	1,414	0	1,078	0	1
	a0	-1,414	0	-1,414	0	-1,078	0	-1	0
	A0	1,414	0	1,414	0	1,078	0	1	0
Inscribe (a = 1)		$n_f = \pm 0,707$		$n_f = \pm 0,707$		$n_f = \pm 0,927$			

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Κεντρικός Σύνθετος Σχεδιασμός	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
Παραγοντικά σημεία 2^k	4	8	16	32	64
Κεντρικά σημεία n_c	5	5	6	6	6
Αξονικά σημεία	4	6	8	10	16
Κυβοειδή	1	1	1	1	1
Ορθογώνια	1,078	1,287	1,483	1,662	1,824
Σφαιρικά	1,414	1,732	2	2,236	2,449
Περιστρέψιμα	1,414	1,682	2	2,378	2,828
Σύνολο εκτελέσεων CCD	13	19	30	48	82
Box-Behnken	-	15	27	46	54
Παραγοντικός Σχεδιασμός 3^k	9	27	81	243	729

Παράδειγμα: Προσαρμογή πρώτης τάξης μοντέλου (Montgomery, 8th ed.)

A	B	x1	x2	Y
30	150	-1	-1	39,3
30	160	-1	1	40
40	150	1	-1	40,9
40	160	1	1	41,5
35	155	0	0	40,3
35	155	0	0	40,5
35	155	0	0	40,7
35	155	0	0	40,2
35	155	0	0	40,6

Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	P-Value
A	1	2,40250	2,40250	55.8721	0,001713
B	1	0,42250	0,42250	9.8256	0,035030
Υπόλοιπο	6	0,1772			
Αλληλεπίδραση	1	0,0025	0,0025	0,058	0,8215
Έλλειψη Προσαρμογής	1	0,0027	0,0027	0,063	0,8142
Pure error	4	0,1720)	0,0430		
Σύνολο	8	30,022			

Πίνακας Εκτίμησης Παραμέτρων

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	40,444444	0,062311	649,07	<,0001*
x_1	0,775	0,093467	8,29	0,0004*
x_2	0,325	0,093467	3,48	0,0177*
x_1x_2	-0,025	0,093467	-0,27	0,7998

Το μοντέλο που επιλέγεται είναι:

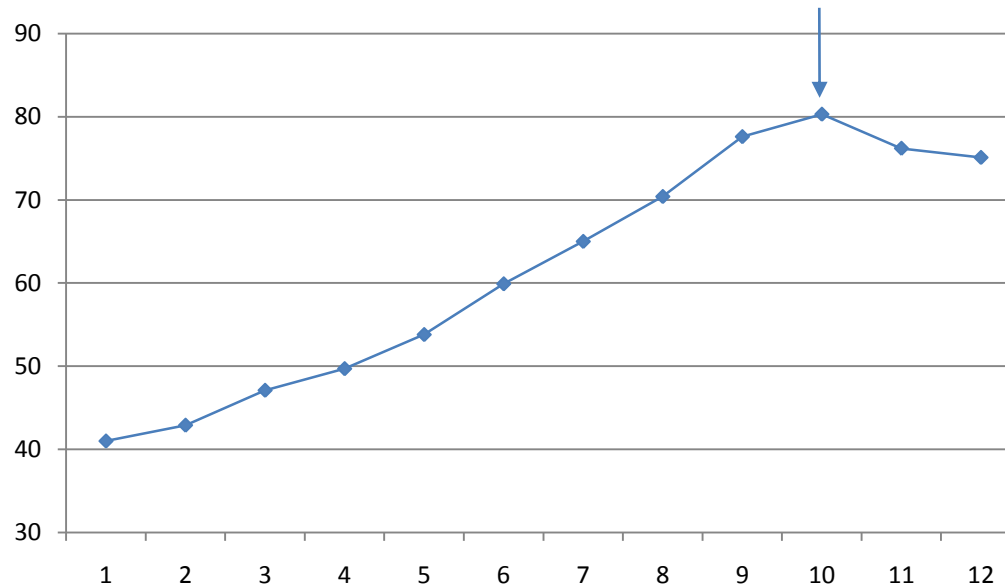
$$Y = 40,44 + 0,775x_1 + 0,325x_2$$

Για να μετακινηθούμε μακριά από το κέντρο του σχεδιασμού, θα πρέπει να μετακινηθούμε στην κατεύθυνση - μονοπάτι κατά 0,775 μονάδες στην x_1 και 0,325 μονάδες στην x_2 . Το μονοπάτι (path of steepest ascent) θα ξεκινάει από τα σημεία ($x_1=0$, $x_2=0$) και θα έχει κλίση 0,325/0,775.

