



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Σχέδιο Λατινικού Τετραγώνου

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2017

Πειραματικοί Σχεδιασμοί



5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Σχέδιο του Λατινικού Τετραγώνου (Latin Square Design)

Ένα Λατινικό Τετράγωνο είναι μία ταξινόμηση n γραμμάτων σε n γραμμές και n στήλες (πίνακας $n \times n$), όπου κάθε γράμμα εμφανίζεται από μία φορά σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη. Το σχέδιο χρησιμοποιείται για τον ταυτόχρονο έλεγχο δύο πηγών 'ανεπιθύμητης' παραλλακτικότητας (παράγοντες όχλησης) και επιτυγχάνεται με την 'διπλή' ομαδοποίηση.

Πλεονεκτήματα

✓ Μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικό σε σχέση με το ΕΤΣ και το ΤΠΟ.

Μειονεκτήματα

- ✓ Οι βαθμοί ελευθερίας του σφάλματος είναι λιγότεροι σε σχέση με ΕΤΣ και ΤΠΟ.
- ✓ Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ίσος με τον αριθμό των επεμβάσεων.
- ✓ Ο αριθμός των επεμβάσεων στο ΛΤ δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλος και συνήθως κυμαίνεται μεταξύ 4 με 8.

Κατασκευή Λατινικού Τετραγώνου

Κάθε γράμμα (πειραματική επέμβαση) πρέπει να εμφανίζεται μία φορά σε κάθε ομάδα-στήλη και ομάδα-σειρά. Χρησιμοποιούνται πίνακες ή λογισμικό που δίνουν όλα τα δυνατά λατινικά τετράγωνα κάθε μεγέθους.

Ένας απλός τρόπος κατασκευής ενός Λατινικού Τετραγώνου είναι η δημιουργία της πρώτης γραμμής τοποθετώντας τα γράμματα σε τυχαία σειρά και στην συνέχεια η μετακίνηση της πρώτης γραμμής προς τα δεξιά ή τα αριστερά κατά 1, 2, ... , $n - 1$ θέσεις ώστε να δημιουργηθούν οι υπόλοιπες γραμμές.

	πολλή υγρασία		λίγη υγρασία	
γόνιμο	----->			
	A	B	Γ	Δ
	B	Γ	Δ	A
	Γ	Δ	A	B
λιγότερο γόνιμο	Δ	A	B	Γ

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Ένα Λατινικό Τετράγωνο λέγεται **κανονικό** (1) αν η πρώτη του γραμμή και στήλη είναι σε φυσική σειρά. Το πλήθος των Λατινικών Τετραγώνων τάξης n , είναι $L_n = n!(n-1)!R_n$, όπου R_n το πλήθος των κανονικών Λατινικών Τετραγώνων.

Διαγώνιο Λατινικό Τετράγωνο (**Diagonal Latin Square**) (2) είναι το τετράγωνο όπου κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται πάνω από μια φορά σε οποιαδήποτε από τις δύο διαγώνιους.

Δύο Λατινικά Τετράγωνα ονομάζονται ορθογώνια (**Orthogonal Latin Squares**) (1 και 2), όταν στις θέσεις όπου στο πρώτο εμφανίζεται οποιοδήποτε από τα n γράμματα (π.χ. **B**), στις ίδιες θέσεις του δεύτερου να εμφανίζονται όλα τα n γράμματα.

A	B	Γ	Δ
B	A	Δ	Γ
Γ	Δ	A	B
Δ	Γ	B	A

(1)

A	B	Γ	Δ
Γ	Δ	A	B
Δ	Γ	B	A
B	A	Δ	Γ

(2)

Σχέδιο Λατινικού Τετραγώνου

Το γραμμικό πρότυπο:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

Y_{ijk} = η παρατήρηση στην i επέμβαση, j σειρά και k στήλη

μ = ο μέσος όρος του πληθυσμού

τ_i = η επίδραση της i επέμβασης

β_j = η επίδραση της j ομάδας – σειράς

γ_k = η επίδραση της k ομάδας – στήλης

$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$ το πειραματικό σφάλμα

Κατάτμηση Αθροίσματος Τετραγώνων

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

$\bar{Y}_{...}$	εκτιμά	μ
$\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$	»	τ_i
$\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$	»	β_j
$\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}$	»	γ_k
$Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...}$	»	ε_{ijk}

