ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Παραγοντικοί Σχεδιασμοί

Κατσιλέρος Αναστάσιος

2017

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ
(factorial experiments)

Ως παράγοντας ορίζεται το είδος της πειραματικής επέμβασης που εφαρμόζεται στο πείραμα και επίπεδο ο αριθμός των επεμβάσεων που έχει ο παράγοντας. Τα επίπεδα των παραγόντων μπορεί να είναι κατηγορικά ή/και συνεχή και προκαθορισμένα (Fixed Effects) ή τυχαία (Random Effects).

Τα παραγοντικά πειράματα αναλύουν την επίδραση δύο ή περισσοτέρων παραγόντων αλλά και των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων (αλληλεπίδραση) σε μία μεταβλητή. Η αλληλεπίδραση ορίζεται ως η ανόμοια αντίδραση των επεμβάσεων ενός παράγοντα στα διάφορα επίπεδα του άλλου παράγοντα που δεν μπορεί να αποδοθεί στην τύχη.

Κατηγορίες παραγοντικών πειραμάτων

- **Πλήρη παραγοντικά πειράματα**

Περιέχουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων και χρησιμοποιούνται για συγκριτικούς σκοπούς ($2^κ$, $3^κ$, 3x4, split plot κ.α.).

- **Μη πλήρη ομάδων παραγοντικά πειράματα**

Ένα πλήρες παραγοντικό με την μέθοδο της ανάμειξης διαιρείται σε ομάδες οι οποίες περιέχουν λιγότερες επεμβάσεις από ότι απαιτεί μια πλήρης επανάληψη.

- **Κλασματικά παραγοντικά πειράματα.**

Χρησιμοποιούνται για να πάρουμε πληροφορίες για τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης, εκτελώντας μόνο ένα κλάσμα του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού. Εφαρμόζονται σε διαχωριστικά πειράματα (2^{3-1}, Plackett-Burman κ.α.).

- **Μεθοδολογία αποκριτικής επιφάνειας.**

Τα σχέδια αυτά χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των επιπέδων των παραγόντων ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής απόκρισης (Central composite, Box-Behnken κ.α.).

Πλεονεκτήματα παραγοντικών πειραμάτων

✓ Τα παραγοντικά πειράματα είναι πολύ αποτελεσματικά γιατί προσεγγίζουν καλύτερα στον ‘πραγματικό’ κόσμο, παρέχοντας πληροφορίες με μικρή αύξηση του κόστους.
✓ Παρέχουν εκτιμήσεις των αλληλεπιδράσεων.
✓ Αύξηση της ακρίβειας λόγω της κρυμμένης επανάληψης.

Μειονεκτήματα παραγοντικών πειραμάτων

✓ Μερικοί συνδυασμοί επεμβάσεων μπορεί να μην εμφανίζουν ενδιαφέρον.
✓ Είναι δύσκολη η ερμηνεία των αποτελεσμάτων ειδικά σε μεγάλου βαθμού αλληλεπιδράσεις.
✓ Αν προσθέσουμε πολλούς παράγοντες και επίπεδα μπορεί να αυξηθεί πάρα πολύ το μέγεθος του πειράματος.

Επιλογή των παραγόντων

Η επιλογή των παραγόντων εξαρτάται από το στάδιο, την τεχνική, τις συνθήκες και τον σκοπό του πειράματος.

Επιλογή των επιπέδων

Η επιλογή των επιπέδων εξαρτάται από τους παράγοντες (ποσοτικοί – ποιοτικοί), από το στάδιο του πειράματος (π.χ. προκαταρτικό), το είδος μεταβλητής και τον σκοπό της έρευνας.

Συνήθως ο αριθμός των επιπέδων θα πρέπει να επιτρέπει την εκτίμηση του σφάλματος με τουλάχιστον 8 – 10 βαθμούς ελευθερίας και τα επίπεδα πρέπει να διαφέρουν κατά την ίδια ποσότητα και να έχουν τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων.

Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για την κλίση της αντίδρασης είναι καλύτερα να χρησιμοποιούμε δύο επίπεδα ενώ αν υποπτευόμαστε ότι η δεν είναι ευθεία τότε για να την εξετάσουμε χρειαζόμαστε τρία ισαπέχοντα επίπεδα ή κεντρικά σημεία ή πιο πολλά επίπεδα στο σημείο της καμπύλης.

Παράδειγμα: Αντικατάσταση και σύγκριση δύο απλών πειραμάτων με ένα διπαραγοντικό.