Εκτέλεση πειραματικών δοκιμών κατά μήκος του μονοπατιού

Βήματα	x_1	x_2	A	B	Y
Origin	0	0	35	155	
Δ	1	0,42	5	2	
Origin + 1 Δ	1	0,42	40	157	41
Origin + 2 Δ	2	0,84	45	159	42,9
Origin + 3 Δ	3	1,26	50	161	47,1
Origin + 4 Δ	4	1,68	55	163	49,7
Origin + 5 Δ	5	2,1	60	165	53,8
Origin + 6 Δ	6	2,52	65	167	59,9
Origin + 7 Δ	7	2,94	70	169	65
Origin + 8 Δ	8	3,36	75	171	70,4
Origin + 9 Δ	9	3,78	80	173	77,6
Origin + 10 Δ	10	4,2	85	175	80,3
Origin + 11 Δ	11	4,62	90	179	76,2
Origin + 12 Δ	12	5,04	95	181	75,1

Εκτέλεση πειραματικών δοκιμών κατά μήκος του μονοπατιού



Προσαρμογή πρώτης τάξης μοντέλου στη νέα περιοχή

A	B	x1	x2	Y
80	170	-1	-1	76,5
80	180	-1	1	77
90	170	1	-1	78
90	180	1	1	79,5
85	175	0	0	79,9
85	175	0	0	80,3
85	175	0	0	80
85	175	0	0	79,7
85	175	0	0	79,8

Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	P-Value
A	1	4,000	4,000	75,472	0,0009664
B	1	1,000	1,000	18,868	0,0122172
Υπόλοιπο	6	11,12			
Αλληλεπίδραση	1	0,25	0,25	4,72	0,0956108
Έλλειψη Προσαρμογής	1	10,65	10,65	201,09	0,0001436
Pure error	4	0,21	0,053		
Σύνολο	8	16,12			

Προσαρμογή ενός δεύτερης τάξης μοντέλου

A	B	x1	x2	Y
80	170	-1	-1	76,5
80	180	-1	1	77
90	170	1	-1	78
90	180	1	1	79,5
85	175	0	0	79,9
85	175	0	0	80,3
85	175	0	0	80
85	175	0	0	79,7
85	175	0	0	79,8
92,07	175	1,414	0	78,4
77,93	175	-1,414	0	75,6
85	182,07	0	1,414	78,5
85	167,93	0	-1,414	77

Πίνακας ανάλυσης παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	P-Value
A	1	7,92	7,92	111,93	0,0001
B	1	2,12	2,12	30,01	0,0009
AB	1	0,25	0,25	3,53	0,1022
A ²	1	13,18	13,18	186,22	0,0001
B ²	1	6,97	6,97	98,56	0,0001
Υπόλοιπο	7	0,4953	0,0708		
Έλλειψη Προσαρμογής	3	0,2833	0,0944	1,7817	0,2897
Pure error	4	0,2120	0,0530		
Σύνολο	19				

Πίνακας Εκτίμησης Παραμέτρων

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	79,94	0,11	671,99	2,2e-16
x_1	0,99	0,09	10,57	1,47E-02
x_2	0,515	0,09	5,47	0,0009281
x_1x_2	0,25	0,13	1,87	0,1022110
x_1^2	-1,376	0,10	-13,64	2,67E-03
x_2^2	-1,001	0,10	-9,92	2,24E-02

Τελικό μοντέλο με τις κωδικοποιημένες τιμές είναι:

$$Y = 79,94 + 0,99 * x_1 + 0,515 * x_2 + 1,376 * x_1^2 + 1,001 * x_1^2 + 0,25 * x_1x_2$$

Εντοπισμός στάσιμου σημείου

Το στάσιμο σημείο (βελτιστοποίηση της μεταβλητής απόκρισης), θα είναι το σύνολο των παραγόντων $x_1, x_2, \dots, x_k$, για τις οποίες οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_k} = 0$$

Το στάσιμο σημείο υπολογίζεται ως εξής:

Γράφουμε το μοντέλο δεύτερης τάξης σε μορφή πινάκων

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + x' b + x' B x$$

όπου:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12}/2 & \dots & \hat{\beta}_{1k}/2 \\ & \hat{\beta}_{22} & \dots & \hat{\beta}_{2k}/2 \\ & & \ddots & \\ \text{sym.} & & & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

η παράγωγος του $\hat{y}$ ως προς το διάνυσμα x ισούται με 0.