οπότε:
$$Y_{ijk} = \bar{Y}_{...} + (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + 2\bar{Y}_{...})$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + 2\bar{Y}_{...})$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την ταυτότητα αυτή και αθροίσουμε όλες τις παρατηρήσεις, τότε τα γινόμενα μηδενίζονται και έχουμε:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = p \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + p \sum_{j=1}^p (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 + p \sum_{k=1}^p (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...})^2$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το Λατινικό Τετράγωνο

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	ΘΣΜΤ
Επεμβάσεις	$p - 1$	$AT\varepsilon = p \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$MT\varepsilon = \frac{AT\varepsilon}{(p-1)}$	$\frac{MT\varepsilon}{MT\nu}$	$\sigma_e^2 + p\sigma_\varepsilon^2$
Ομάδα (Σειρές)	$p - 1$	$AT\sigma_{\varepsilon i\rho} = p \sum_{j=1}^p (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$	$MT\sigma_{\varepsilon i\rho} = \frac{AT\sigma_{\varepsilon i\rho}}{(p-1)}$	$\frac{MT\sigma_{\varepsilon i\rho}}{MT\nu}$	$\sigma_e^2 + p\sigma_{\sigma_{\varepsilon i\rho}}^2$
Ομάδα (Στήλες)	$p - 1$	$AT\sigma\tau = p \sum_{k=1}^p (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$	$MT\sigma\tau = \frac{AT\sigma\tau}{(p-1)}$	$\frac{MT\sigma\tau}{MT\nu}$	$\sigma_e^2 + p\sigma_{\sigma\tau}^2$
Υπόλοιπο	$(p - 1)(p - 2)$	$AT\nu = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p (y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...})^2$	$MT\nu = \frac{AT\nu}{(p-1)(p-2)}$		σ_e^2
Σύνολο	$p^2 - 1$	$AT\sigma = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p (y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$			

Παράδειγμα: Τυχαιοποίηση 5 επεμβάσεων (χημικές ουσίες) σε σχέδιο Λ.Τ. με 5 επαναλήψεις (δύο παράγοντες όχλησης, όργανα και χειριστές).

```
> library(agricolae)
> trt=c("I","II","III","V","IV")
> design.lsd(trt, randomization=TRUE)
```

