

Γεωργικός Πειραματισμός

5ο Εργαστήριο

Αναστάσιος Κατσιλέρος

Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εργαστήριο Βελτίωσης Φυτών και Γεωργικού Πειραματισμού

katsileros@aua.gr

Αθήνα 2020

Τα περιγραφικά μέτρα που υπολογίζονται από το στατιστικό πληθυσμό, ονομάζονται **παράμετροι του πληθυσμού** και είναι συνήθως άγνωστα.

Τα περιγραφικά μέτρα που υπολογίζονται από ένα τμήμα του πληθυσμού, ονομάζονται **στατιστικά** και αποτελούν εκτιμήσεις των αντίστοιχων, άγνωστων αλλά πραγματικών τιμών των παραμέτρων του πληθυσμού.

Τα στατιστικά $\bar{Y}$ και s^2 αποτελούν σημειακές εκτιμήσεις των αντίστοιχων παραμέτρων του πληθυσμού. Με βάση όμως τα δεδομένα ενός δείγματος είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε ακριβώς τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Η δειγματική μέση τιμή παίρνει διαφορετικές τιμές αν πάρουμε άλλα δείγματα από τον ίδιο πληθυσμό. Επομένως για την εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού είναι χρήσιμο να ορίσουμε ένα **διάστημα εμπιστοσύνης** εντός του οποίου με βάση μια ορισμένη πιθανότητα, να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Ο έλεγχος υποθέσεων είναι μια διαδικασία κατά την οποία ελέγχουμε ισχυρισμούς που αφορούν τις παραμέτρους του πληθυσμού, με την επιλογή δειγμάτων από τον πληθυσμό.

Υπάρχουν δύο είδη στατιστικών υποθέσεων, η **μηδενική υπόθεση** και η **εναλλακτική υπόθεση**. Η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι η υπόθεση με την οποία ξεκινάμε και υποθέτουμε πως η παράμετρος μπορεί να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. η μέση τιμή μ ισούται με μ_0). Η εναλλακτική υπόθεση (H_1) είναι η υπόθεση που δηλώνει ύπαρξης διαφοράς και ισχύει όταν απορρίφθει η μηδενική υπόθεση.

Η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, όταν στην πραγματικότητα ισχύει λέγεται **Σφάλμα τύπου I**. Η πιθανότητα διάπραξης Σφάλματος τύπου I καθορίζεται από την επιλογή του επιπέδου σημαντικότητας α από τον ερευνητή, που συνήθως είναι 0,05 ή 0,01. Η πιθανότητα να αποδεχτούμε την H_0 όταν είναι ορθή είναι $1 - \alpha$. Το $1 - \alpha$ είναι ο **συντελεστής εμπιστοσύνης του ελέγχου**.

Η μη απόρριψη μιας λανθασμένης μηδενικής υπόθεσης όταν πράγματι ισχύει λέγεται **Σφάλμα τύπου II**. Η πιθανότητα διάπραξης Σφάλματος τύπου II είναι β το οποίο δεν είναι γνωστό από πριν και δεν καθορίζεται. Για ένα ορισμένο αριθμό παρατηρήσεων η τιμή του β είναι αντίστροφα ανάλογη με αυτή του α . Η πιθανότητα να απορρίψουμε την H_0 και να δεχτούμε την H_1 είναι $1 - \beta$ και ονομάζεται **ισχύς του ελέγχου**.

Έλεγχος υπόθεσης για τη μέση τιμή

Ο έλεγχος υπόθεσης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού, που ακολουθεί κανονική κατανομή, εξαρτάται από το αν η διακύμανση του πληθυσμού είναι γνωστή ή άγνωστη.

Στην περίπτωση που η διακύμανση είναι γνωστή, χρησιμοποιείται η στατιστική δοκιμασία:

$$z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ενώ όταν είναι άγνωστη, χρησιμοποιείται η στατιστική δοκιμασία:

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Παράδειγμα 3. (one_sample.txt) Τα δεδομένα (101, 96, 93, 108, 102, 92, 98, 97, 95, 103) αναφέρονται στο ύψος σε εκατοστά, 10 αγοριών ηλικίας 4 χρονών. Ελέγξτε με πιθανότητα 0,95, ότι ο μέσος όρος του πληθυσμού είναι 100 εκατοστά.

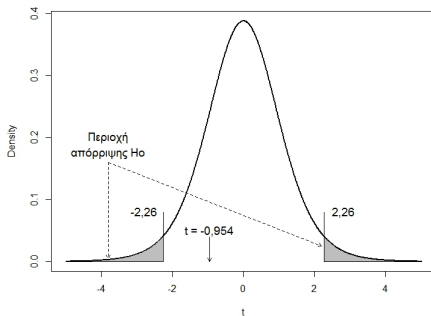
Διατύπωση μηδενικής $H_0 : \mu = 100$ και εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu \neq 100$,

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{98,5 - 100}{4,97/\sqrt{10}} = \frac{-1,5}{1,57} = -0,954$$

Ο τύπος του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0 είναι:

$$\bar{Y} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} * s_{\bar{Y}} = 98,5 \pm 2,26 * 1,57 = 98,5 \pm 3,548$$