Παράγοντας Α:
Τρία επίπεδα και πέντε επαναλήψεις

Πηγή παρ/τας	ΒΕ
Α	a – 1 = 2
Υπόλοιπο	a(n – 1) = 12
Σύνολο	an – 1 = 14

Παράγοντας Β:
Τέσσερα επίπεδα και πέντε επαναλήψεις

Πηγή παρ/τας	ΒΕ
Β	b – 1 = 3
Υπόλοιπο	b(n – 1) = 16
Σύνολο	an – 1 = 19

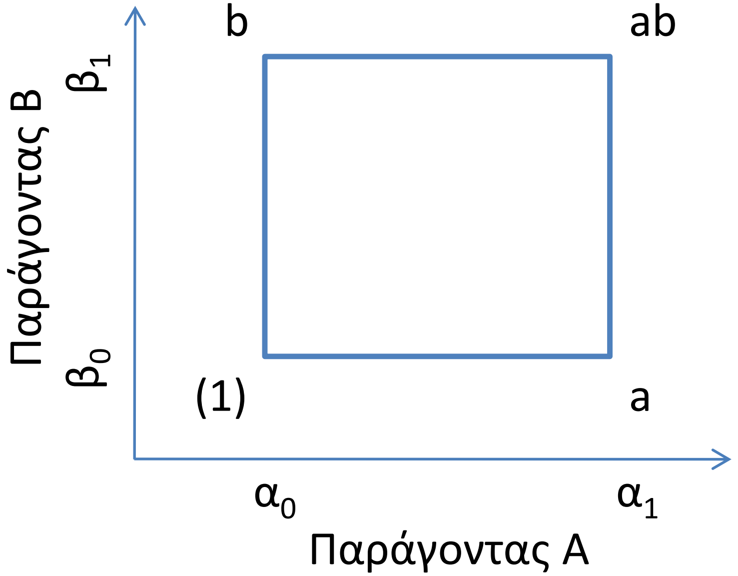
Διπαραγοντικό Α και Β:
Τρία και τέσσερα επίπεδα με τρεις επαναλήψεις

Πηγή παρ/τας	ΒΕ
Α	a – 1 = 2
Β	b – 1 = 3
ΑΒ	(a – 1)(b – 1) = 6
Υπόλοιπο	ab(n – 1) = 24
Σύνολο	abn – 1 = 35

- ✓ Περισσότερες πληροφορίες λόγω της αλληλεπίδρασης των επιπέδων των παραγόντων Α και Β.
- ✓ Ακόμα και σε απουσία αλληλεπίδρασης έχουμε επιπλέον επαναλήψεις για τους παράγοντες.
- ✓ Περισσότερους βαθμούς ελευθερίας του σφάλματος για την εκτίμηση του σφάλματος.
- ✓ Οριακή αύξηση του μεγέθους του πειράματος.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράδειγμα : 2^2



Οι **απλές επιδράσεις** των παραγόντων Α και Β δίνονται για μεν τον παράγοντα Α από τις διαφορές (ab – b)/n και (a – (1))/n σε κάθε επίπεδο του Β, για δε τον Β από τις διαφορές (ab – a)/n και (b – (1))/n σε κάθε επίπεδο του Α.

Οι **κύριες (μέσες) επιδράσεις** (μέσος όρος των απλών επιδράσεων) των παραγόντων Α και Β υπολογίζονται με ως εξής:

$$A = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})+(\mathrm{a}-(1))] \qquad B = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})+(\mathrm{b}-(1))]$$

Η **αλληλεπίδραση** υπολογίζεται ως η μέση διαφορά των απλών επιδράσεων του παράγοντα Α ή του Β.

$$AB = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})-(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})-(\mathrm{b}-(1))]$$

Παράδειγμα : Απλές επιδράσεις – Κύριες (Μέσες) επιδράσεις - Αλληλεπιδράσεις

Συνδυασμός επεμβάσεων	Επανάληψη			Σύνολο
	1	2	3	
$\alpha_0\beta_0$	8	10	10	28 (1)
$\alpha_1\beta_0$	13	15	12	40 a
$\alpha_0\beta_1$	10	12	12	34 b
$\alpha_1\beta_1$	15	15	16	46 ab

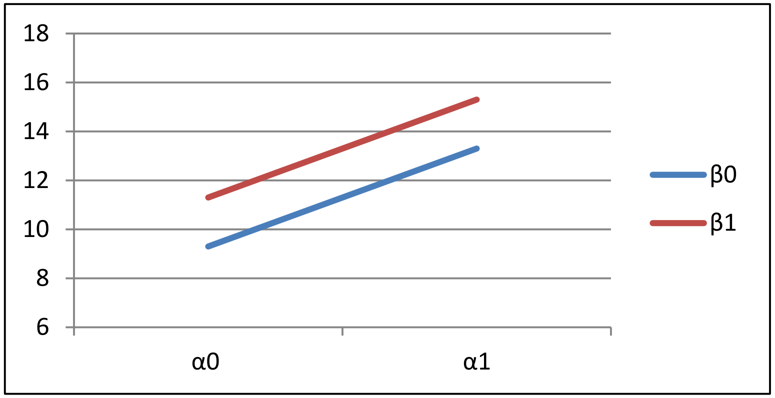
Παράγοντας Β	Παράγοντας Α		
επίπεδο	α_0	α_1	Απλή επίδραση
β_0	28	40	(40 – 28)/3 = 4
β_1	34	46	(46 – 34)/3 = 4
Απλή επίδραση	(34 – 28)/3 = 2	(46 – 40)/3 = 2	

$$A = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})+(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{6}[(46-34)+(40-28)] = 4$$