\$sketch

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] "III" "II" "I"  "V"  "IV"
[2,] "IV"  "V"  "III" "I"  "II"
[3,] "II"  "I"  "IV"  "III" "V"
[4,] "I"   "IV" "V"   "II"  "III"
[5,] "V"   "III" "II"  "IV"  "I"
```

	plots	row	col	rt
1	11	1	1	III
2	12	1	2	II
3	13	1	3	I
4	14	1	4	V
5	15	1	5	IV
6	21	2	1	IV
7	22	2	2	V
8	23	2	3	III
9	24	2	4	I
10	25	2	5	II
11	31	3	1	II
12	32	3	2	I
13	33	3	3	IV
14	34	3	4	III
15	35	3	5	V
16	41	4	1	I
17	42	4	2	IV
18	43	4	3	V
19	44	4	4	II
20	45	4	5	III
21	51	5	1	V
22	52	5	2	III
23	53	5	3	II
24	54	5	4	IV
25	55	5	5	I

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Όργανα	Χειριστές												
		1		2		3		4		5		M.O.	Σύνολο
	1	III	19	II	15	I	10	V	11	IV	22	15,4	77
	2	IV	13	V	13	III	22	I	6	II	14	13,6	68
	3	II	10	I	8	IV	17	III	21	V	14	14	70
	4	I	7	IV	15	V	13	II	13	III	23	14,2	71
	5	V	12	III	18	II	12	IV	19	I	8	13,8	69
	M.O.	12,2		13,8		14,8		14		16,2		14,2	
	Σύνολο	61		69		74		70		81			355

Δοκιμασία Anderson-Darling για έλεγχο κανονικότητας

Η δοκιμασία Anderson-Darling ελέγχει τη μηδενική υπόθεση ότι ένα δείγμα $x_1, \dots, x_n$ προήλθε από μία συγκεκριμένη κατανομή. Το κριτήριο A-D της δοκιμής υπολογίζεται ως εξής:

$$A^2 = -\sum_{i=1}^n \left[(2i-1) \left(\ln F_{(x_i)} + \ln(1 - F_{(x_{n+1-i})}) \right) / n \right] - n$$

όπου F η αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Για την κανονική κατανομή και αν οι παράμετροι είναι άγνωστοι ισχύει η προσαρμογή:

$$A_{adj}^2 = A^2 \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2} \right)$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

row	col	trt	Y_{ijk}	e_i	i	x_i	$F(x_i)$	$F(x_{n+1-i})$	$\ln(F(x_i))$	$\ln(1-F(x_{n+1-i}))$	$(2i-1)*[\ln(F(x_i)) + \ln(1-F(x_{n+1-i}))]$
1	1	III	19	-0,8	1	-2,6	0,025	0,965	-3,702	-3,358	-7,059
1	2	II	15	1,4	2	-1,8	0,087	0,913	-2,444	-2,444	-14,664
1	3	I	10	0,4	3	-1,8	0,087	0,887	-2,444	-2,178	-23,112
1	4	V	11	-2,6	4	-1,6	0,113	0,855	-2,178	-1,931	-28,767
1	5	IV	22	1,6	5	-1,4	0,145	0,855	-1,931	-1,931	-34,763
2	1	IV	13	-1,6	6	-1	0,225	0,855	-1,492	-1,931	-37,660
2	2	V	13	1,4	7	-1	0,225	0,818	-1,492	-1,703	-41,537
2	3	III	22	1,4	8	-0,8	0,273	0,727	-1,299	-1,299	-38,984
2	4	I	6	-1	9	-0,6	0,325	0,727	-1,124	-1,299	-41,194
2	5	II	14	-0,2	10	-0,6	0,325	0,619	-1,124	-0,964	-39,675
3	1	II	10	-0,6	11	-0,4	0,381	0,619	-0,964	-0,964	-40,508
3	2	I	8	0,8	12	-0,2	0,440	0,619	-0,821	-0,964	-41,070
3	3	IV	17	-0,6	13	-0,2	0,440	0,440	-0,821	-0,580	-35,021
3	4	III	21	0,8	14	0,4	0,619	0,440	-0,480	-0,580	-28,610
3	5	V	14	-0,4	15	0,4	0,619	0,381	-0,480	-0,480	-27,837
4	1	I	7	1,2	16	0,4	0,619	0,325	-0,480	-0,393	-27,066
4	2	IV	15	-1,8	17	0,8	0,727	0,325	-0,318	-0,393	-23,481
4	3	V	13	-0,2	18	0,8	0,727	0,273	-0,318	-0,318	-22,287
4	4	II	13	0,4	19	1,2	0,818	0,225	-0,201	-0,255	-16,865
4	5	III	23	0,4	20	1,4	0,855	0,225	-0,157	-0,255	-16,041
5	1	V	12	1,8	21	1,4	0,855	0,145	-0,157	-0,157	-12,842
5	2	III	18	-1,8	22	1,4	0,855	0,113	-0,157	-0,120	-11,902
5	3	II	12	-1	23	1,6	0,887	0,087	-0,120	-0,091	-9,494
5	4	IV	19	2,4	24	1,8	0,913	0,087	-0,091	-0,091	-8,536
5	5	I	8	-1,4	25	2,4	0,965	0,025	-0,035	-0,025	-2,961
											-631,935

$$A^2 = -\left(\frac{-631,935}{25}\right) - 25 = 0,27741$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> lsq=read.table("E:\\Lsq.txt", header=T, dec=",")  
> attach(Lsq)  
> fit=aov(Y~factor(trt)+factor(row)+factor(col))  
> res=residuals(fit)  
> res
```