Το κατώτερο όριο είναι: 94,94 και το ανώτερο όριο είναι: 102,05



Επειδή ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος, η περιοχή απόρριψης της H_0 περιλαμβάνει τιμές μικρότερες από $-2,26$ και μεγαλύτερες από $2,26$ ($t_{0,025,9}$). Η τιμή από την δοκιμασία t ισούται με $-0,954$ και δεν περιλαμβάνεται στην περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μέση τιμή του πληθυσμού είναι 100 εκατοστά.

jamovi - one_sample

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

	Y
1	101
2	96
3	93
4	108
5	102
6	92
7	98
8	97
9	95
10	103
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	

Ready Filters 0 Row count 10 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

jamovi - one_sample

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

Independent Samples T-Test
Paired Samples T-Test
One Sample T-Test

1									
2									
3									
4		108							
5		102							
6		92							
7		98							
8		97							
9		95							
10		103							
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									

Ready Filters 0 Row count 10 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

Έλεγχος υπόθεσης διαφοράς δύο μέσων τιμών

Αν οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών σ_1^2 και σ_2^2 , που ακολουθούν κανονική κατανομή, είναι γνωστές, τότε για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι η διαφορά των δύο μέσων τιμών των πληθυσμών είναι μηδέν ($H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$), δηλαδή ότι οι μέσες τιμές είναι ίσες, χρησιμοποιούμε την στατιστική δοκιμασία:

$$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Όταν οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες, το οποίο είναι το πιο σύνηθες, εκτιμώνται από τα δεδομένα των δειγμάτων. Ο τρόπος σύγκρισης των μέσων τιμών εξαρτάται από το αν οι τιμές είναι κατά **ζεύγη** ή **ανεξάρτητες**.

Αν οι τιμές είναι ανεξάρτητες, θα πρέπει να γίνει έλεγχος αν οι διακυμάνσεις των πληθυσμών, από τους οποίους προήλθαν τα δείγματα, είναι ίσες ή όχι.

Ο έλεγχος της υπόθεσης της ισότητας ή ομοιογένειας των διακυμάνσεων ($H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$), γίνεται με τη δοκιμασία:

$$F_{max} = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2}$$

Η τιμή από τη δοκιμασία συγκρίνεται με κρίσιμη τιμή από πίνακα του F σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha/2$ (αμφίπλευρη δοκιμασία) και για βαθμούς ελευθερίας $n_1 - 1$ για τον αριθμητή και $n_2 - 1$ για τον παρανομαστή.

Έστω δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από δύο κανονικούς πληθυσμούς με άγνωστες αλλά ίσες διακυμάνσεις, η στατιστική δοκιμασία για την σύγκριση των μέσων τιμών των δύο δειγμάτων είναι:

$$t = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

με $n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας
όπου $\bar{Y}_1$ και $\bar{Y}_2$ οι μέσες τιμές των δειγμάτων, n_1 και n_2 τα μεγέθη των δειγμάτων

$$s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$$

το τυπικό σφάλμα της διαφοράς των δύο μέσων

και s_p^2 η εκτιμήτρια της κοινής διακύμανσης σ^2 των δύο πληθυσμών.

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Ο τύπος του διαστήματος εμπιστοσύνης δίνεται από τον τύπο:

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm t_{\alpha/2, (n_1 + n_2 - 2)} * s_{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}$$

Παράδειγμα 4. (t_test_equal.txt) Τα δεδομένα αναφέρονται στο ύψος 10 φυτών από δύο ποικιλίες κριθαριού. Ελέγξτε αν οι δυο ποικιλίες διαφέρουν ως προς το ύψος.

Κρόνος	Νίκη
95	104
99	74
103	84
90	81
121	62
98	67
102	64
94	93
87	73
95	87
$n_1 = 10$	$n_2 = 10$
$\bar{Y}_1 = 98,4$	$\bar{Y}_2 = 78,9$
$s_1^2 = 87,6$	$s_2^2 = 181,4$

Έλεγχος ομοιογένειας των δύο διακυμάνσεων

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

$$F_{max} = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2} = \frac{181,4}{87,6} = 2,09$$

Η κρίσιμη τιμή F για $\alpha/2 = 0,025$ και βαθμούς ελευθερίας για τον αριθμητή $n_1 - 1 = 9$ και για τον παρανομαστή $n_2 - 1 = 9$ ισούται με 4,02. Επειδή η τιμή που υπολογίστηκε (2,09) είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή F , δεν απορρίπτεται η υπόθεση H_0 ισότητας των δύο διακυμάνσεων, σε $\alpha = 0,05$.

Επειδή δεν απορρίφτηκε η H_0 , η συμψηφισμένη διακύμανση υπολογίζεται ως εξής:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} = \frac{181,4 + 87,4}{2} = 134,05$$

Το τυπικό σφάλμα της διαφοράς:

$$s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{\frac{2 * 134,05}{10}} = \sqrt{26,81} = 5,18$$

Εφαρμόζεται η δοκιμασία του t:

$$t = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}} = \frac{98,4 - 78,9}{5,18} = 3,76$$

Η κρίσιμη τιμή t για $\alpha/2 = 0,025$ (αμφίπλευρη δοκιμασία) και βαθμούς ελευθερίας $n_1 + n_2 - 2 = 18$ ισούται με 2,1. Επειδή η τιμή που υπολογίστηκε (3,76) είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή t , απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση H_0 , σε $\alpha = 0,05$. Επομένως οι ποικιλίες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά ως προς το ύψος.