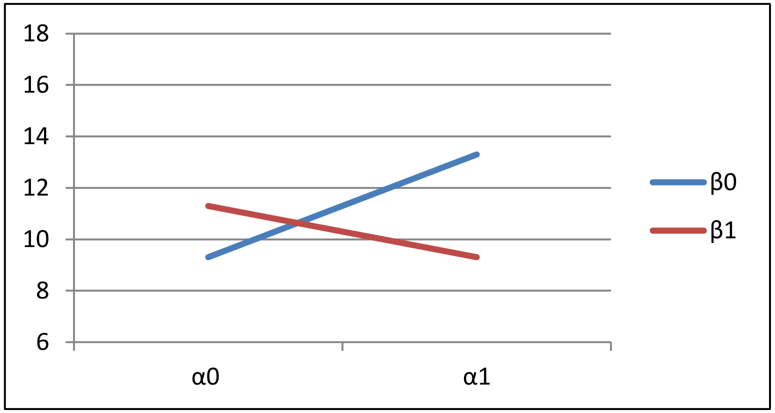
$$B = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{a})+(\mathrm{b}-(1))] = \frac{1}{6}[(46-40)+(34-28)] = 2$$

$$AB = \frac{1}{2^{\kappa-1}n}[(\mathrm{ab}-\mathrm{b})-(\mathrm{a}-(1))] = \frac{1}{6}[(46-34)-(40-28)] = 0$$

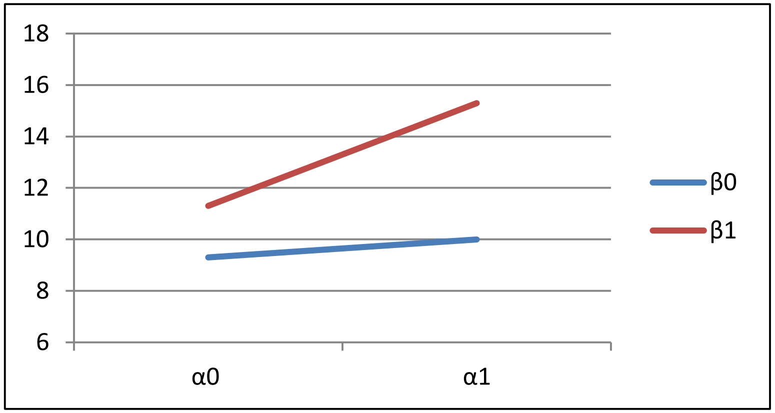
Πειραματικοί Σχεδιασμοί



Απουσία αλληλεπίδρασης
(Α = 4, Β = 2 και ΑΒ = 0)



Παρουσία αλληλεπίδρασης
(κατεύθυνσης)
(Α = 1, Β = - 1 και ΑΒ = - 3)



Παρουσία αλληλεπίδρασης
(συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα)
(Α = 2,3, Β = 3,6 και ΑΒ = 1,6)

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Το γραμμικό πρότυπο πειράματος που ακολουθεί το εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

μ = ο μέσος όρος των αβ επεμβάσεων

α_i = η επίδραση του *i* επιπέδου του πρώτου παράγοντα - επέμβαση

β_j = η επίδραση του *j* επιπέδου του δεύτερου παράγοντα - επέμβαση

$(\alpha\beta)_{ij}$ = η αλληλεπίδραση του *i* επιπέδου του πρώτου παράγοντα με το *j* επιπέδου του δεύτερου παράγοντα

ε_{ijk} = η απόκλιση της Y_{ijk} από το μέσο του *ij* πληθυσμού

Προϋποθέσεις: τα ε_{ijk} είναι ανεξάρτητα, ακολουθούν κανονική κατανομή και προέρχονται από ένα πληθυσμό με την ίδια διασπορά.

Κατάτμηση Αθροίσματος Τετραγώνων

$$Y_{ijk} - \overline{Y}_{..} = Y_{ijk} - \mu = \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

a_i : ως $\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}$

β_j : ως $\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}$

ε_{ijk} : ως $Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}$

Οπότε :

$$Y_{ijk} - \overline{Y}_{..} = \left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right) + \left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right) + \left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right) + \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την πιο πάνω ταυτότητα για κάθε παρατήρηση και αθροίσουμε όλες τις παρατηρήσεις:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + an\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)^2$$

Ανάλυση της Παραλλακτικότητας για το ΕΤΣ

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	ΘΣΜΤ*
Α	a – 1	$AT_A = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2$	$MT_A = \frac{AT_A}{(a-1)}$	$\frac{MT_A}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + bn\sigma_a^2$
Β	b – 1	$AT_B = an\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right)^2$	$MT_B = \frac{AT_B}{(b-1)}$	$\frac{MT_B}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + an\sigma_b^2$
ΑΒ	(a – 1)(b – 1)	$AT_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}\right)^2$	$MT_{AB} = \frac{AT_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MT_{AB}}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{ab}^2$
Υπόλοιπο	ab(n – 1)	$AT\upsilon = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)^2$	$MT\upsilon = \frac{AT\upsilon}{ab(n-1)}$		σ_e^2
Σύνολο	ab – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2$			

*Α και Β: Πρότυπο Ι (Σταθερών επιδράσεων)

Πίνακας Ανάλυσης Παραλλακτικότητας

Πηγή παρ/τας	**ΒΕ**	**ΘΣΜΤ[1]**	**ΘΣΜΤ[2]**	**ΘΣΜΤ[3]**
Α	$a-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + bn\sigma_\alpha^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$
Β	$b-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + an\sigma_\beta^2$	$\sigma_e^2 + an\sigma_\beta^2$
ΑΒ	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
Υπόλοιπο	$ab(n-1)$	σ_e^2	σ_e^2	σ_e^2