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22  
-0.8 1.4 0.4 -2.6 1.6 -1.6 1.4 1.4 -1.0 -0.2 -0.6 0.8 -0.6 0.8 -0.4 1.2 -1.8 -0.2 0.4 0.4 1.8 -1.8  
23 24 25  
-1.0 2.4 -1.4
```

```
> library(nortest)  
> ad.test(res)
```

Anderson-Darling normality test

data: res

A = 0.27741, p-value = 0.6228

Δοκιμασία Cochran's C για ομοιογένεια των διακυμάνσεων

Η δοκιμή C του Cochran χρησιμοποιείται για να ελέγξει την υπόθεση της ομοιογένειας διακύμανσης. Η στατιστική δοκιμή είναι ένας λόγος της μεγαλύτερης διακύμανσης μιας επέμβασης με το άθροισμα των διακυμάνσεων όλων των επεμβάσεων.

$$C = \frac{\max s_i^2}{\sum_{i=1}^k s_i^2}$$

Η κρίσιμη τιμή:

$$C_{UL(a,n,k)} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{F_{(a/k, (n-1), (k-1)(n-1))}}}$$

Όπου α το επίπεδο εμπιστοσύνης, n ο αριθμός των παρατηρήσεων και k ο αριθμός των επεμβάσεων.

Δοκιμασία Cochran's C για ομοιογένεια των διακυμάνσεων

Επεμβάσεις	s^2
I	2,20
II	3,70
III	4,30
IV	12,20
V	1,30
Σύνολο	23,7

$$C = \frac{\max s_i^2}{\sum_{i=1}^k s_i^2} = \frac{12,2}{23,7} = 0,515$$

Η κρίσιμη τιμή:

$$C_{UL(a,n,k)} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{F_{(a/k, (n-1), (k-1)(n-1))}}} = \frac{1}{1 + \frac{5-1}{4,77}} = 0,54$$

Επειδή $C < C_{UL}$ δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(outliers)
> cochrان.test(Y~trt, data=Lsq)
```

Cochran test for outlying variance

data: Y ~ trt

C = 0.51477, df = 5, k = 5, p-value = 0.07865

alternative hypothesis: Group 4 has outlying variance

sample estimates:

1	2	3	4	5
2.2	3.7	4.3	12.2	1.3

Έλεγχος των υποθέσεων:

Μηδενική υπόθεση $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

Εναλλακτική υπόθεση $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \neq \mu_5$

Διορθωτικός όρος:

$$\Delta O = \frac{Y_{\dots}^2}{p^2} = \frac{355^2}{25} = 5041$$

Το συνολικό άθροισμα τετραγώνων υπολογίζεται ως εξής:

$$AT\sigma = \sum Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{..}^2}{p^2}$$

$$AT_{\text{συνόλου}} = 19^2 + 15^2 + \dots + 19^2 + 8^2 - 5041 = 572$$

Άθροισμα τετραγώνων επεμβάσεων:

$$AT_{\text{επεμβάσεων}} = \sum \frac{Y_{i..}^2}{p} - \frac{Y_{...}^2}{p^2}$$

$$AT_{\text{επεμβάσεων}} = \frac{39^2}{5} + \frac{64^2}{5} + \frac{104^2}{5} + \frac{86^2}{5} + \frac{63^2}{5} - 5041 = 477,2$$

Άθροισμα τετραγώνων σειρών:

$$AT_{\text{σειρών}} = \sum \frac{Y_{\cdot j.}^2}{p} - \frac{Y_{...}^2}{p^2}$$

$$AT_{\text{σειρών}} = \frac{77^2}{5} + \frac{68^2}{5} + \frac{70^2}{5} + \frac{71^2}{5} + \frac{69^2}{5} - 5041 = 10$$