Ο τύπος του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0 είναι:

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm t_{\alpha/2, (n_1 + n_2 - 2)} * s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = (98,4 - 78,9) \pm 2,1 * 5,18 = 19,5 \pm 10,9$$

Το κατώτερο όριο είναι: $l_1 = 8,6$ και το ανώτερο όριο είναι: $l_2 = 30,4$

jamovi - t_test_equal

Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

sample	Y
1	95
2	99
3	103
4	90
5	121
6	98
7	102
8	94
9	87
10	95
11	104
12	74
13	84
14	81
15	62
16	67
17	64
18	93
19	73
20	87
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	

Ready Filters 0 Row count: 20 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

jamovi - t_test_equal

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R

Independent Samples T-Test

Dependent Variables: Y

Grouping Variable: sample

Tests

- ☒ Student's
 - ☐ Bayes factor
 - Prior: 0.707
 - ☐ Welch's
 - ☐ Mann-Whitney U

Hypothesis

- ☒ Group 1 ≠ Group 2
- ☐ Group 1 > Group 2
- ☐ Group 1 < Group 2

Missing values

- ☒ Exclude cases analysis by analysis

Additional Statistics

- ☐ Mean difference
- ☐ Confidence interval: 95 %
- ☐ Effect size
- ☐ Confidence interval: 95 %
- ☐ Descriptives
- ☐ Descriptives plots

Assumption Checks

- ☒ Homogeneity test
- ☒ Normality test
- ☐ Q-Q plot

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	Statistic	df	p	
Y	Student's t	3.76	18.0	0.001

Assumptions

Normality Test (Shapiro-Wilk)

	W	p
Y	0.947	0.317

Note: A low p-value suggests a violation of the assumption of normality

Homogeneity of Variances Test (Levene's)

	F	df	df2	p
Y	2.29	1	18	0.148

Note: A low p-value suggests a violation of the assumption of equal variances

[3]

References

Όταν οι διακυμάνσεις δεν είναι ίσες, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ένα κοινό s^2 από τα δύο δείγματα. Ο έλεγχος της διαφοράς των μέσων τιμών των δειγμάτων γίνεται με το Welch's t-test:

$$t' = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}}$$

όπου:

$$s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

και οι διορθωμένοι βαθμοί ελευθερίας (Welch-Satterthwaite) υπολογίζονται ως εξής:

$$BE' = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

Παράδειγμα 5. (t_test_unequal.txt) Τα δεδομένα αναφέρονται στην ανάπτυξη εκφύτων σε θρεπτικό υπόστρωμα MS με και χωρίς προσθήκη φυτορρυθμιστικής ουσίας (IAA).

MS	MS+IAA
11,9	21,4
15,2	35,4
14,1	22,4
13,9	25,7
10,1	31,4
13,2	26,7
12,5	34,2
-	24,5
$n_1 = 7$	$n_2 = 8$
$\bar{Y}_1 = 12,9$	$\bar{Y}_2 = 27,7$
$s_1^2 = 2,8$	$s_2^2 = 28,3$

Έλεγχος ομοιογένειας των δύο διακυμάνσεων

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

$$F_{max} = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2} = \frac{28,3}{2,8} = 10,1$$

Η κρίσιμη τιμή F για $\alpha/2 = 0,025$ και βαθμούς ελευθερίας $n_2 - 1 = 7$ για τον αριθμητή και για τον παρανομαστή $n_1 - 1 = 6$ ισούται με 5,69. Επειδή η τιμή που υπολογίστηκε (10,13) είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή F , απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση H_0 ισότητας των δύο διακυμάνσεων, σε $\alpha = 0,05$.

Επειδή απορρίφτηκε η H_0 , το τυπικό σφάλμα της διαφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2,8}{7} + \frac{28,3}{8}} = 1,98$$

Ο στατιστικός έλεγχος είναι:

$$t' = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}} = \frac{12,9 - 27,7}{1,98} = -7,41$$

$$BE' = \frac{(2,8/7 + 28,3/8)^2}{(2,8/7)^2/(7-1) + (28,3/8)^2/(8-1)} = 8,54 \approx 9$$

Η κρίσιμη τιμή t για $\alpha/2 = 0,025$ και βαθμούς ελευθερίας 9 ισούται με 2,26. Επειδή η τιμή που υπολογίστηκε (7,41) είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή t , απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση H_0 , σε $\alpha = 0,05$. Επομένως τα θρεπτικά υποστρώματα διαφέρουν στατιστικά σημαντικά ως προς την ανάπτυξη εκφύτων. Η πιθανότητα αυτό το συμπέρασμα να είναι λάθος, είναι το πολύ 0,05.