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = b + 2Bx = 0$$

Για να υπολογίσουμε το στάσιμο σημείο χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$x_s = -\frac{1}{2}B^{-1}b$$

όπου:

$$b = \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1,376 & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 \end{bmatrix}$$

$$x_s = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1,376 & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,389 \\ 0,306 \end{bmatrix}$$

$x_{1,s} = 0,389$ και $x_{2,s} = 0,306$ ή στις φυσικές τιμές $A_s = 87$ και $B_s = 176,5$ και η βέλτιστη (μέγιστη) τιμή είναι $Y_s = 80,21$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design=FrF2(4,2,ncenter = 5,randomize = F)
```

```
> design
```

	A	B
1	-1	-1
2	1	-1
3	-1	1
4	1	1
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0

```
class=design, type= full factorial.center
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(39.3, 40.9, 40, 41.5, 40.3, 40.5, 40.7, 40.2, 40.6)
```

```
> data=cbind(design, Y)
```

```
> data
```

	A	B	Y
1	-1	-1	39.3
2	1	-1	40.9
3	-1	1	40.0
4	1	1	41.5
5	0	0	40.3
6	0	0	40.5
7	0	0	40.7
8	0	0	40.2
9	0	0	40.6

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit=lm(Y~A*B, data)
> library(alr3)
> pureErrorAnova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	2.40250	2.40250	55.8721	0.001713 **
B	1	0.42250	0.42250	9.8256	0.035030 *
A:B	1	0.00250	0.00250	0.0581	0.821316
Residuals	5	0.17472	0.03494		
Lack of fit	1	0.00272	0.00272	0.0633	0.813741
Pure Error	4	0.17200	0.04300		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> design1=FrF2(4,2,ncenter = 5,randomize = F)
```

```
> design1
```

	A	B
1	-1	-1
2	1	-1
3	-1	1
4	1	1
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0

```
class=design, type= full factorial.center
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y1=c(76.5, 78, 77, 79.5, 79.9, 80.3, 80, 79.7, 79.8)
> data1=cbind(design1, Y1)
> data1
```

	A	B	Y
1	-1	-1	76.5
2	1	-1	78.0
3	-1	1	77.0
4	1	1	79.5
5	0	0	79.9
6	0	0	80.3
7	0	0	80.0
8	0	0	79.7
9	0	0	79.8

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit1=lm(Y1~A*B,data1)
> pureErrorAnova(fit1)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y1

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	4.000	4.000	75.472	0.0009664 ***
B	1	1.000	1.000	18.868	0.0122172 *
A:B	1	0.250	0.250	4.717	0.0956108 .
Residuals	5	10.870	2.174		
Lack of fit	1	10.658	10.658	201.094	0.0001436 ***
Pure Error	4	0.212	0.053		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(rsm)
> design2=ccd(2, n0 = c(5,0), alpha = "rotatable", randomize = F, oneblock = T)
> design2
```

	run.order	std.order	x1.as.is	x2.as.is
1	1	1	-1.000000	-1.000000
2	2	2	1.000000	-1.000000
3	3	3	-1.000000	1.000000
4	4	4	1.000000	1.000000
5	5	5	0.000000	0.000000
6	6	6	0.000000	0.000000
7	7	7	0.000000	0.000000
8	8	8	0.000000	0.000000
9	9	9	0.000000	0.000000
10	1	1	-1.414214	0.000000
11	2	2	1.414214	0.000000
12	3	3	0.000000	-1.414214
13	4	4	0.000000	1.414214

Data are stored in coded form using these coding formulas ...

$x1 \sim x1.as.is$

$x2 \sim x2.as.is$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y2=c(76.5, 78, 77, 79.5, 79.9, 80.3, 80, 79.7, 79.8, 75.6, 78.4, 77, 78.5 )  
> data2=cbind(design2, Y2)  
> data2
```

	run.order	std.order	x1	x2	Y
1	1	1	-1.000000	-1.000000	76.5
2	2	2	1.000000	-1.000000	78.0
3	3	3	-1.000000	1.000000	77.0
4	4	4	1.000000	1.000000	79.5
5	5	5	0.000000	0.000000	79.9
6	6	6	0.000000	0.000000	80.3
7	7	7	0.000000	0.000000	80.0
8	8	8	0.000000	0.000000	79.7
9	9	9	0.000000	0.000000	79.8
10	1	1	-1.414214	0.000000	75.6
11	2	2	1.414214	0.000000	78.4
12	3	3	0.000000	-1.414214	77.0
13	4	4	0.000000	1.414214	78.5