Άθροισμα τετραγώνων στηλών:

$$AT_{\text{στηλών}} = \sum \frac{Y_{..k}^2}{p} - \frac{Y_{...}^2}{p^2}$$

$$AT_{\text{στηλών}} = \frac{61^2}{5} + \frac{69^2}{5} + \frac{74^2}{5} + \frac{70^2}{5} + \frac{81^2}{5} - 5041 = 42,8$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> anova(fit)
```

Analysis of Variance Table

Response: Y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
factor(trt)	4	477.2	119.3	34.0857	1.825e-06 ***
factor(row)	4	10.0	2.5	0.7143	0.59799
factor(col)	4	42.8	10.7	3.0571	0.05946 .
Residuals	12	42.0	3.5		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το Σχέδιο Λατινικού Τετραγώνου

Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	F πίνακα
Επεμβάσεις	4	477,2	119,3	34,086*	3,25
Ομάδα (Σειρές)	4	10	2,5	0,714 ^{ns}	3,25
Ομάδα (Στήλες)	4	42,8	10,7	3,057 ^{ns}	3,25
Υπόλοιπο	12	42	3,5		
Σύνολο	24	572			

Δοκιμασία Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς

$$ΕΣΔ = t_{[\alpha(p-1)(p-1)]} * \sqrt{\frac{2 * MT_{\text{υπ}}}{p}} = 2,178 * \sqrt{\frac{2 * 3,5}{5}} = 2,577$$

Επέμβαση	Μέσος	
3	20,6	a
4	17,2	b
2	12,8	c
5	10,6	c
1	7,8	d

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(agricolae)
```

```
> LSD.test(fit,"trt", console = T)
```

Study: fit ~ "trt"

LSD t Test for Y

Mean Square Error: 3.5

trt, means and individual (95 %) CI

	Y	std	r	LCL	UCL	Min	Max
1	7.8	1.483240	5	5.977074	9.622926	6	10
2	12.8	1.923538	5	10.977074	14.622926	10	15
3	20.6	2.073644	5	18.777074	22.422926	18	23
4	17.2	3.492850	5	15.377074	19.022926	13	22
5	12.6	1.140175	5	10.777074	14.422926	11	14

Alpha: 0.05 ; DF Error: 12

Critical Value of t: 2.178813

least Significant Difference: 2.578006

Treatments with the same letter are not significantly different.

	Y	groups
3	20.6	a
4	17.2	b
2	12.8	c
5	12.6	c
1	7.8	d

Απώλεια παρατηρήσεων

Η τιμή της παρατήρησης που λείπει υπολογίζεται ως :

$$X = \frac{k(Y_{i..} + Y_{.j.} + Y_{..k}) - 2Y_{...}}{(k-1)(k-1)}$$

Όπου :

k ο αριθμός των επεμβάσεων

$Y_{i..}$ = το σύνολο των τιμών της επέμβασης από όπου λείπει η παρατήρηση

$Y_{..k}$ = το σύνολο των τιμών της στήλης από όπου λείπει η παρατήρηση

$Y_{.j.}$ = το σύνολο των τιμών της σειράς από όπου λείπει η παρατήρηση

$Y_{...}$ = το σύνολο των τιμών του πειράματος

Υπολογισμός Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς με απώλεια παρατηρήσεων

Αν η δοκιμασία F είναι σημαντική, για την σύγκριση των επεμβάσεων, το τυπικό σφάλμα της διαφοράς των μέσων επεμβάσεων, που από την μία λείπει η παρατήρηση, δίνεται από τον τύπο:

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{s^2 \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \right]}$$

ενώ για τις υπόλοιπες συγκρίσεις επεμβάσεων:

$$s_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{2s_e^2}{r}}$$

Επανάληψεις Λατινικών Τετραγώνων

Για να αυξηθούν οι βαθμοί ελευθερίας του υπολοίπου σε μικρά πειράματα Λ.Τ., μπορούν να γίνουν περισσότερες από μία επανάληψη.