Ο τύπος του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ είναι:

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm t_{\alpha/2, BE'} * s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = (12,9 - 27,7) \pm 2,26 * 1,98 = -14,7 \pm 4,5$$

Το κατώτερο όριο είναι: $l_1 = -19,2$ και το ανώτερο όριο είναι: $l_2 = -10,2$.

jamovi - t_test_unequal

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

	trt	Y
1	1	11.9
2	1	15.2
3	1	14.1
4	1	13.9
5	1	10.1
6	1	13.2
7	1	12.5
8	2	21.4
9	2	35.4
10	2	22.4
11	2	25.7
12	2	31.4
13	2	26.7
14	2	34.2
15	2	24.5
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		

Ready Filters 0 Row count 15 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

jamovi - t_test_unequal

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

Independent Samples T-Test

Dependent Variables: Y

Grouping Variable: trt

Tests

- ☒ Student's
 - ☐ Bayes factor
 - Prior: 0.707
- ☒ Welch's
- ☐ Mann-Whitney U

Hypothesis

- ☒ Group 1 ≠ Group 2
- ☐ Group 1 > Group 2
- ☐ Group 1 < Group 2

Missing values

- ☒ Exclude cases analysis by analysis

Additional Statistics

- ☐ Mean difference
- ☐ Confidence interval: 95 %
- ☐ Effect size
- ☐ Confidence interval: 95 %
- ☐ Descriptives
- ☐ Descriptives plots

Assumption Checks

- ☒ Homogeneity test
- ☒ Normality test
- ☐ Q-Q plot

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	Statistic	df	p	
Y	Student's t	-7.00*	13.0	< .001
	Welch's t	-7.42	8.54	< .001

* Levene's test is significant ($p < .05$), suggesting a violation of the assumption of equal variances

Assumptions

Normality Test (Shapiro-Wilk)

	W	p
Y	0.970	0.862

Note: A low p-value suggests a violation of the assumption of normality

Homogeneity of Variances Test (Levene's)

	F	df	df2	p
Y	11.2	1	13	0.005

Note: A low p-value suggests a violation of the assumption of equal variances

[R]

Παράδειγμα 6. (paired samples.txt) Τα δεδομένα αναφέρονται στην περιεκτικότητα σε mg βιταμίνης C ενός τροφίμου πριν και μετά από θερμική κατεργασία.

Ζεύγη	πριν	μετά	D (διαφορά)
1	6,85	6,28	0,57
2	7,05	6,84	0,21
3	8,24	7,07	1,17
4	5,2	5,05	0,15
5	6,18	6,16	0,02
6	6,71	6,67	0,04
7	7,01	6,49	0,52
8	5,46	5,24	0,22
Μέση Τιμή	6,59	6,22	0,36
Άθροισμα	52,7	49,8	2,9

$$s_D^2 = \frac{\sum D_i^2 - (\sum D_i)^2/n}{n-1} = \frac{2,081 - (2,9)^2/8}{7} = 0,147$$

$$s_D = \sqrt{s_D^2/n} = \sqrt{0,147/8} = 0,135$$

Ο έλεγχος της σημαντικότητας της διαφοράς:

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D} = \frac{0,36}{0,135} = 2,67$$

Η κρίσιμη τιμή t για $\alpha/2 = 0,025$ και βαθμούς ελευθερίας 7 ισούται με 2,36. Επειδή η τιμή που υπολογίστηκε (2,67) είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή t , απορρίπτεται η H_0 .

Ο τύπος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι:

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} * s_D = 0,36 \pm 2,36 * 0,135 = 0,36 \pm 0,32$$

jamovi - paired samples

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

	control	trt
1	6.85	6.28
2	7.05	6.84
3	8.24	7.07
4	5.20	5.05
5	6.18	6.16
6	6.71	6.67
7	7.01	6.49
8	5.46	5.24
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		

Ready Filters 0 Row count 8 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

jamovi - paired samples

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R

Paired Samples T-Test

control
trt

Paired Variables
trt control

Tests

☒ Student's
☐ Bayes factor
 Prior: 0.707
☐ Wilcoxon rank

Hypothesis

☒ Measure 1 $\neq$ Measure 2
☐ Measure 1 $>$ Measure 2
☐ Measure 1 $<$ Measure 2

Missing values

☒ Exclude cases analysis by analysis
☐ Exclude cases listwise

Additional Statistics

☐ Mean difference
☐ Confidence interval 95 %
☐ Effect size
☐ Confidence interval 95 %
☐ Descriptives
☐ Descriptives plots

Assumption Checks

☒ Normality test
☐ Q-Q Plot

Paired Samples T-Test

Paired Samples T-Test

		statistic	df	p
trt	control	Student's t	-2.67	7.00

Normality Test (Shapiro-Wilk)

		W	p
trt	- control	0.838	0.071

Note. A low p-value suggests a violation of the assumption of normality

References

[1] The jamovi project (2020). jamovi. (Version 1.2) [Computer Software]. Retrieved from <https://www.jamovi.org>.

[2] R Core Team (2019). R: A Language and environment for statistical computing. (Version 3.6) [Computer software]. Retrieved from <https://cran.r-project.org/>.

Η πιθανότητα να υποπέσουμε σε σφάλμα τύπου Ι σε μία σύγκριση των μέσων δύο δειγμάτων ονομάζεται **βαθμός σφάλματος κατά σύγκριση** $\alpha_{K\Sigma}$ και ισούται με α .

Η πιθανότητα διάπραξης τουλάχιστον ενός σφάλματος τύπου Ι σε μία ομάδα ανεξάρτητων συγκρίσεων ονομάζεται **βαθμός σφάλματος κατά πείραμα** $\alpha_{K\Pi}$ και ισούται με:

$$\alpha_{K\Pi} = 1 - (1 - \alpha)^c$$

όπου c ο αριθμός των ανεξάρτητων συγκρίσεων.

Για το έλεγχο πολλών δειγμάτων, αντί των πολλαπλών t-test μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γενική δοκιμασία του F . Η δοκιμασία του F ελέγχει αν οι παρατηρούμενες διαφορές ανάμεσα στις μέσες τιμές των δειγμάτων οφείλονται σε τυχαίους λόγους ή σε συστηματική διαφορά ανάμεσα στα δείγματα.