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> fit2=rsm(Y2 ~ SO(x1, x2), data2)
```

```
> summary(fit2)
```

Call:

```
rsm(formula = Y ~ SO(x1, x2), data = data)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	79.940000	0.118959	671.9974	< 2.2e-16 ***
X1	0.994975	0.094045	10.5798	1.474e-05 ***
X2	0.515165	0.094045	5.4778	0.0009281 ***
x1:x2	0.250000	0.133000	1.8797	0.1022110
x1^2	-1.376250	0.100852	-13.6462	2.672e-06 ***
x2^2	-1.001250	0.100852	-9.9279	2.244e-05 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Multiple R-squared: 0.9828, Adjusted R-squared: 0.9705

F-statistic: 79.85 on 5 and 7 DF, p-value: 5.108e-06

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Analysis of Variance Table

Response: Y2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
FO(x1, x2)	2	10.0430	5.0215	70.9690	2.251e-05
TWI(x1, x2)	1	0.2500	0.2500	3.5333	0.1022
PQ(x1, x2)	2	17.9548	8.9774	126.8785	3.170e-06
Residuals	7	0.4953	0.0708		
Lack of fit	3	0.2833	0.0944	1.7817	0.2897
Pure error	4	0.2120	0.0530		

Stationary point of response surface:

x1	x2
0.3892604	0.3058577

Eigenanalysis:

eigen() decomposition

\$values

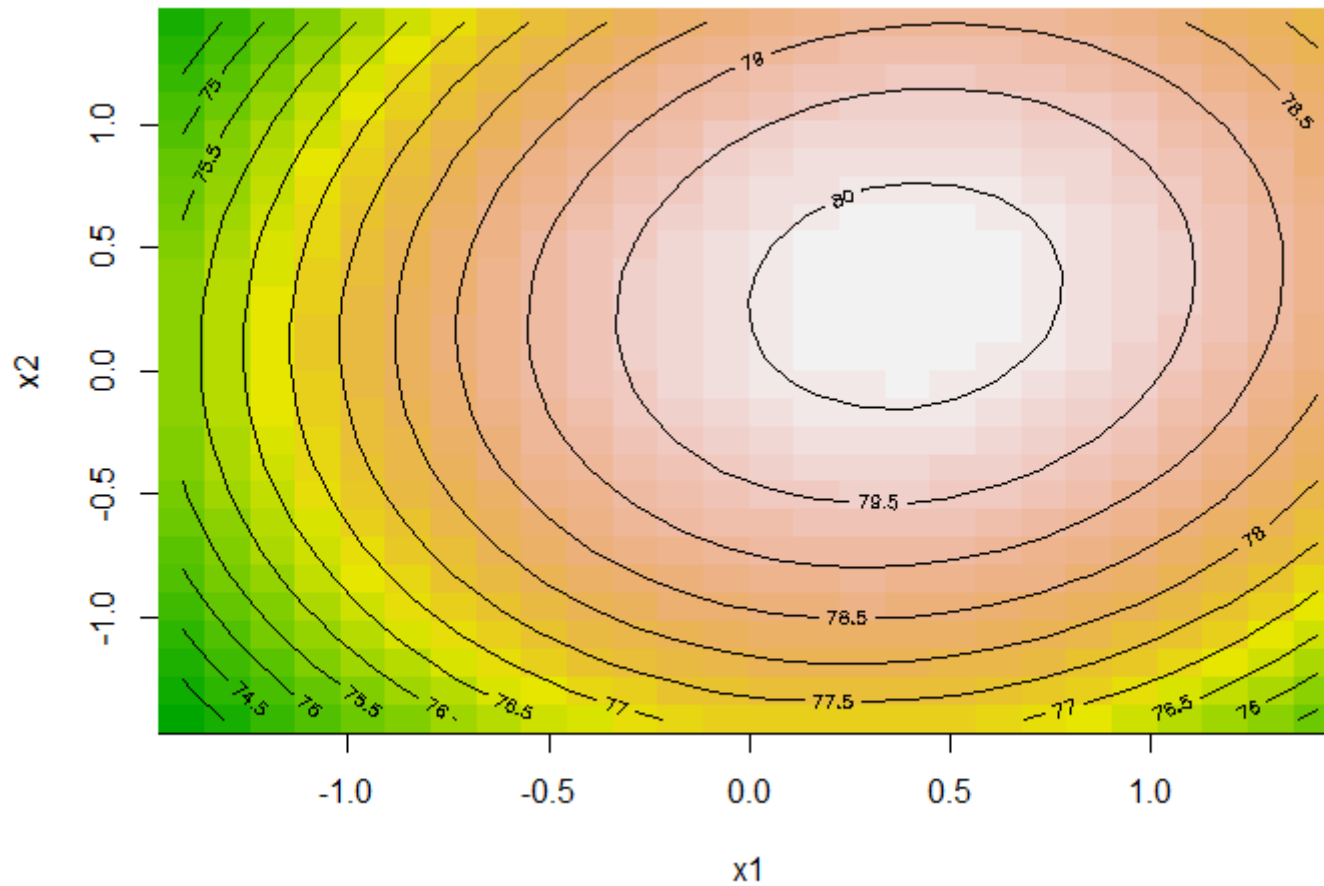
[1] -0.963403 -1.414097

\$vectors

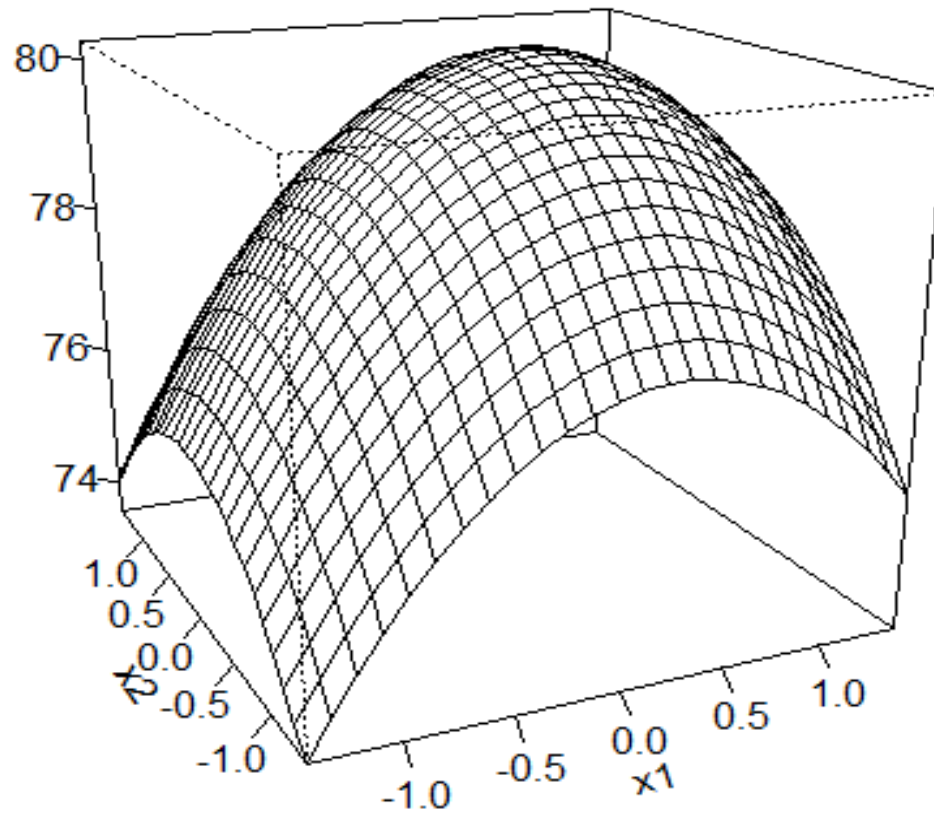
[,1]	[,2]
x1 -0.2897841	-0.9570920
x2 -0.9570920	0.2897841

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> contour(fit, ~ x1 + x2, image=TRUE)



> persp(fit, x2~x1)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Box-Behnken Σχεδιασμός

> design=bdb(3, n0 = 4, randomize = F)

	run.order	std.order	x1.as.is	x2.as.is	x3.as.is
1	1	1	-1	-1	0
2	2	2	1	-1	0
3	3	3	-1	1	0
4	4	4	1	1	0
5	5	5	-1	0	-1
6	6	6	1	0	-1
7	7	7	-1	0	1
8	8	8	1	0	1
9	9	9	0	-1	-1
10	10	10	0	1	-1
11	11	11	0	-1	1
12	12	12	0	1	1
13	13	13	0	0	0
14	14	14	0	0	0
15	15	15	0	0	0
16	16	16	0	0	0

Data are stored in coded form using these coding formulas ...