[1] Μοντέλο σταθερών επιδράσεων, [2] Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων και [3] Μοντέλο μεικτών επιδράσεων (Α προκαθορισμένο και Β τυχαίο)

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Παράδειγμα: Τυχαιοποίηση πειράματος δύο παραγόντων με δυο και τρία επίπεδα αντίστοιχα, με τέσσερις επαναλήψεις, σε Εντελώς Τυχαιοποιημένο Σχέδιο.

```
> library(agricolae)
> trt=c(2,3)
> outdesign=design.ab(trt, r=4, design=c("crd"), randomization=TRUE)
> outdesign
```

	plots	r	A	B
1	101	1	1	3
2	102	1	1	1
3	103	1	1	2
4	104	1	2	3
5	105	1	2	1
6	106	2	2	3
7	107	2	2	1
8	108	1	2	2
9	109	2	2	2
10	110	3	2	3
11	111	2	1	2
12	112	3	1	2

	plots	r	A	B
13	113	2	1	3
14	114	4	2	3
15	115	3	1	3
16	116	3	2	1
17	117	2	1	1
18	118	4	2	1
19	119	3	2	2
20	120	4	2	2
21	121	4	1	2
22	122	3	1	1
23	123	4	1	1
24	124	4	1	3

Παράδειγμα : Πείραμα δύο παραγόντων (2Χ3) σε σχέδιο Ε.Τ.Σ.

Παράγοντας Β	Παράγοντας Α		
	a_1	a_2	
b_1	12	5	
	10	8	
	8	7	
	8	4	
Σύνολο	38	24	62
Μ.Ο.	9,5	6	7,75
b_2	12	9	
	16	8	
	17	8	
	19	9	
Σύνολο	64	34	98
Μ.Ο.	16	8,5	12,25
b_3	13	15	
	16	16	
	15	16	
	18	13	
Σύνολο	62	60	122
Μ.Ο.	15,5	15	15,25
Σύνολο	164	118	282
Μ.Ο.	13,7	9,8	11,75

Η δοκιμασία D' Agostino–Pearson K^2 για έλεγχο της κανονικότητας

Η δοκιμασία D'Agostino-Pearson K^2 ελέγχει αν ένα δείγμα προέρχεται από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό χρησιμοποιώντας τις στατιστικές δοκιμασίες των συντελεστών λοξότητας και κύρτωσης, $\sqrt{b_1}$ και b_2.

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{3/2}} \qquad b_2 = \frac{m_4}{m_2^{\,2}} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{2}} - 3$$

Η στατιστική δοκιμασία K^2 είναι η εξής:

$$K^2 = Z^2(\sqrt{b_1}) + Z^2(b_2)$$

και ακολουθεί την χ^2 κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας.

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> A=factor(A);B=factor(B);R=factor(R);
> fit=aov(Y~A+B+A*B)
> res=residuals(fit)
>  library(fBasics)
>  dagoTest(res)
```

```
Title: D'Agostino Normality Test
Test Results:
STATISTIC:
Chi2 | Omnibus:  0.553
Z3  | Skewness:  -0.7018
Z4  | Kurtosis:     0.246
P VALUE:
Omnibus  Test:   0.7584
Skewness Test:   0.4828
Kurtosis Test:      0.8057
```

```
> attach(factorial_2X3_crd)
> bartlett.test(split(Y, list(A,B)))

Bartlett test of homogeneity of variances
data:  split(Y, list(A, B))
Bartlett's K-squared = 5.7425, df = 5, p-value = 0.3321

> library(car)
> leveneTest(Y~A*B, center="mean")

Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = "mean")
        Df  F value  Pr(>F)
group    5  1.0105   0.4401
        18
```

$$\Delta O = \frac{Y_{...}^{2}}{abn} = \frac{282^2}{2*3*4} = 3313{,}5$$

$$AT_{\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda o\upsilon} = \sum_{ijk} Y_{ijk}^2 - \Delta O = 12^2 + 10^2 + \ldots + 16^2 + 13^2 - \Delta O = 3746 - 3313{,}5 = 432.5$$

$$AT_A = \sum_i \frac{Y_{i..}^2}{bn} - \Delta O = \frac{(164)^2 + (118)^2}{12} - \Delta O = 3403{,}66 - 3313{,}5 = 88{,}16$$

$$AT_B = \sum_j \frac{Y_{.j.}^2}{an} - \Delta O = \frac{(62)^2 + (98)^2 + (122)^2}{8} - \Delta O = 3541{,}5 - 3313{,}5 = 228$$

$$AT_{AB} = \sum_{ij} \frac{Y_{ij.}^2}{n} - AT_A - AT_B - \Delta O = \frac{(38)^2 + \ldots + (60)^2}{4} - AT_A - AT - \Delta O = 49{,}33$$

$$AT_{\upsilon\pi.} = AT_{\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda o\upsilon} - AT_A - AT_B - AT_{AB} = 67$$

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το ΕΤΣ

Πηγή παρ/τας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**F πιν.**
A	a – 1 = 1	88,16	88,17	23,69	4,41
B	b – 1 = 2	228	114,00	30,63	3,55
AB	(a – 1)(b – 1) = 2	49,33	24,67	6,63	
Υπόλοιπο	ab(n – 1) = 18	67,00	3,72		
Σύνολο	abn – 1 = 23	432,5			

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> attach(factorial_2X3_crd)
> A=factor(A);B=factor(B);R=factor(R)
> fit=aov(Y~A+B+A*B)
> summary(fit)

             Df   Sum Sq   Mean Sq   F value   Pr(>F)
A             1    88.17     88.17    23.687   0.000124 ***
B             2   228.00    114.00    30.627   1.61e-06 ***
A:B           2    49.33     24.67     6.627   0.006972 **
Residuals    18    67.00      3.72
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Επειδή η αλληλεπίδραση A x B είναι σημαντική, σχολιάζονται οι διαφορές μεταξύ των συνδυασμών των επιπέδων των δύο παραγόντων.

$$\mathrm{E\Sigma\Delta_{AB}} = t[a, \mathrm{BE\upsilon}]*\sqrt{\frac{2*\mathrm{MT\upsilon\pi}}{n}} = 2{,}1*\sqrt{\frac{2*3{,}72}{4}} = 2{,}86$$

Επέμβαση	Μέσος όρος	
a_1,b_2	16	A
a_1,b_3	15,5	A
a_2,b_3	15	A
a_1,b_1	9,5	B
a_2,b_2	8,5	BC
a_2,b_1	6	C

* Αν η αλληλεπίδραση A x B δεν ήταν σημαντική, σχολιάζονται οι διαφορές μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα A ανεξάρτητα από τα επίπεδα του παράγοντα B, καθώς και οι διαφορές μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα B ανεξάρτητα από τα επίπεδα του παράγοντα A, υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές της ΕΣΔ.

$$\mathrm{E\Sigma\Delta_{A}} = t[a, \mathrm{BE\upsilon}]*\sqrt{\frac{2*\mathrm{MT\upsilon\pi}}{bn}}$$ και $$\mathrm{E\Sigma\Delta_{B}} = t[a, \mathrm{BE\upsilon}]*\sqrt{\frac{2*\mathrm{MT\upsilon\pi}}{an}}$$

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(agricolae)
> LSD.test (fit, c ("A", "B"), console = T)
```

Study: fit ~ c("A", "B")
LSD t Test for Y
Mean Square Error: 3.722222
A:B, means and individual (95 %) CI

	Y	std	r	LCL	UCL	Min	Max
1:1	9.5	1.9148542	4	7.473339	11.526661	8	12
1:2	16.0	2.9439203	4	13.973339	18.026661	12	19
1:3	15.5	2.0816660	4	13.473339	17.526661	13	18
2:1	6.0	1.8257419	4	3.973339	8.026661	4	8
2:2	8.5	0.5773503	4	6.473339	10.526661	8	9
2:3	15.0	1.4142136	4	12.973339	17.026661	13	16

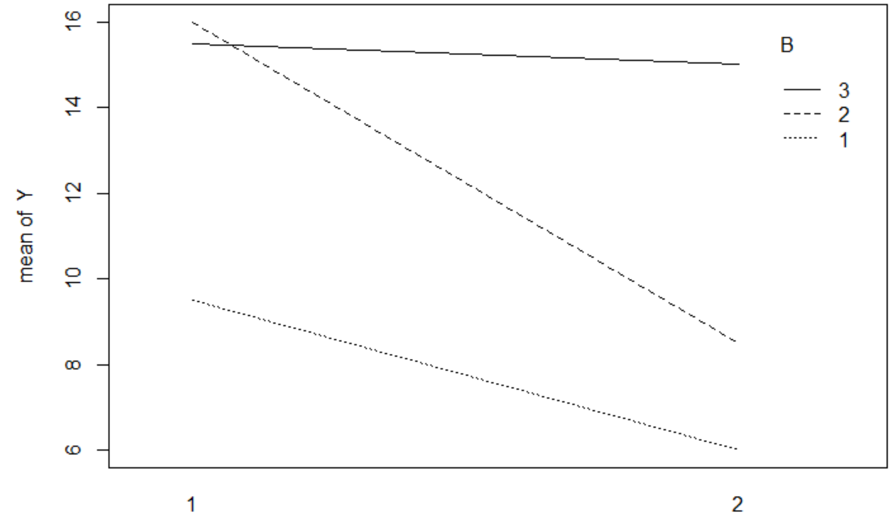
Alpha: 0.05 ; DF Error: 18
Critical Value of t: 2.100922
least Significant Difference: 2.866131

Treatments with the same letter are not significantly different.