Προϋπόθεση για την εφαρμογή της δοκιμασίας του F είναι οι πληθυσμοί από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα να ακολουθούν κανονική κατανομή, να έχουν ίσες διακυμάνσεις και οι παρατηρήσεις να είναι ανεξάρτητες.

Η δοκιμασία του F είναι ο λόγος δύο διακυμάνσεων και οι διακυμάνσεις που ελέγχει, είναι οι δύο διαφορετικές εκτιμήσεις της πληθυσμιακής διακύμανσης σ^2 . Η πρώτη προέρχεται από τον υπολογισμό απευθείας από την εντός των δειγμάτων διακύμανση και η δεύτερη εμμέσως από την μεταξύ των δειγμάτων διακύμανση.

Η εντός των δειγμάτων διακύμανση ή συμπηφισμένη διακύμανση s_p^2 αποτελεί μια καλή εκτίμηση της διακύμανσης σ^2 , ανεξάρτητα αν οι μέσοι των δειγμάτων διαφέρουν και υπολογίζεται ως εξής:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + \dots + (n_k - 1)s_k^2}{(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1)} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + \dots + (n_k - 1)s_k^2}{N - k}$$

όπου $N = n_1 + \dots + n_k$ και k ο αριθμός των δειγμάτων

Η μεταξύ των δειγμάτων διακύμανση s_{τ}^2 αποτελεί μία άλλη εκτίμηση της διακύμανσης σ^2 , αν υποθέσουμε όμως ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών των δειγμάτων. Αν θεωρήσουμε τις μέσες τιμές των k δειγμάτων ως ένα δείγμα, η διακύμανση των μέσων τιμών των δειγμάτων υπολογίζεται ως εξής:

$$s_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k - 1}$$

Επειδή όμως η διακύμανση του πληθυσμού σ^2 είναι n φορές μεγαλύτερη της διακύμανσης των μέσων τιμών των δειγμάτων $s_{\bar{Y}}^2 = \sigma^2/n$, η μεταξύ των δειγμάτων διακύμανση s_{τ}^2 υπολογίζεται ως εξής:

$$s_{\tau}^2 = ns_{\bar{Y}}^2 = n \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k - 1}$$

Για να ελέγξουμε την ορθότητα ή μη της μηδενικής υπόθεσης ($H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$), η γενική δοκιμασία F είναι η εξής:

$$F = \frac{\text{διακύμανση μεταξύ των δειγμάτων}}{\text{διακύμανση εντός των δειγμάτων}} = \frac{s_T^2}{s_p^2} \quad (1)$$

η οποία συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή του πίνακα F για $\alpha=0,05$ (μονόπλευρη δοκιμασία) και για $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή και $N - k$ βαθμούς ελευθερίας του παρανομαστή.

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, δηλαδή οι μέσες τιμές δεν διαφέρουν, αναμένουμε ο λόγος των δύο διακυμάνσεων να είναι κοντά στην μονάδα, ενώ αν δεν είναι αληθής, ο λόγος θα είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας επειδή ο αριθμητής περιέχει και τη μεταβλητότητα που οφείλεται στη συστηματική διαφορά ανάμεσα στα δείγματα.

Παράδειγμα 7. (Ftest.txt) Τα δεδομένα αφορούν πείραμα που πραγματοποίησε ένα μηχανικός, για να ελέγξει την επίδραση τριών διαφορετικών συνθηκών αποθήκευσης, στην διάρκεια ζωής μπαταριών.

1η επέμβαση	2η επέμβαση	3η επέμβαση
5	18	6
8	14	12
9	16	14
7	13	17
11	17	13
$n_1 = 5$	$n_2 = 5$	$n_3 = 5$
$\bar{Y}_{1.} = 8$	$\bar{Y}_{2.} = 15,6$	$\bar{Y}_{3.} = 12,4$
$s_1^2 = 5$	$s_2^2 = 4,3$	$s_3^2 = 16,3$

Διατύπωση υποθέσεων:

Μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

Υπολογισμός εντός των δειγμάτων διακύμανσης s_p^2

$$\begin{aligned}s_p^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{3} = \\ &= \frac{5 + 4,3 + 16,3}{3} = 8,53\end{aligned}$$

Υπολογισμός μεταξύ των δειγμάτων διακύμανσης s_τ^2

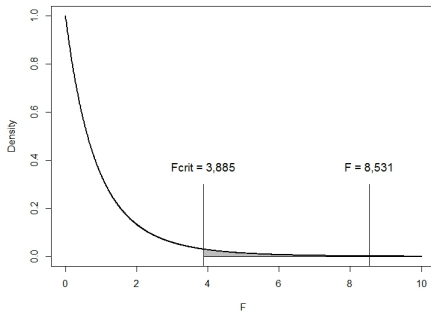
$$\begin{aligned}s_\tau^2 &= ns_{\bar{Y}}^2 = n \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k - 1} = \\ &= 5 \frac{[(8 - 12)^2 + (15,6 - 12)^2 + (12,4 - 12)^2]}{3 - 1} = 72,8\end{aligned}$$

Έλεγχος των διακυμάνσεων με την δοκιμασία F :

$$F = \frac{s_{\tau}^2}{s_{\rho}^2} = \frac{72,8}{8,53} = 8,531$$

Η κρίσιμη τιμή από τον πίνακα του F για $n - 1 = 2$ βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή και $N - k = 12$ βαθμούς ελευθερίας του παρανομαστή και σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$, είναι 3,885.