$x1 \sim x1.as.is$

$x2 \sim x2.as.is$

$x3 \sim x3.as.is$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> Y=c(6,14,13,16,10,10,5,13,11,9,14,15, 17, 16, 16, 17)
> data=cbind(design, Y)
> fit=rsm(Y ~ SO(x1, x2, x3), data)
> summary(fit)
```

Call:

```
rsm(formula = Y ~ SO(x1, x2, x3), data = data)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	16.50000	1.11337	14.8199	5.936e-06	***
x1	2.37500	0.78727	3.0168	0.02349	*
x2	1.00000	0.78727	1.2702	0.25104	
x3	0.87500	0.78727	1.1114	0.30892	
x1:x2	-1.25000	1.11337	-1.1227	0.30446	
x1:x3	2.00000	1.11337	1.7964	0.12257	
x2:x3	0.75000	1.11337	0.6736	0.52563	
x1^2	-3.50000	1.11337	-3.1436	0.01998	*
x2^2	-0.75000	1.11337	-0.6736	0.52563	
x3^2	-3.50000	1.11337	-3.1436	0.01998	*

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Multiple R-squared: 0.8608, Adjusted R-squared: 0.652
F-statistic: 4.123 on 9 and 6 DF, p-value: 0.04934

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
FO(x1, x2, x3)	3	59.25	19.750	3.9832	0.07066
TWI(x1, x2, x3)	3	24.50	8.167	1.6471	0.27573
PQ(x1, x2, x3)	3	100.25	33.417	6.7395	0.02385
Residuals	6	29.75	4.958		
Lack of fit	3	28.75	9.583	28.7500	0.01036
Pure error	3	1.00	0.333		

Stationary point of response surface:

x1	x2	x3
0.3220621	0.5354767	0.2743902

Eigenanalysis:

eigen() decomposition

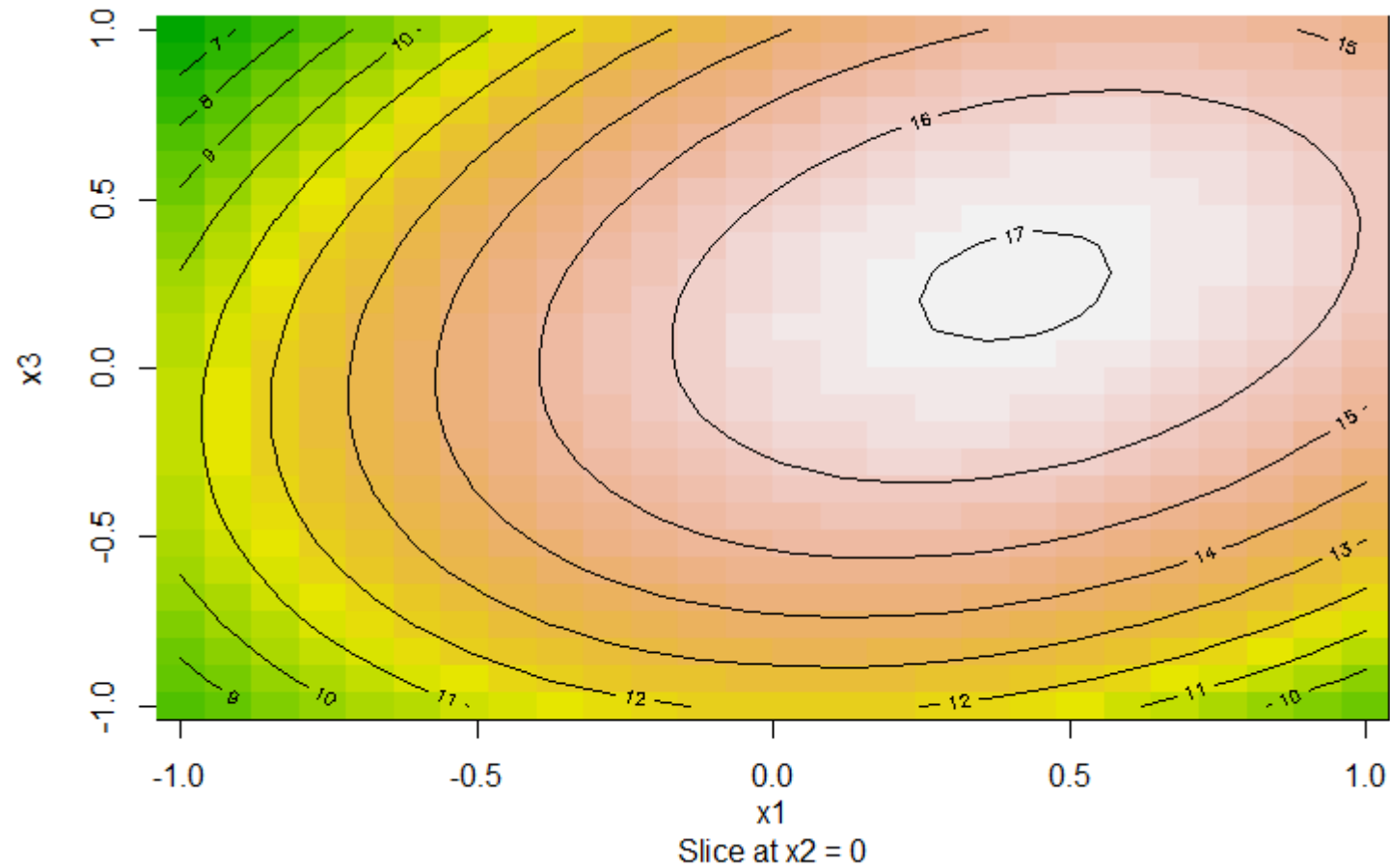
\$values

[1] -0.6051339 -2.5154899 -4.6293761

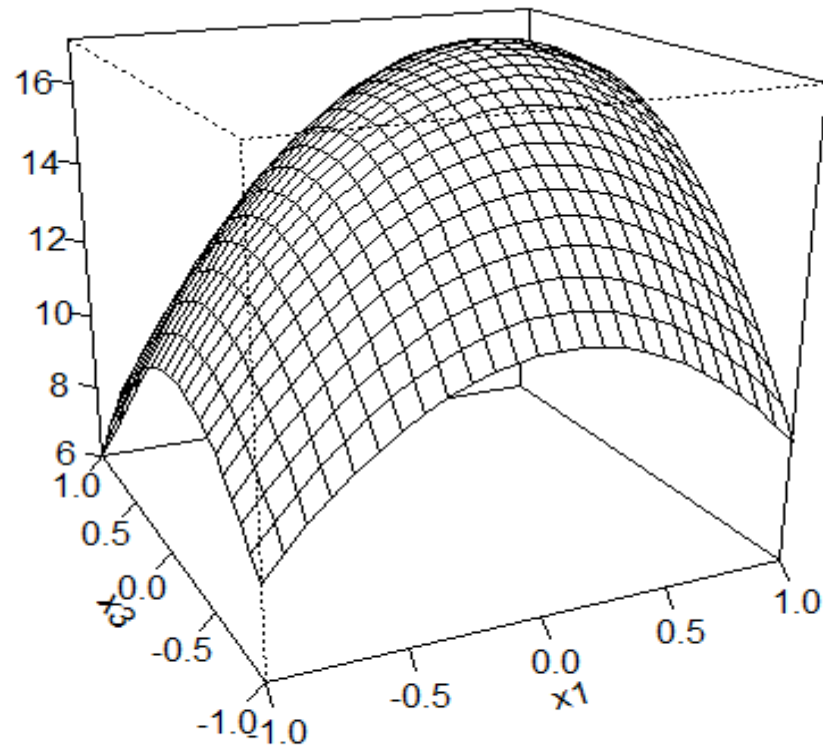
\$vectors

	[,1]	[,2]	[,3]
x1	-0.19041565	0.68208513	0.7060466
x2	0.97979748	0.08724755	0.1799577
x3	0.06114563	0.72604941	-0.6849186

```
> contour(fit, ~ x1 + x3, image=TRUE)
```



> persp(fit, x3~x1)



Slice at $x_2 = 0$