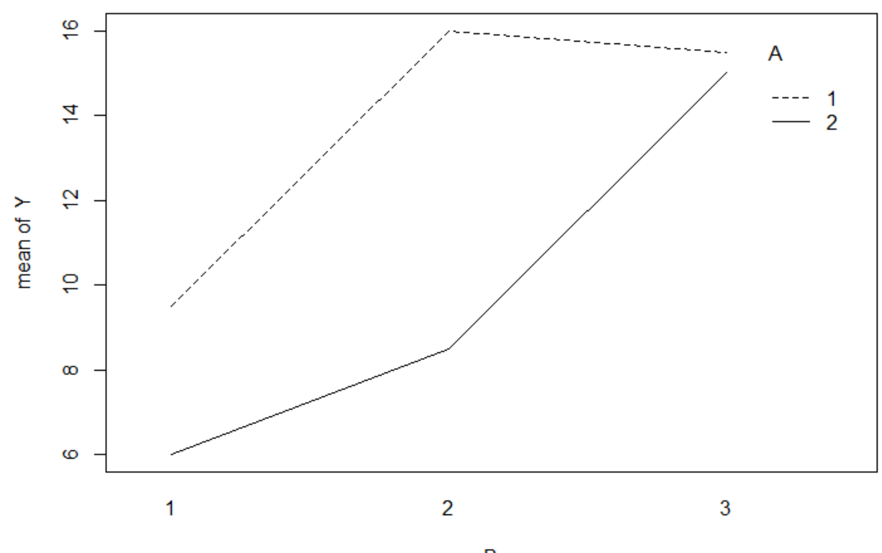
	Y	groups
1:2	16.0	a
1:3	15.5	a
2:3	15.0	a
1:1	9.5	b
2:2	8.5	bc
2:1	6.0	c

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

> interaction.plot(A, B, Y)



> interaction.plot(B, A, Y)



Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Το γραμμικό πρότυπο πειράματος που ακολουθεί το σχέδιο των τυχαιοποιημένων πλήρων ομάδων.

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

μ = ο μέσος όρος των αβ επεμβάσεων

ρ_i = η επίδραση της i ομάδας

α_j = η επίδραση του j επιπέδου του πρώτου παράγοντα - επέμβαση

β_k = η επίδραση του k επιπέδου του δεύτερου παράγοντα - επέμβαση

$(\alpha\beta)_{jk}$ = η αλληλεπίδραση του i επιπέδου του πρώτου παράγοντα με το j επιπέδου του δεύτερου παράγοντα

ε_{ijk} = η απόκλιση της Y_{ijk} από το μέσο του ij πληθυσμού

Προϋποθέσεις: τα ε_{ijk} είναι ανεξάρτητα, ακολουθούν κανονική κατανομή και προέρχονται από ένα πληθυσμό με την ίδια διασπορά.

Κατάτμηση Αθροίσματος Τετραγώνων

Χωρίζουμε την διάφορα $Y_{ijk}-\overline{Y}_{...}$ στα εξής μέρη:

$$Y_{ijk}-\overline{Y}_{...}=\left(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(\overline{Y}_{..k}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(\overline{Y}_{.jk}-\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{..k}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{i..}+\overline{Y}_{...}-\overline{Y}_{.jk}\right)$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την πιο πάνω ταυτότητα για κάθε παρατήρηση και αθροίσουμε όλες τις παρατηρήσεις:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{..}\right)^2=ab\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)^2+br\sum_{j=1}^{a}\left(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...}\right)^2+ar\sum_{k=1}^{b}\left(\overline{Y}_{..k}-\overline{Y}_{...}\right)^2+$$

$$r\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\overline{Y}_{.jk}-\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{..k}+\overline{Y}_{...}\right)^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{i..}+\overline{Y}_{...}-\overline{Y}_{.jk}\right)^2$$

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το ΤΠΟ

Πηγή παρ/τας	ΒΕ	ΑΤ	ΜΤ	F	ΘΜΣΤ*
Ομάδα	r – 1	$ATo = ab\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2$	$MTo = \frac{AT_o}{(r-1)}$	$\frac{MT_o}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + ab\sigma_o^2$
A	a – 1	$AT_A = bn\sum_{j=1}^{a}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2$	$MT_A = \frac{AT_A}{(a-1)}$	$\frac{MT_A}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + br\sigma_a^2$
B	b – 1	$AT_B = ar\sum_{k=1}^{b}\left(\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}\right)^2$	$MT_B = \frac{AT_B}{(b-1)}$	$\frac{MT_B}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + ar\sigma_b^2$
AB	(a – 1)(b – 1)	$AT_{AB} = r\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}\right)^2$	$MT_{AB} = \frac{AT_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MT_{AB}}{MT\upsilon}$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{ab}^2$
Υπόλοιπο	(r–1)(ab–1)	$AT\upsilon = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{...} - \bar{Y}_{.jk}\right)^2$	$MT\upsilon = \frac{AT\upsilon}{(ab-1)(r-1)}$		σ_e^2
Σύνολο	abr – 1	$AT\sigma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}..\right)^2$			

*A, B και Ομάδες: προκαθορισμένα, Πρότυπο Ι (Σταθερών επιδράσεων)