Επειδή ο λόγος του F (8,531) είναι μεγαλύτερος από την κρίσιμη τιμή $F_{(0.05,2,12)}$ (3,885), απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Επομένως τουλάχιστον δύο επεμβάσεις διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.



Για την ανάλυση σύνθετων πειραμάτων στα οποία υπάρχουν πολλές πηγές παραλλακτικότητας, εισήχθη από τον Sir Ronald A. Fisher το 1919, η στατιστική μέθοδος της **Ανάλυσης Διακύμανσης ή Παραλλακτικότητας** (Analysis of Variance, ANOVA), η οποία αποτελεί το βασικότερο στατιστικό εργαλείο στον πειραματικό σχεδιασμό.

Η ανάλυση διακύμανσης διαχωρίζει τη συνολική παραλλακτικότητα των δεδομένων του πειράματος στις διάφορες πηγές παραλλακτικότητας και στην συνέχεια ελέγχει κάθε μία ξεχωριστά με την δοκιμασία του F .

Το γραμμικό μοντέλο που περιγράφει τις επιδράσεις σε μία παρατήρηση, είναι το εξής:

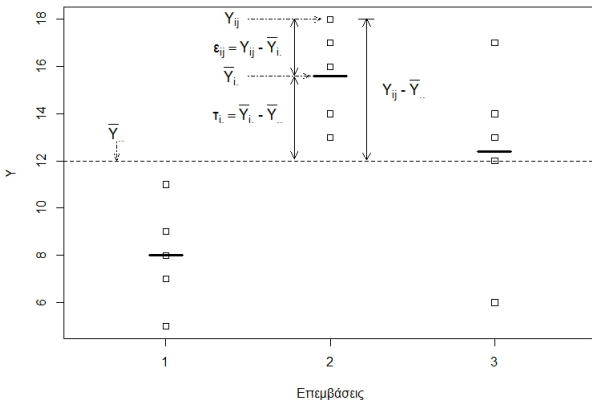
$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

όπου Y_{ij} η j παρατήρηση της i επέμβασης

μ ο γενικός μέσος του πληθυσμού

τ_i η επίδραση της i επέμβασης

ϵ_{ij} το πειραματικό σφάλμα, $N(0, \sigma^2)$



Επειδή τα μ , τ_i και ϵ_{ij} δεν είναι γνωστά, εκτιμούνται από τα δεδομένα του πειράματος. Ο γενικός μέσος μ εκτιμάται από το μέσο $\bar{Y}_{..}$, η επίδραση των επεμβάσεων τ_i , από την απόκλιση $(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})$ και το πειραματικό σφάλμα ϵ_{ij} , από την απόκλιση $(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$.

Αν στο γραμμικό μοντέλο, αντικαταστήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους με τους αντίστοιχους εκτιμητές, το μοντέλο γίνεται ως εξής:

$$Y_{ij} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

Αν από την πάραπάνω τύπο αφαιρεθεί από τις δύο πλευρές η μέση τμή $\bar{Y}_{..}$ τότε

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης στο τετράγωνο,

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + 2(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

το επαναλάβουμε για όλες τις παρατηρήσεις και αθροίσουμε τα αποτελέσματα, η σχέση δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \\ &2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \end{aligned}$$

επειδή όμως $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$

και $\sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) = Y_{i.} - n\bar{Y}_{i.} = Y_{i.} - n(Y_{i.}/n) = 0$

η σχέση γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

Πηγή Παραλ/τητας	Βαθμοί Ελευθερίας	Άθροισμα Τετραγώνων	Μέσο Άθροισμα Τετραγώνων	Δοκιμασία F	ΘΣΜΤ ¹	ΘΣΜΤ ²
Μεταξύ των επεμβάσεων	a-1	$n \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$	$AT\varepsilon\pi/(a-1)$	$MT\varepsilon\pi/MT\nu\pi$	$\sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\tau^2$
Εντός των επεμβάσεων ή Υπόλοιπο	a(n-1)	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$AT\nu\pi/a(n-1)$		σ^2	σ^2
Σύνολο	an-1	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$				

¹Θεωρητική Σύσταση Μέσου Τετραγώνου με σταθερές επιδράσεις, ²Θεωρητική Σύσταση Μέσου Τετραγώνου με τυχαίες επιδράσεις

Ανάλυση δεδομένων του παραδείγματος 7.