Η τοποθέτηση τριών Λατινικών Τετραγώνων σε τρεις επανάληψεις

1 ^η επανάληψη			2 ^η επανάληψη			3 ^η επανάληψη		
A	Γ	B	Γ	A	B	A	B	Γ
Γ	B	A	B	Γ	A	B	Γ	A
B	A	Γ	A	B	Γ	Γ	A	B

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

- α) Χρησιμοποίηση ίδιων σειρών και στηλών ανά επανάληψη
- β) Χρησιμοποίηση διαφορετικών σειρών αλλά ίδιων στηλών ανά επανάληψη
- γ) Χρησιμοποίηση διαφορετικών σειρών και στηλών ανά επανάληψη

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \varepsilon_{ijkl}$$

Πηγή Παραλλακτικότητας ¹	ΒΕ	ΑΤ
Επανάληψεις	$r - 1$	$\frac{1}{p^2} \sum Y_{...l}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Ομάδα - Σειρές (Χειριστές)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{.i..}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Ομάδα - Στήλες (Όργανα)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{..k.}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Επέμβαση (Χημικές ουσίες)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{i...}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Υπόλοιπο	$(p - 1) [r(p + 1) - 3]$	Αφαίρεση
Σύνολο	$rp^2 - 1$	$\sum Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$

¹ = ίδιοι χειριστές και όργανα ανά επανάληψη

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_{j(l)} + \gamma_k + \rho_l + \varepsilon_{ijkl}$$

Πηγή Παραλλακτικότητας ²	ΒΕ	ΑΤ
Επανάληψεις	$r - 1$	$\frac{1}{p^2} \sum Y_{...l}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Ομάδα - Σειρές (Χειριστές)	$r(p - 1)$	$\frac{1}{p} \sum \sum Y_{.i.l}^2 - \sum \frac{Y_{...l}^2}{p^2}$
Ομάδα - Στήλες (Όργανα)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{..k.}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Επέμβαση (Χημικές ουσίες)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{i...}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Υπόλοιπο	$(p - 1)(rp - 2)$	Αφαίρεση
Σύνολο	$rp^2 - 1$	$\sum Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$

² = διαφορετικοί χειριστές αλλά ίδια όργανα ανά επανάληψη

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{k(l)} + \rho_l + \varepsilon_{ijkl}$$

Πηγή Παραλλακτικότητας ³	ΒΕ	ΑΤ
Επανάληψεις	$r - 1$	$\frac{1}{p^2} \sum Y_{...l}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Ομάδα - Σειρές (Χειριστές)	$r(p - 1)$	$\frac{1}{p} \sum \sum Y_{.i.l}^2 - \sum \frac{Y_{...l}^2}{p^2}$
Ομάδα - Στήλες (Όργανα)	$r(p - 1)$	$\frac{1}{p} \sum \sum Y_{..kl}^2 - \sum \frac{Y_{...l}^2}{p^2}$
Επέμβαση (Χημικές ουσίες)	$p - 1$	$\frac{1}{rp} \sum Y_{i...}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$
Υπόλοιπο	$(p - 1) [r(p - 1) - 1]$	Αφαίρεση
Σύνολο	$rp^2 - 1$	$\sum Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$

³ = διαφορετικοί χειριστές και όργανα ανά επανάληψη

Ελληνο-Λατινικά Τετραγώνια (Graeco-Latin Squares)

Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι αποτελεσματικοί για τον έλεγχο τριών παραγόντων όχλησης (σειρές, στήλες και ελληνικά γράμματα). Δημιουργούνται από την ένωση δύο ορθογωνίων λατινικών τετράγωνων από τα οποία στο δεύτερο, τα λατινικά γράμματα έχουν αντικατασταθεί από ελληνικά.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dγ	Cδ	Bα	Aβ
Bδ	Aγ	Dβ	Cα
Cβ	Dα	Aδ	Bγ

Το γραμμικό πρότυπο:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_k + \gamma_l + \varepsilon_{ijkl}$$

Όπου τ_i η επίδραση του παράγοντα 'λατινικά γράμματα' και α_j , β_k και γ_l , οι επιδράσεις των παραγόντων όχλησης 'ελληνικά γράμματα', 'σειρές' και 'στήλες'.