Παράδειγμα: Τυχαιοποίηση πειράματος δύο παραγόντων (4Χ3), με τέσσερις επαναλήψεις, σε Σχέδιο Τυχαιοποιημένων Πλήρων Ομάδων.

```
> library(agricolae)
> trt=c(4,3)
> outdesign=design.ab(trt, r=4, design=c("rcbd"), randomization=TRUE)
> outdesign
```

	plots	block	A	B
1	101	1	2	1
2	102	1	3	2
3	103	1	2	2
4	104	1	1	2
5	105	1	1	1
6	106	1	4	2
7	107	1	4	1
8	108	1	1	3
9	109	1	4	3
10	110	1	2	3
11	111	1	3	3
12	112	1	3	1

	plots	block	A	B
13	113	2	2	3
14	114	2	3	3
15	115	2	1	3
16	116	2	1	2
17	117	2	3	1
18	118	2	4	2
19	119	2	4	1
20	120	2	2	1
21	121	2	1	1
22	122	2	4	3
23	123	2	3	2
24	124	2	2	2

	plots	block	A	B
25	125	3	3	2
26	126	3	1	3
27	127	3	3	3
28	128	3	4	3
29	129	3	2	2
30	130	3	1	2
31	131	3	2	1
32	132	3	2	3
33	133	3	4	2
34	134	3	4	1
35	135	3	3	1
36	136	3	1	1

	plots	block	A	B
37	137	4	1	2
38	138	4	2	1
39	139	4	4	3
40	140	4	2	2
41	141	4	1	3
42	142	4	3	2
43	143	4	4	1
44	144	4	2	3
45	145	4	3	1
46	146	4	1	1
47	147	4	3	3
48	148	4	4	2

Παράδειγμα : Πείραμα δύο παραγόντων (4Χ3) σε σχέδιο Τ.Π.Ο.

	A												
	a_1			a_2			a_3			a_4			
B	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	Σύνολα
1η ομάδα	2	3	5	8	10	15	15	19	22	20	15	10	144
2η ομάδα	3	3	6	9	11	17	14	20	21	19	15	13	151
3η ομάδα	4	6	8	12	13	15	16	17	23	22	14	11	161
Σύνολα	9	12	19	29	34	47	45	56	66	61	44	34	456

	a_1	a_2	a_3	a_4	Σύνολο
b_1	9	29	45	61	144
b_2	12	34	56	44	146
b_3	19	47	66	34	166
Σύνολο	40	110	167	139	456

$$\Delta O = \frac{Y_{...}^{2}}{abr} = \frac{456^2}{4*3*3} = 5776$$

$$AT_{\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda o\upsilon} = \sum_{ijk} Y_{ijk}^2 - \Delta O = 2^2 + 3^2 + \ldots + 13^2 + 11^2 - \Delta O = 7088 - 5776 = 1312$$

$$AT_{o} = \sum_{i} \frac{Y_{i..}^2}{ab} - \Delta O = \frac{(144)^2 + (151)^2 + (161)^2}{12} - \Delta O = 12{,}16$$

$$AT_{A} = \sum_{j} \frac{Y_{.j.}^2}{rb} - \Delta O = \frac{(40)^2 + \ldots + (139)^2}{9} - \Delta O = 991{,}77$$

$$AT_{B} = \sum_{k} \frac{Y_{..k}^2}{ar} - \Delta O = \frac{(144)^2 + (146)^2 + (166)^2}{12} - \Delta O = 24{,}66$$

$$AT_{AB} = \sum_{jk} \frac{Y_{.jk}^2}{r} - AT_A - AT_B + \Delta O = \frac{(9)^2 + \ldots + (34)^2}{3} - AT_A - AT + \Delta O = 248{,}22$$

$$AT_{\upsilon\pi.} = AT_{\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda o\upsilon} - AT_A - AT_B - AT_{AB} - ATo = 35{,}16$$

Πίνακας Ανάλυσης της Παραλλακτικότητας για το ΤΠΟ

Πηγή παρ/τας	**ΒΕ**	**ΑΤ**	**ΜΤ**	**F**	**F πιν.**
Ομάδα	r – 1 = 2	12,16	6,08	3,8057*	3,44
A	a – 1 = 3	991,77	330,59	206,816***	3,05
B	b – 1 = 2	24,66	12,33	7,7156**	3,44
AB	(a – 1)(b – 1) = 6	248,22	41,37	25,881***	2,55
Υπόλοιπο	(r – 1)(ab – 1) = 22	35,16	1,59		
Σύνολο	abr – 1 = 35	1312			

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> attach(factorial_4X3_rcbd)
> A=factor(A);B=factor(B);Block=factor(Block)
> fit=aov(Y~A+B+Block+A*B)
> summary(fit)
```

```
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value  Pr(>F)
A          3   991.8    330.6  206.816  2.89e-16 ***
B          2    24.7     12.3    7.716  0.00289 **
Block      2    12.2      6.1    3.806  0.03807 *
A:B        6   248.2     41.4   25.881  6.58e-09 ***
Residuals 22    35.2      1.6
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Επειδή η αλληλεπίδραση A x B είναι σημαντική σχολιάζονται οι διαφορές μεταξύ των συνδυασμών των επιπέδων των δύο παραγόντων.

$$w = q_a(p_{\max}, v) * \sqrt{\frac{MT\upsilon}{n}} = 5{,}14 * \sqrt{\frac{1{,}59}{3}} = 3{,}75$$