Διατύπωση υποθέσεων:

Μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

Για τον υπολογισμό του συνολικού αθροίσματος τετραγώνων αντί του τύπου:

$$AT_{\sigma\upsilon\nu} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος εργασίας:

$$AT_{\sigma\upsilon\nu} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n Y_{ij}^2 - \Delta O$$

όπου a = ο αριθμός των επεμβάσεων, n = ο αριθμός των επαναλήψεων και ΔO , ο **διορθωτικός όρος** (correction term), ο οποίος υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta O = \frac{(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n Y_{ij})^2}{an} = \frac{Y_{..}^2}{an} = \frac{(5 + 7 + \dots + 17 + 13)^2}{3 * 5} = \frac{180^2}{15} = 2160$$

επομένως χρησιμοποιώντας τον τύπο εργασίας για το ΑΤσυν.:

$$AT_{\sigma\upsilon\nu} = 5^2 + 8^2 + 9^2 + \dots + 14^2 + 17^2 + 13^2 - 2160 = 248$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος τετραγώνων των επεμβάσεων, αντί του τύπου:

$$AT_{\varepsilon\pi} = n \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

χρησιμοποιείται ο τύπος εργασίας:

$$AT_{\varepsilon\pi} = \sum_{i=1}^a \frac{Y_{i.}^2}{n} - \Delta O$$

$$AT_{\varepsilon\pi} = \frac{40^2}{5} + \frac{78^2}{5} + \frac{62^2}{5} - 2160 = 145,6$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος τετραγώνων των υπολοίπων, αντί του τύπου:

$$AT_{v\pi} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

υπολογίζεται η διαφορά:

$$AT_{v\pi} = AT_{\sigma\nu\nu} - AT_{\varepsilon\pi} = 248 - 145,6 = 102,4$$

Υπολογισμός μέσου αθροίσματος τετραγώνων των επεμβάσεων:

$$MT_{\varepsilon\pi} = \frac{AT_{\varepsilon\pi}}{a-1} = \frac{145,6}{2} = 72,8$$

Υπολογισμός μέσου αθροίσματος τετραγώνων του υπολοίπου:

$$MT_{\nu\pi} = \frac{AT_{\nu\pi}}{a(n-1)} = \frac{102,4}{12} = 8,533$$

Έλεγχος των διακυμάνσεων με την δοκιμασία F :

$$F = \frac{MT_{\varepsilon\pi}}{MT_{\nu\pi}} = \frac{72,8}{8,533} = 8,531$$

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

Πηγή Παραλ/τητας	Βαθμοί Ελευθερίας	Άθροισμα Τετραγώνων	Μέσο Άθροισμα Τετραγώνων	Δοκιμασία F	F πίνακα
Μεταξύ των Επεμβάσεων	$a - 1 = 2$	145,6	72,8	8,531**	3,885
Εντός των επεμβάσεων ή Υπόλοιπο	$a(n - 1) = 12$	102,4	8,53		
Σύνολο	$an - 1 = 14$	248			

jamovi - Ftest

Data Analyses

Exploration T-Tests ANOVA Regression Frequencies Factor Base R R Modules

trt	rep	data
1	1	5
2	1	8
3	1	9
4	1	7
5	1	11
6	2	18
7	2	14
8	2	16
9	2	13
10	2	17
11	3	6
12	3	12
13	3	14
14	3	17
15	3	13
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		

Ready Filters 0 Row count 15 Filtered 0 Deleted 0 Added 0 Cells edited 0

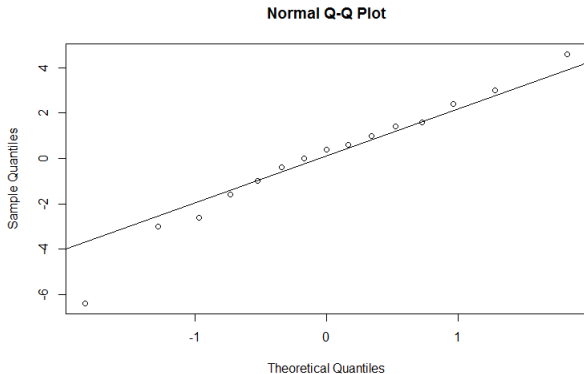
Οι βασικές προϋποθέσεις για την ανάλυση της διακύμανσης, είναι ότι οι πληθυσμοί από τους οποίους προήλθαν τα δείγματα-επεμβάσεις να ακολουθούν την κανονική κατανομή, οι διακυμάνσεις των πληθυσμών να είναι ίσες (ομοσκεδαστικότητα) και οι παρατηρήσεις να είναι ανεξάρτητες. Αν για τον έλεγχο χρησιμοποιηθούν τα **υπόλοιπα** ε_{ij} (residuals) ή τα **τυποποιημένα υπόλοιπα** ε_{ijstd} (standardized residuals), πρέπει να ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$, να έχουν κοινή διακύμανση και να είναι ανεξάρτητα.

Για τον έλεγχο των προϋποθέσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσοι γραφικές όσο και στατιστικοί μέθοδοι.

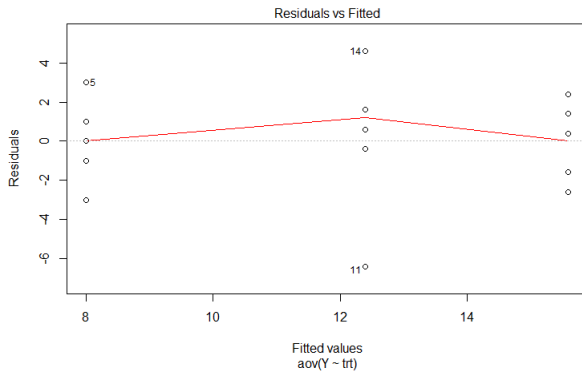
Υπολογισμός υπολοίπων και τυποποιημένων υπολοίπων