Υπερ-Ελληνο-Λατινικά Τετραγώνια (Hyper-Graeco-Latin Squares)

Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι αποτελεσματικοί για τον έλεγχο τεσσάρων παραγόντων όχλησης (σειρές, στήλες, ελληνικά γράμματα και αριθμοί). Δημιουργούνται από την ένωση τριών λατινικών τετράγωνων τάξης n ανά δύο ορθογώνιων.

A	D	B	C
D	A	C	B
B	C	A	D
C	B	D	A

α	δ	β	γ
γ	β	δ	α
δ	α	γ	β
β	γ	α	δ

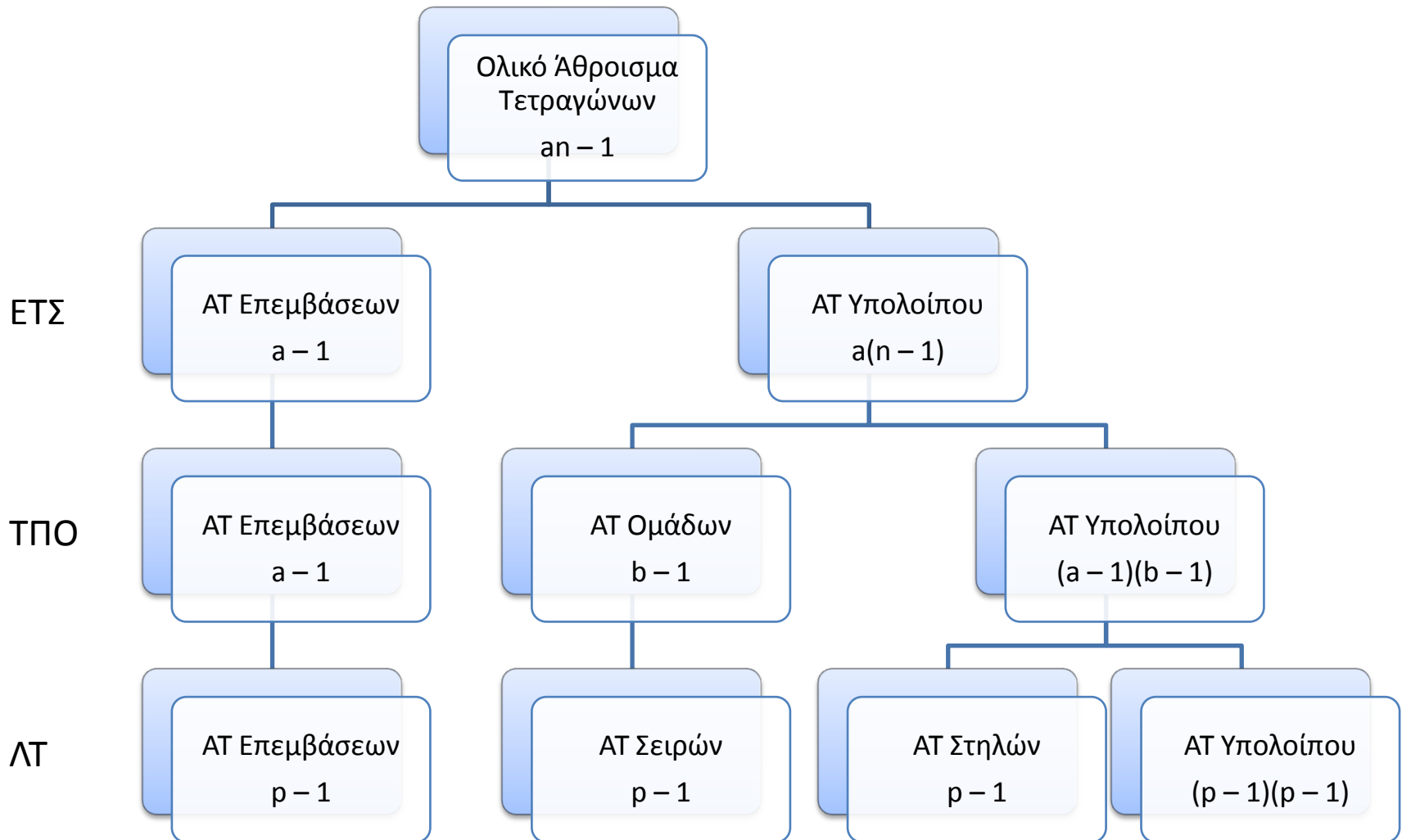
1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2