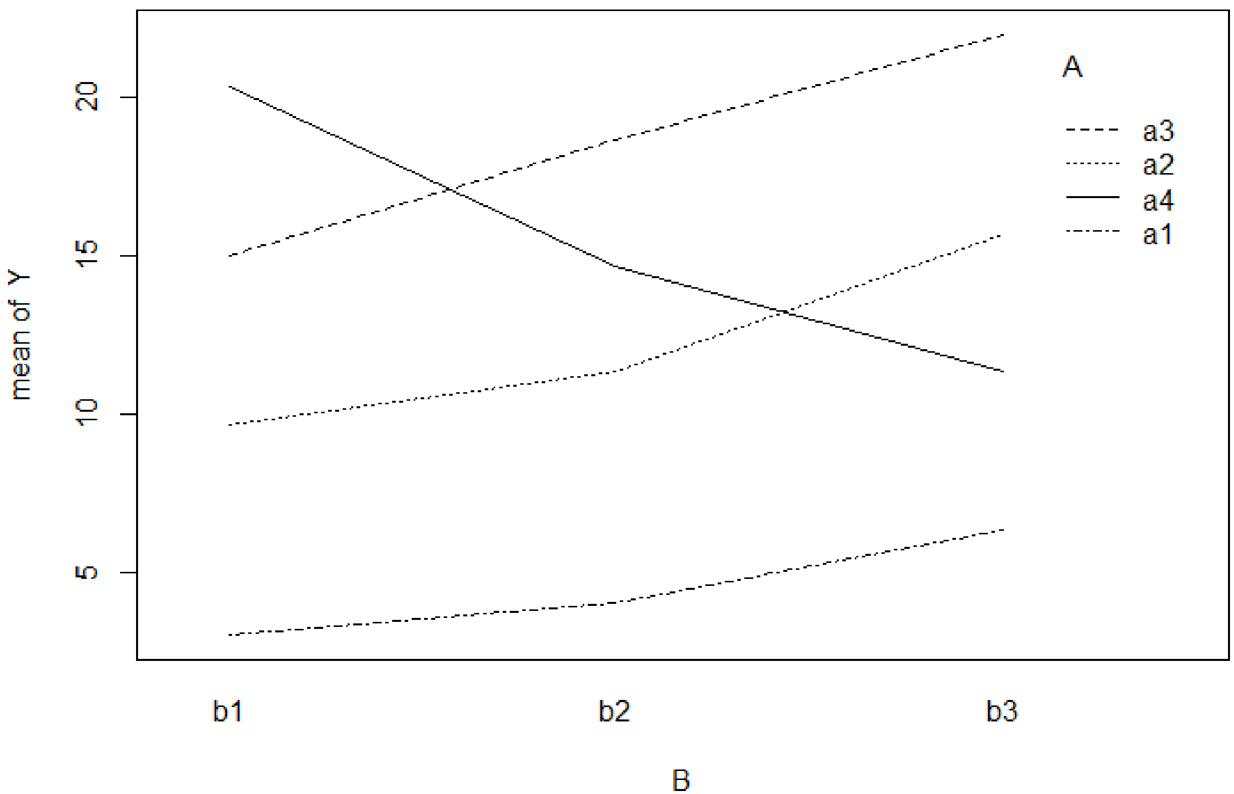
Συνδυασμός	Μέσος Όρος	
a_3b_3	22	a
a_4b_1	20,33	a
a_3b_2	18,66	ab
a_2b_3	15,66	bc
a_3b_1	15	bcd
a_4b_2	14,66	cd
a_4b_3	11,33	de
a_2b_2	11,33	de
a_2b_1	9,66	ef
a_1b_3	6,33	fg
a_1b_2	4	g
a_1b_1	3	g

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> library(agricolae)
> HSD.test(fit,c ("A", "B"), console = T)

Study: fit ~ c("A", "B")

HSD Test for Y

Mean Square Error:  1.598485

Alpha: 0.05 ; DF Error: 22
Critical Value of Studentized Range: 5.144324

Minimun Significant Difference: 3.755104

Treatments with the same letter are not significantly different.

              Y groups
a3:b3  22.000000      a
a4:b1  20.333333      a
a3:b2  18.666667      ab
a2:b3  15.666667       bc
a3:b1  15.000000       bcd
a4:b2  14.666667        cd
a2:b2  11.333333         de
a4:b3  11.333333         de
a2:b1   9.666667          ef
a1:b3   6.333333           fg
a1:b2   4.000000            g
a1:b1   3.000000            g
```

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

```
> interaction.plot(B, A, Y)
```



Παράδειγμα: Διπαραγοντικό πείραμα 2x3 σε Λατινικό Τετράγωνο

Πηγή παραλλακτικότητας	**ΒΕ**
Ομάδα – Σειρά	$ab - 1 = 5$
Ομάδα – Στήλη	$ab - 1 = 5$
A	$a - 1 = 1$
B	$b - 1 = 2$
AB	$(a - 1)(b - 1) = 2$
Υπόλοιπο	$(ab - 1)(ab - 2) = 20$
Σύνολο	$(ab)^2 - 1 = 35$

Παράδειγμα: Τριπαραγοντικό πείραμα 2x2x3 με τέσσερις επαναλήψεις σε Τ.Π.Ο.

Πηγή παραλλακτικότητας	**ΒΕ**
Ομάδα	$r - 1 = 3$
Α	$a - 1 = 1$
Β	$b - 1 = 1$
Γ	$c - 1 = 2$
ΑΒ	$(a - 1)(b - 1) = 1$
ΑΓ	$(a - 1)(c - 1) = 2$
ΒΓ	$(b - 1)(c - 1) = 2$
ΑΒΓ	$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 2$
Υπόλοιπο	$(r - 1)(abc - 1) = 33$
Σύνολο	$rabc - 1 = 47$