Επέμβαση	Y	$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i$	$\varepsilon_{ijstd} = \varepsilon_{ij}/s_i$
1	5	-3	-1,15
1	8	0	0
1	9	1	0,38
1	7	-1	-0,38
1	11	3	1,15
2	18	2,4	0,92
2	14	-1,6	-0,61
2	16	0,4	0,15
2	13	-2,6	-1
2	17	1,4	0,54
3	6	-6,4	-2,45
3	12	-0,4	-0,15
3	14	1,6	0,61
3	17	4,6	1,76
3	13	0,6	0,23

Μία γραφική μέθοδος για τον έλεγχο της κανονικότητας, είναι το **Q-Q διάγραμμα** (quantile-quantile plot), το οποίο συγκρίνει τα ποσοστιαία σημεία του δείγματος, με τα πληθυσμιακά ποσοστιαία σημεία της κανονικής κατανομής. Αν τα σημεία είναι κοντά σε ευθεία γραμμή δεν υπάρχει ένδειξη για απόκλιση από την κανονικότητα.



Ο έλεγχος ότι τα υπόλοιπα των επεμβάσεων έχουν κοινή διακύμανση γίνεται με ένα **διάγραμμα διασποράς υπολοίπων** (residuals plot). Αν για όλα τα δείγματα – επεμβάσεις, τα υπόλοιπα είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα και τυχαία γύρω από την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το 0, υπάρχει μια καλή ένδειξη ότι έχουν κοινή διακύμανση.



Έλεγχος κανονικότητας Shapiro-Wilk test

Ο έλεγχος Shapiro-Wilk ελέγχει τη μηδενική υπόθεση ότι ένα δείγμα προήλθε από έναν κανονικά κατανομημένο πληθυσμό. Το κριτήριο της δοκιμής υπολογίζεται ως εξής:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i(x_{(n+1-i)} - \bar{x}))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

όπου

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}} \text{ και } m = (m_1, \dots, m_n)^T$$

m_i είναι οι αναμενόμενες τιμές των διατεταγμένων παρατηρήσεων και V ο πίνακας συνδιακύμανσης τους.

Για τον έλεγχο Shapiro-Wilk η διαδικασία είναι η εξής:

α) Τα υπόλοιπα ε_{ij} των παρατηρήσεων διατάσσονται σε αύξουσα σειρά.

β) Υπολογίζονται οι διαφορές των διατεταγμένων υπολοίπων $(x_{(n+1-i)} - x_i)$.

γ) Επιλέγονται οι τιμές a με βάση τον αριθμό των παρατηρήσεων από τον αντίστοιχο πίνακα συντελεστών Shapiro-Wilk.

δ) Υπολογίζεται το γινόμενο $a \cdot (x_{(n+1-i)} - x_i)$

ε) Υπολογίζεται η τιμή W , η οποία ελέγχεται με το $P - value$, με βάση τον αριθμό των παρατηρήσεων, του αντίστοιχου πίνακα Shapiro-Wilk.

i	x_i	e_{ij}	$x_{(n+1-i)}$	e_{ij}	$(x_{(n+1-i)} - x_i)$	a^*	$a \cdot (x_{(n+1-i)} - x_i)$
1	x_1	-6,4	x_{15}	4,6	11	0,515	5,665
2	x_2	-3	x_{14}	3	6	0,3306	1,9836
3	x_3	-2,6	x_{13}	2,4	5	0,2495	1,2475
4	x_4	-1,6	x_{12}	1,6	3,2	0,1878	0,60096
5	x_5	-1	x_{11}	1,4	2,4	0,1353	0,32472
6	x_6	-0,4	x_{10}	1	1,4	0,088	0,1232
7	x_7	0	x_9	0,6	0,6	0,0433	0,02598
8	x_8	0,4	x_8	0,4	0	0	0
							(= 9,971)

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i (x_{(n+1-i)} - x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9,971^2}{102,4} = 0,971$$

Επειδή η τιμή p-value (0,871) είναι μεγαλύτερη από το $\alpha=0,05$, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και επομένως οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Έλεγχος ομοσκεδαστικότητας Levene test

Ο έλεγχος Levene βασίζεται στην 'ανάλυση διακύμανσης' των παρατηρήσεων μετά την μετατροπή τους με την έκφραση:

$$Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|$$

Ο έλεγχος τροποποιείται και ονομάζεται Brown-Forsythe, αν αντί για το μέσο $\bar{Y}_i$, χρησιμοποιηθεί η διάμεσος $\tilde{Y}$. Το κριτήριο W υπολογίζεται ως εξής:

$$W = \frac{(N - a)}{(a - 1)} \frac{\sum_{i=1}^a N_i (\bar{Z}_i - \bar{Z}_{..})^2}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2}$$

και συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή από τον πίνακα του F , για ΒΕ αριθμητή $a - 1$ και ΒΕ παρανομαστή $N - a$ για $\alpha = 0,05$.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{(12)}{(2)} \frac{5 \cdot [(1,6 - 2)^2 + (1,68 - 2)^2 + (2,72 - 2)^2]}{[(3 - 1,6)^2 + \dots + (0,6 - 2,72)^2]} = \\
 &= \frac{(12)}{(2)} \frac{(5 \cdot 0,7808)}{(38,496)} = 0,6085
 \end{aligned}$$

Επειδή η τιμή $W = 0,6085$ είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή F του πίνακα $(3,885)$ για 2 και 12 βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή και του παρανομαστή αντίστοιχα, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, οπότε οι διακυμάνσεις είναι ίσες.