Aα1	Dδ4	Bβ2	Cγ3
Dγ2	Aβ3	Cδ1	B14
Bδ3	Cα2	Aγ4	Dβ1
Cβ4	Bγ1	Dα3	Aδ2

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Κατάτμηση του ολικού αθροίσματος τετραγώνων και των βαθμών ελευθερίας του ίδιου πειράματος που αναλύεται σύμφωνα με τα τρία πειραματικά σχέδια



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράδειγμα: Τέσσερις πειραματικές επεμβάσεις (Α, Β, Γ και Δ) με τέσσερις επαναλήψεις.

ΕΤΣ

A 10	B 15	Γ 19	Δ 11
B 14	Γ 22	Δ 13	A 6
Γ 21	Δ 14	A 8	B 10
Δ 13	A 9	B 13	Γ 19

ΤΠΟ

Ομάδες

1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η
A 10	B 15	Γ 19	Δ 11
B 14	Γ 22	Δ 13	A 6
Γ 21	Δ 14	A 8	B 10
Δ 13	A 9	B 13	Γ 19

ΛΤ

Ομάδες (Στήλες)

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η
1 ^η	A 10	B 15	Γ 19	Δ 11
2 ^η	B 14	Γ 22	Δ 13	A 6
3 ^η	Γ 21	Δ 14	A 8	B 10
4 ^η	Δ 13	A 9	B 13	Γ 19

Ομάδες (Σειρές)

ΕΤΣ					ΤΠΟ					ΣΛΤ				
Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	Ε	Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	Ε	Πηγή Παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	Ε
Επέμβαση	3	295,7	98,5	34,5*	Επέμβαση	3	295,7	98,5	175*	Επέμβαση	3	295,7	98,5	135*
-					Ομάδες	3	29,18	9,72	17,2*	Στήλες	3	29,18	9,72	13,5*
-					-					Σειρές	3	0,68	1,34	1,9
Υπόλοιπο	12	34,2	2,85		Υπόλοιπο	9	5,06	0,56		Υπόλοιπο	6	4,37	0,72	
Σύνολο	15	329,9			Σύνολο	15	329,9			Σύνολο	15	329,9		
CV%	12,4%				CV%	5,5%				CV%	6,2%			
R ²	89,6%				R ²	98,4%				R ²	98,6%			
R ² _{adj}	87%				R ² _{adj}	97,4%				R ² _{adj}	96,6%			

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Άσκηση 1. Τα δεδομένα προέρχονται από πείραμα αξιολόγησης τεσσάρων διαφορετικών τύπων ελαστικών (Α, Β, Γ & Δ) ως προς την κατανάλωση σε καύσιμο. Στο πείραμα συμμετείχαν τέσσερα όμοια αυτοκίνητα και τέσσερις οδηγοί και χρησιμοποιήθηκε το σχέδιο του λατινικού τετραγώνου. Ελέγξτε αν υπάρχουν στατιστικά διαφορές μεταξύ των ελαστικών.

		Οδηγοί						
Αυτοκίνητα	A	5,1	B	6	Γ	7,3	Δ	6,2
	B	5,4	Γ	7,1	Δ	5,9	A	6,1
	Γ	6,9	Δ	5,6	A	5,1	B	7
	Δ	5,7	A	4,9	B	6,3	Γ	7,5